

Ammissione EGMO Camp Pisa 2023

Problemi a risposta rapida - fino a 3 punti

1. Sia $ABCD$ un parallelogramma in cui la bisettrice dell'angolo in A interseca il lato BC in M , e la bisettrice dell'angolo $\angle AMC$ passa per il vertice D . Sapendo che $\angle MDC = 45^\circ$, determinare gli angoli del parallelogramma.
2. Giorgia sta preparando diversi dolcetti per allietare gli spiriti nella notte più buia dell'anno. La sua passione per la geometria l'ha portata a tagliare il marzapane in triangoli, ma non triangoli qualunque! Siano A, B e C tre punti del piano a coordinate intere. Sappiamo che il triangolo ABC ha tutti i lati di lunghezza intera. Dimostrare che il perimetro del triangolo ABC è un numero pari.
3. Sabrina non ha preparato alcun dolcetto per Halloween, pertanto alcuni spiritelli maligni hanno deciso di nascondere le chiavi di casa. Potrà riaverle solo se riesce a risolvere il seguente indovinello: sul tavolo ci sono 50 buste all'interno delle quali ci sono delle lettere su cui è scritto il numero 1 o -1 . Facendo una domanda, Sabrina può scoprire il prodotto dei numeri scritti su 3 lettere qualsiasi. Quale è il numero minimo di domande necessarie a Sabrina per determinare il prodotto dei 50 numeri?
4. Indichiamo con $a_1, a_2, \dots, a_n$ i numeri $1, 2, \dots, n$, disposti in un qualche ordine. Per quali interi positivi n è possibile che i numeri $0, a_1, a_1 + a_2, a_1 + a_2 + a_3, \dots, a_1 + a_2 + \dots + a_n$ abbiano tutti resti diversi nella divisione per $n + 1$?

Problemi dimostrativi - fino a 7 punti

5. Su un tavolo sono piazzate delle tovagliette rettangoli, in modo che ognuna delle tovagliette abbia i lati paralleli ai lati del tavolo. Sappiamo che comunque prendiamo due tovagliette, queste si sovrappongono. Dimostrare che c'è un punto del tavolo coperto da tutte le tovagliette.
6. Sia $S = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$ un insieme di 5 interi con la proprietà che l'MCD di ogni sottoinsieme di 3 elementi è maggiore di 1 e l'MCD di ogni sottoinsieme di 4 elementi è uguale a 1. Determinare il minimo numero di divisori distinti del numero $a_1 a_2 a_3 a_4 a_5$.
7. Sia $\triangle ABC$ un triangolo isoscele di base AC e siano D ed E due punti sui lati AC e BC tali che $CD = DE$. Siano H, J , e K i punti medi dei lati DE, AE , e BD , rispettivamente. La circonferenza circoscritta al triangolo $\triangle DHK$ interseca AD in F , e la circonferenza circoscritta al triangolo $\triangle HEJ$ interseca BE in G . La retta per K parallela ad AC interseca AB in I . Sia $IH \cap GF = M$. Dimostrare che i punti J, M , e K sono allineati.
8. Uno spiritello birichino ha sostituito il quadro preferito di Chiara con un disegno alquanto particolare: 2023 punti distinti del piano sono colorati di blu o di rosso, con la proprietà che, su ogni circonferenza di raggio 1 con centro in un punto blu, ci sono esattamente 2 punti rossi. Determinare quale è il massimo numero di punti blu possibile.

Modalità di svolgimento della prova: 8 problemi con 4 ore e 30 minuti di tempo a disposizione.

