

Ammissione EGMO Camp Pisa 2022

Problemi a risposta rapida - fino a 3 punti

1. Sia $P(x)$ un polinomio a coefficienti interi tali che $P(2012) = P(2022) = 0$. Sapendo che $|P(2018)| < 10$ determinare i possibili valori di $P(2018)$.
2. Un insieme di numeri interi si dice *attraente* se può essere partizionato in sottoinsiemi di 3 elementi $A_i = \{a_i, b_i, c_i\}$ tali che $a_i + b_i = c_i$. L'insieme $\{1, 2, \dots, 33\}$ è *attraente*?
Nota: un insieme A si dice partizionato negli insiemi $\{A_1, \dots, A_n\}$ se tutti gli A_i sono disgiunti e $A = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$.
3. Sia ABC un triangolo e siano L, M, N i punti medi rispettivamente di BC, CA and AB . La tangente alla circonferenza circoscritta ad ABC in A interseca LM e LN in P e Q rispettivamente. Dimostrare che CP è parallela a BQ .
4. Sia n un intero positivo tale per cui il numero $110n^3$ ha 110 divisori interi positivi, inclusi 1 e il numero $110n^3$. Quanti divisori interi positivi ha il numero $81n^4$?

Problemi dimostrativi - fino a 7 punti

5. Diciamo che un intero positivo è *shuffle* se soddisfa le seguenti proprietà:
- (a) tutte le sue cifre sono non nulle;
 - (b) è divisibile per 11;
 - (c) è divisibile per 12 e comunque si mischiano le sue cifre rimane divisibile per 12.
- Quanti sono i numeri *shuffle* di 10 cifre?
6. I numeri $3, 4, \dots, 2022$ sono scritti su una lavagna. Francesca e Veronica giocano a turno, iniziando da Francesca. Ad ogni turno, il giocatore deve cancellare un numero n dalla lavagna e sostituirlo con due interi positivi a, b a sua scelta, tali che $a + b = n$. Vince il giocatore che, dopo la sua mossa, lascia scritti sulla lavagna solo numeri tutti uguali. Determinare chi ha una strategia vincente.
7. Sia ABC un triangolo e sia Γ la circonferenza circoscritta. Sia D un punto su AB tale che CD è parallelo alla retta tangente a Γ in A . Sia E l'intersezione della retta CD con Γ diversa da C , e sia F l'intersezione della retta BC con la circonferenza circoscritta al triangolo $\triangle ADC$ diversa da C . Infine sia G l'intersezione della retta AB e della bisettrice dell'angolo $\angle DCF$. Dimostrare che E, G, F e C giacciono su una stessa circonferenza.

8. Determinare tutte le funzioni $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tali che:

$$f(\max\{x, y\} + \min\{f(x), f(y)\}) = x + y$$

per ogni coppia di reali $x, y \in \mathbb{R}$.

Modalità di svolgimento della prova: 8 problemi con 4 ore e 30 minuti di tempo a disposizione.

Test Finale EGMO Camp Pisa 2022

Problemi a risposta rapida - fino a 3 punti

1. Sia ABC un triangolo. Sia D il piede della bisettrice dell'angolo $\angle BAC$ e sia M su AB tale che $\angle MDA = \angle ABC$, e N su AC tale che $\angle NDA = \angle ACB$. Detto P il punto d'intersezione fra AD e MN dimostrare che $AD^3 = AB \cdot AC \cdot AP$.
2. Ci sono 100 diamanti in una pila, 50 dei quali sono veri e 50 falsi. Un esperto è in grado di riconoscere a prima vista quali siano veri e quali falsi. Ogni volta che gli mostriamo 3 diamanti, lui ne sceglie due e ci dice quanti di questi sono veri. Dire se possiamo determinare tutti i diamanti veri indipendentemente da come l'esperto decide di scegliere le coppie da considerare.
3. Sia P un polinomio a coefficienti interi tali che $P(3) = 4$ e $P(4) = 3$. Determinare quante sono le soluzioni intere dell'equazione $P(x) = x$.
4. Un numero intero n si dice *stanco* se è possibile tagliare un cubo in n cubetti (non necessariamente tutti uguali).
Dimostrare che esiste N per cui tutti gli $n > N$ sono *stanchi*.

