

Algebra – Allenamenti EGMO 2020 - 1

A1. Siano x, y, z numeri reali tali che $x \neq 1, y \neq 1$ e $x \neq y$. Dimostrare che se

$$\frac{yz - x^2}{1 - x} = \frac{zx - y^2}{1 - y},$$

allora

$$\frac{yz - x^2}{1 - x} = \frac{zx - y^2}{1 - y} = x + y + z.$$

- A2. a) Dimostrare che esiste una 5-upla di numeri reali non negativi (a, b, c, d, e) tali che $a + b + c + d + e = 1$ con la seguente proprietà: comunque si dispongano i 5 numeri su una circonferenza, esiste una coppia di numeri vicini il cui prodotto è $\geq \frac{1}{9}$.
- b) Dimostrare che per ogni 5-upla di numeri reali non negativi (a, b, c, d, e) tali che $a + b + c + d + e = 1$, esiste un modo di disporre i 5 numeri su una circonferenza in modo che per ogni coppia di numeri vicini il loro prodotto è $\leq \frac{1}{9}$.

Combinatoria – Allenamenti EGMO 2020 - 1

C3. Giulia ha raccolto un mucchio di n conchiglie, con n intero positivo e si diletta con il gioco di seguito illustrato; ad ogni turno può scegliere tra una delle seguenti due mosse:

- α) se ci sono almeno 5 conchiglie, togliere 5 conchiglie dal mucchio;
- β) se il numero di conchiglie attualmente presenti è divisibile per 7, dividerle in 7 mucchietti uguali, toglierne 4 e riunire i 3 restanti in un unico mucchio.

Giulia vince se riesce a togliere tutte le conchiglie dal mucchio iniziale, mentre perde in tutti gli altri casi:

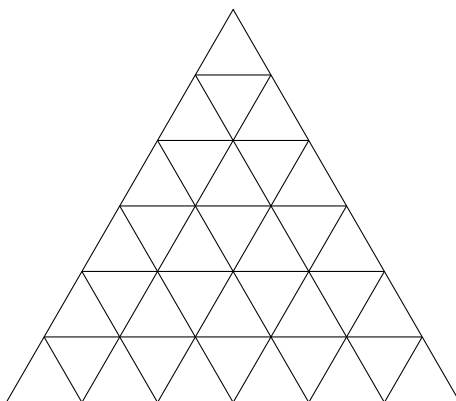
- a) per quali n riesce a vincere?

Giulia cambia le regole del gioco, e questa volta vince se alla fine le rimangono esattamente 3 conchiglie.

- b) per quali n può vincere in questa nuova versione del gioco?

C4. I confini della pianta della città n -Trilandia formano un triangolo equilatero di lato $2n$ per un certo intero positivo $n \geq 2$. La città ha in tutto $6n$ strade (confini della città compresi), e ogni strada è parallela ad uno dei tre confini, ed in particolare esattamente $2n - 1$ strade interne sono parallele ad uno stesso confine. Prese $2n$ strade parallele tra di loro, queste dividono i rimanenti due confini in tratti di strada lunghi 1.

Ad esempio, 3-Trilandia è fatta così:



Il sindaco di n -Trilandia vuole disporre delle sentinelle agli incroci delle strade, confini compresi. Ogni sentinella riesce a difendere tutte e sole le strade che si intersecano nella sua posizione.

Quante sentinelle al minimo sono necessarie per difendere ogni strada di n -Trilandia?

Geometria – Allenamenti EGMO 2020 - 1

G5. Sia ω una circonferenza di centro O , e P un punto esterno ad essa. Siano A e B i punti di intersezione fra le tangenti uscenti da P e la circonferenza. Preso M sul segmento AB , siano C e D i punti di intersezione della perpendicolare ad OM per M con PA e PB . Dimostrare che M è il punto medio di CD .

G6. Sia $ABCD$ un trapezio di basi AD e BC tale che $AB = AD + BC$. Indichiamo con F il punto medio di CD .

a) Dimostrare che la bisettrice dell'angolo $\angle DAB$ incontra CD in F .

Sia ω la circonferenza di diametro CD e J l'intersezione di AF e la bisettrice di $\angle ADC$. Supponiamo che ora ω sia tangente al lato AB in P , costruiamo X l'intersezione di AD e PF , e M e N le proiezioni di J su PF e AD .

b) Dimostrare che X è equidistante da M e N .

Teoria dei Numeri – Allenamenti EGMO 2020 - 1

- N7. Determinare tutte le terne (a, b, c) di interi positivi che soddisfano le seguenti condizioni:

$$\text{MCD}(a, 20) = b$$

$$\text{MCD}(b, 15) = c$$

$$\text{MCD}(a, c) = 5$$

Con $\text{MCD}(a, b)$ si indica il massimo comune divisore tra a e b , ovvero il più grande intero positivo che divide entrambi

- N8. Trovare tutte le terne (m, p, q) che soddisfano

$$2^m p^2 + 1 = q^5$$

dove $m > 0$ è un intero e p e q sono numeri primi.

EGMO Camp Pisa 2020 – Test Finale

Problemi a risposta rapida

1. Dimostrare che per ogni a, b, c reali positivi vale

$$\frac{a}{bc} + \frac{b}{ac} + \frac{c}{ab} \geq \frac{2}{a} + \frac{2}{b} - \frac{2}{c}$$

e determinare i casi in cui vale l'uguaglianza.