Test Finale EGMO Camp Pisa 2023

Problemi a risposta rapida - fino a 3 punti

1. Secondo un'antica leggenda c'è un mostro che di tanto in tanto si sveglia, divora chiunque stia cercando di risolvere questo problema, e poi torna a dormire per un numero di anni pari alla somma delle cifre dell'anno in cui si è svegliato. Il mostro si è svegliato per la prima volta nel +234. Ma ragazze, non preoccupatevi! Riaccendete la vostra speranza, e mostrate che quest'anno siete al sicuro!
2. Trovare tutti i polinomi $P(x), Q(x)$ a coefficienti reali tali che: $P((Q(x))^3) = xP(x)(Q(x))^3$
3. Ogni intero positivo tra 1 e 4043 è stato colorato di verde o di rosso. *Flippare* il colore di un numero significa renderlo rosso se era verde, o verde se era rosso. Due interi positivi m e n vengono detti *natalizi* se $\frac{m}{n}$ oppure $\frac{n}{m}$ è un numero primo. Uno *step* consiste nello scegliere due numeri natalizi e flippare il colore di entrambi. Dimostrare che esiste una sequenza di mosse alla fine della quale, qualunque sia la configurazione di partenza, lascia ogni intero da 1 a 2024 di colore verde.
4. In un triangolo acutangolo $\triangle ABC$ con $AB \neq AC$, indichiamo con V il piede della bisettrice dell'angolo $\angle CAB$ e con D il piede dell'altezza uscente da A . Siano E e F i punti d'intersezione della circonferenza circoscritta al triangolo AVD con AC e AB rispettivamente. Dimostrare che AD, BE e CF concorrono.

Problemi dimostrativi - fino a 7 punti

5. Sia $n \geq 3$ un intero. In un gioco ci sono n scatole disposte in cerchio. All'inizio, ogni scatola contiene un oggetto che può essere un sasso, carta o forbici, in modo tale che scatole adiacenti non contengano lo stesso oggetto, e ogni oggetto appare almeno in una scatola. Proprio come nella morra cinese (o carta-forbice-sasso), forbice batte carta, carta batte sasso e sasso batte forbice.
Il gioco consiste nello spostare gli oggetti da una scatola all'altra seguendo questa regola:
Vengono prese due scatole adiacenti e da ciascuna viene scelto un oggetto in modo che i due oggetti scelti siano diversi; a questo punto, l'oggetto perdente viene spostato nella scatola dell'oggetto vincente. Per esempio, se avessimo preso sasso dalla scatola A , e forbici dalla scatola B , spostiamo le forbici nella scatola A .
Dimostrare che, applicando questa mossa abbastanza volte, è possibile spostare tutti gli oggetti in una stessa scatola.
6. Trova tutti gli interi n positivi n tali che $n^3 - 3n^2 + n$ è un quadrato perfetto.
7. Sia $ABCD$ un parallelogramma ed E un punto sulla retta AB tale che $BC = BE$ ed i punti A, B, E sono in questo ordine. Sia X il punto di intersezione della retta perpendicolare a CE passante per A e l'asse del segmento AE . Dimostrare che i punti A, B, D, X sono conciclici.
8. Determinare tutte le funzioni $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ che soddisfino

$$f(a^2) - f(b^2) \leq (f(a) + b)(a - f(b))$$

per tutti gli $a, b \in \mathbb{R}$.

Modalità di svolgimento della prova: 8 problemi con 4 ore e 30 minuti di tempo a disposizione.

Girls' Selection Test 2023

GST1. Determinare tutte le funzioni $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tali che $\forall x, y \in \mathbb{R}$

$$f(x \cdot [x + f(y)]) = (x + y) \cdot f(x).$$

GST2. In un comitato ci sono n membri. Ogni coppia di partecipanti sono amici o nemici. Ogni membro del comitato ha esattamente 2023 nemici. Infine, è noto che per ogni membro del comitato, un nemico di un suo amico è automaticamente suo nemico. Determinare tutti i possibili valori di n .

GST3. Su una lavagna sono stati scritti un numero finito di interi positivi a_i , tutti strettamente maggiori di 1. Ogni minuto, Daria scrive sulla lavagna il più piccolo intero positivo maggiore di tutti i numeri già scritti e non divisibile per nessuno di essi. Dimostra che da un certo punto in poi Daria scriverà solo numeri primi sulla lavagna.

GST4. Sia $\triangle ABC$ un triangolo rettangolo, con angolo retto in $\angle C = 90^\circ$ e sia D il piede dell'altezza da C . Sia E il baricentro del triangolo ACD , ed F il baricentro di BCD . Scegliamo il punto P in modo che $\angle CEP = 90^\circ$ e $|CP| = |AP|$, mentre Q soddisfa $\angle CFQ = 90^\circ$ e $|CQ| = |BQ|$. Si dimostri che PQ passa per il baricentro del triangolo ABC .

Modalità di svolgimento della prova: 4 problemi con 4 ore e 30 minuti di tempo a disposizione.