Problemi dimostrativi - fino a 7 punti

5. Filippo e Lorenzo giocano al seguente gioco. Partono con delle carte numerate da 1 a n disposte a faccia in su sul tavolo e ad ogni turno chi gioca deve prendere una delle carte presenti sul tavolo oppure dare all'avversario una delle carte presenti sul tavolo.
Il gioco termina quando tutte le carte sono state rimosse dal tavolo, ed entrambi calcolano la somma delle loro carte: se la differenza fra le due somme è divisibile per 3 vince Lorenzo, altrimenti vince Filippo.
 - (a) Dimostrare che se $n = 2018$ e inizia Lorenzo, Filippo ha una strategia vincente.
 - (b) Determinare chi ha una strategia vincente se $n = 2020$ e inizia Filippo.
6. Sia ABC un triangolo acutangolo in cui $AB < AC$. Sia D l'intersezione fra la bisettrice di $\angle BAC$ con BC e M il punto medio di BC . Dimostrare che la retta passante per i centri delle circonferenze circoscritte ai triangoli $\triangle ABC$ e $\triangle ADM$ è parallela ad AD .
7. Vogliamo mettere delle etichette su tutti gli interi maggiori o uguali a 2, e lo facciamo nel seguente modo:
 - mettiamo l'etichetta 1 su ogni numero primo;
 - per ogni a, b , m_a e m_b tali che $n = ab$ con $a, b > 1$, m_a è una etichetta di a ed m_b è una etichetta di b , mettiamo su n l'etichetta $am_b + bm_a$.Determinare tutti gli interi n su cui mettiamo l'etichetta n .
8. Sia f una funzione definita per tutti gli interi positivi a valori negli interi positivi tale che $f(n+1) > f(n)$ and $f(f(n)) = 3n$, per ogni intero positivo n . Calcolare $f(2022)$.

Modalità di svolgimento della prova: 8 problemi con 4 ore e 30 minuti di tempo a disposizione.

Girls' Selection Test 2022

GST1. Determinare tutti i polinomi $P(x)$ a coefficienti reali che hanno la seguente proprietà: esiste un numero intero positivo $n \in \mathbb{N}$ tale che l'uguaglianza

$$\sum_{k=1}^{2n+1} (-1)^k \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor P(x+k) = 0$$

è soddisfatta per infiniti numeri reali x .

Nota: con $\lfloor y \rfloor$ si intende la parte intera di y , ossia il più grande intero m minore o uguale ad y .

GST2. Dato un intero positivo a , indichiamo con a' l'intero la cui scrittura decimale è ottenuta invertendo la scrittura decimale di a (la scrittura decimale di a' può iniziare per 0 mentre quella di a no); ad esempio se $a = 2370$, $a' = 0732 = 732$.

Sia a_1 un intero positivo e $(a_n)_{n \geq 1}$ la successione definita per ricorrenza a partire da a_1 nel modo seguente:

$$a_{n+1} = a_n + a'_n.$$

Determinare se esiste a_1 per cui a_7 è un numero primo.

GST3. Sia γ la circonferenza circoscritta al triangolo ABC . Indichiamo con P il punto medio dell'arco BC . La retta parallela ad AB passante per P interseca i lati BC , AC e la circonferenza γ rispettivamente nei punti R , S e T . Sia K il punto d'intersezione fra i segmenti AP e BT e L il punto d'intersezione dei segmenti BS e AR . Dimostrare che KL passa per il punto medio di AB se e soltanto se $CS = PR$.

GST4. Dato n un intero positivo, Francesca e Veronica giocano insieme al seguente gioco. Per iniziare Veronica sceglie $n+1$ sottoinsiemi di cardinalità 2^{n-1} dall'insieme $\{1, \dots, 2^n\}$, che chiama $A_1, \dots, A_{n+1}$. A questo punto Francesca sceglie $n+1$ numeri interi $a_1, \dots, a_{n+1}$ e dopo Veronica sceglie un altro intero t .

Francesca vince se esiste un indice $1 \leq i \leq n+1$ e un elemento s nell'insieme A_i tale che

$$s + a_i \equiv t \pmod{2^n}.$$

Altrimenti, vince Veronica.

Determinare tutti gli interi n per cui Veronica ha una strategia vincente.

Modalità di svolgimento della prova: 4 problemi con 4 ore e 30 minuti di tempo a disposizione.