2. Siano a, b, c reali non negativi con $c > 0$ e sia $p(x) = x^3 - ax^2 + bx - c$.
Dette x_1, x_2, x_3 le radici di $p(x)$, chiamiamo

$$f(a, b, c) = \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_1}{x_3} + \frac{x_2}{x_1} + \frac{x_2}{x_3} + \frac{x_3}{x_1} + \frac{x_3}{x_2}.$$

Dimostrare che $f(a, b, c)$ è un numero reale e trovare il minimo valore che può assumere $f(a, b, c)$ al variare di a, b, c .

3. Un insieme S è chiamato *zuccheroso* se ha le seguenti 2 proprietà:

- a) S ha esattamente 4 elementi;
- b) per ogni elemento x di S , almeno uno dei numeri $x - 1$ o $x + 1$ appartiene ad S .

Trovare quanti sono tutti i possibili sottoinsiemi *zuccherosi* dell'insieme $\{1, 2, \dots, n\}$.

4. Sia n un intero positivo e $f : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$ iniettiva tale che per ogni $m \in \{1, \dots, n\}$ $f(m) = m + 5$ o $f(m) = m - 2$. Determinare quali sono i possibili valori di n .

5. Si considerino due circonferenze di centri A e B , raggi 3, 8 rispettivamente e in cui $AB > 11$. Una tangente interna comune alle due circonferenze interseca quella di centro A in C e quella di centro B in D . I segmenti AB e CD si intersecano in E , e $AE = 5$.

Determinare la lunghezza di CD .

6. Sia $\triangle ABC$ un triangolo acutangolo con $\angle BAC = 60^\circ$ e sia I il suo incentro. Siano $D = BI \cap AC$ e $E = CI \cap AB$.
Determinare $\angle DEI$.

7. Dire per quanti numeri interi $a \geq 2$ il numero $a^8 - a^7 + a^6 - a^5 + a^4 - a^3 + a^2 - a + 1$ è primo.

8. Determinare quanti valori può assumere $\text{MCD}(2n^2 - 2n - 3, 3n^2 + n + 3)$ al variare di $n \in \mathbb{N}$.

Problemi dimostrativi

9. Sia $m(n)$ il più grande divisore proprio di $n \in \mathbb{N}$. Trovare tutti gli $n \in \mathbb{N}$ per cui $n + m(n)$ è una potenza di 10.
10. Sia $\triangle ABC$ un triangolo rettangolo in A e sia D il punto medio di BC . Una retta passante per D interseca AB in X e AC in Y , tali che A, C, Y sono allineati in quest'ordine e A, X, B sono allineati in quest'ordine. Si prenda P su XY tale che il punto medio M di XY coincida con il punto medio di PD . La perpendicolare a BC per P interseca BC in T .
Dimostrare che $\angle TAM = \angle MAD$.
11. La gara finale di selezione delle EGMO è composta da 8 problemi, e vi accedono 30 partecipanti. Dopo la gara i correttori realizzano che su ogni problema ciascuna ragazza ha totalizzato 0 punti oppure $30 - k$ punti, dove k è il numero di ragazze che ha risolto quello specifico problema. Veronica ha totalizzato il punteggio più basso di tutti, quanto vale al massimo il suo punteggio?
12. Dato un polinomio $q(x) \in \mathbb{R}[x]$, denotiamo $q^{(m)}(x)$ il polinomio $\underbrace{q(q(\cdots q(x)))}_{m \text{ volte}}$, ovvero la composizione di $q(x)$ con se stesso m volte.
- (a) Trovare tutti i polinomi $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ tali che $p(0) = 0$ e per cui esistono interi positivi m, n tali che
- $$p^{(m)}(x) = x^n.$$
- (b) Trovare tutti i polinomi $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ per cui esistono interi positivi m, n tali che
- $$p^{(m)}(x) = x^n.$$

Girls' Selection Test 2020

GST1. Risolvere l'equazione:

$$3^a + 2^b + 2015 = 3c!$$

con a, b, c interni non negativi.

GST2. Dati a, b , e c numeri reali positivi tali che $a + b + c = 1$, dimostrare che

$$\sqrt{a + bc} + \sqrt{b + ca} + \sqrt{c + ab} \leq 2.$$

GST3. In ogni casella di una tabella $n \times m$ è scritto un numero naturale (in caselle diverse possono esserci scritti numeri diversi), e l'unica mossa consentita è aggiungere lo stesso numero intero k a due caselle adiacenti in modo che nelle caselle rimangano scritti sempre interi non negativi. Trovare una condizione necessaria e sufficiente affinché sia possibile avere solo zeri in tutte le caselle dopo un numero finito di operazioni.

GST4. Sia $\triangle ABC$ un triangolo acutangolo con $AB < BC$, circocentro O e ortocentro H . Sia D un punto sulla retta BO tale che B, O, D siano in quest'ordine e $\angle ABC = \angle ADC$. Detta r la retta passante per H e parallela a BO , sia E l'intersezione di r con la circonferenza circoscritta al triangolo $\triangle ABC$ nell'arco minore AC . Dimostrare che $BH = DE$.

Modalità di svolgimento della prova: 4 problemi con 4 ore e 30 minuti di tempo a disposizione.