

Ammissione EGMO Camp Pisa 2024

Testo della prova

1. In una circonferenza, i punti A e B sono presi su archi opposti di un diametro CD . I segmenti CE e DF sono perpendicolari ad AB in modo che A, E, F e B siano allineati in questo ordine. Sapendo che $AE = 1$ calcolare la lunghezza di BF .

2. Definiamo

$$P(x) = (x - 1^2)(x - 2^2)(x - 3^2) \cdots (x - 100^2).$$

Quanti interi n ci sono tali che $P(n) \leq 0$?

3. Dimostrare che non esiste nessun multiplo di 11 la cui somma delle cifre sia esattamente uguale a 7.
4. Dimostrare che se l'insieme dei numeri $\{3, 4, 5, \dots, 3^5\}$ viene partizionato in due insiemi disgiunti, allora in uno dei due insiemi si possono trovare dei numeri a, b, c tali che $a \cdot b = c$.

N.B. I numeri a, b, c possono *non* essere a due a due distinti.

N.B. 2: *Partizionare* un insieme A significa dividere i suoi elementi in due insiemi B e C tali che

$$A = B \cup C, \quad B \cap C = \emptyset.$$

5. È dato un parallelogramma $ABCD$ tale che $(AB \neq BC)$. I punti E e G sono scelti sulla linea $\overline{CD}$ in modo che $\overline{AC}$ sia la bisettrice di entrambi gli angoli $\angle EAD$ e $\angle BAG$. La linea $\overline{BC}$ interseca $\overline{AE}$ e $\overline{AG}$ in F e H , rispettivamente. Dimostrare che la linea $\overline{FG}$ passa per il punto medio di HE .

6. Sia $n > 2$ un intero numero intero, e siano $a_1, \dots, a_n$ numeri reali distinti; inoltre chiamiamo M il massimo di questi numeri ed m il loro minimo. Nel caso in cui n è dispari, dimostrare che è possibile scegliere i segni nell'espressione

$$s = \pm a_1 \pm a_2 \pm \dots \pm a_n$$

in modo che $m < s < M$.

7. Ci sono 25 lampadine disposte nel seguente modo: le prime 24 sono collocate lungo una circonferenza ai vertici di un 24-agono regolare, e la rimanente lampadina è posta al centro della circonferenza sopra menzionata. Ad ogni mossa, si può fare una delle seguenti operazioni:

- Scegliere due lampadine sulla circonferenza tali che tra di loro ci sia un numero *dispari* di lampadine e cambiare stato delle lampadine scelte e di quella al centro.
- Scegliere tre lampadine sulla circonferenza che formino un triangolo equilatero e cambiare lo stato di queste lampadine e di quella al centro.

Dimostrare che a partire da una configurazione qualunque di lampadine accese o spente, è possibile arrivare ad avere tutte le lampadine accese. **N.B.** Con *cambiare stato* di una lampadina si intende accenderla nel caso in cui sia spenta, o spegnerla nel caso in cui sia accesa.

8. Tiziana ha scritto 5 numeri naturali distinti ai vertici di un pentagono. Successivamente, su ogni lato del pentagono scrive il minimo comune multiplo dei due numeri scritti agli estremi del segmento stesso. A questo punto si accorge che i 5 numeri scritti sui lati del pentagono sono uguali! Trovare (e dimostrare) qual è il più piccolo numero che Tiziana può aver scritto sui lati del pentagono.

Modalità di svolgimento della prova: 8 problemi con 3 ore di tempo a disposizione.

Test Finale EGMO Camp Pisa 2024

Problemi a risposta rapida - fino a 3 punti

1. Conta tutti gli anagrammi di “STAGISTE” che non contengono la stringa “ST”.
2. Sia m un intero positivo tale che esiste un intero n con la proprietà che il prodotto mn è un quadrato perfetto e la differenza $m - n$ è un numero primo. Determinare tutti i possibili m tali che $1000 \leq m \leq 2021$.
3. I 201 interi positivi $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{200}$ sono scritti in questo ordine, e $a_0 = a_{200} = 19999$. Sia k è un intero positivo tale che

$$\frac{a_{i-1} + a_{i+1}}{2} - a_i = k \quad \text{per ogni } 0 < i < 200.$$

Trovare a_{199} .

4. Sia $\triangle ABC$ un triangolo e D un punto sul lato BC . Siano U e V i circocentri dei triangoli $\triangle ABD$ e $\triangle ADC$ rispettivamente. Dimostrare che i triangoli $\triangle ABC$ e $\triangle AUV$ sono simili.

Problemi dimostrativi - fino a 7 punti

5. Sia n un intero positivo e sia $d(n)$ il numero di divisori positivi di n . Determinare tutti gli interi n tali che $n^{d(n)+1}(n+21)^{d(n)}$ è un quadrato.
6. Siano n ed m interi positivi. Si consideri una sequenza $A = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ tale che $a_i \in \{1, 2, \dots, m\}$ per ogni $1 \leq i \leq n$. Una sequenza A è detta *sbrilluccicante* se per tutti gli $1 \leq k \leq l \leq n$ il massimo della sotto-sequenza $(a_k, a_{k+1}, a_{k+2}, \dots, a_{l-1}, a_l)$ ci compare solo una volta. Qual è il minimo valore di m tale che esiste una sequenza *sbrilluccicante* di lunghezza n ?
7. Consideriamo un punto D sul lato AB di un triangolo ABC . La circonferenza per D e tangente ad AC in A e la circonferenza per D e tangente a BC in B si intersecano nuovamente in E . Sia F il simmetrico di C rispetto all'asse di AB . Dimostrare che i punti D, E, F sono allineati.
8. Tommy gioca al seguente gioco: ci sono n numeri di tre cifre scritti su una lavagna e ad ogni mossa sceglie due numeri a e b tra quelli scritti sulla lavagna, li cancella, e al suo posto scrive una delle combinazioni $a + b$, $a - b$, $a \cdot b$ oppure $\frac{a}{b}$ a sua scelta.
 1. Dimostra che partendo con $n = 5$ numeri può sempre ottenere un numero compreso tra $\frac{1}{2}$ e 1 scritto sulla lavagna. (Non è necessario che vengano usati tutti i numeri).
 2. Dimostra che partendo con $n = 16$ numeri può sempre ottenere un numero compreso tra 3 e 4 scritto sulla lavagna. (Non è necessario che vengano usati tutti i numeri).

Il testo continua alla pagina seguente!

Problemi noti - fino a 7 punti

9. Siano p, q numeri primi. Dimostrare che, se $p + q^2$ è un quadrato perfetto, allora il numero $p^2 + q^n$ non è un quadrato perfetto per nessun intero positivo n .
10. In una gara di matematica si propongono 3 problemi, ciascuno dei quali viene valutato con un punteggio intero compreso fra 0 e 7 (estremi inclusi). Si sa che, comunque si scelgano due concorrenti, c'è al più un problema su cui questi hanno ottenuto lo stesso punteggio (per esempio, non ci sono due concorrenti i cui punteggi sui tre problemi siano 7, 1, 2 per il primo e 7, 5, 2 per il secondo, ma ci potrebbero essere due concorrenti i cui punteggi siano 7, 1, 2 e 7, 2, 1). Quanti sono al massimo i partecipanti alla gara?.

Modalità di svolgimento della prova: 10 problemi con 4 ore e 30 minuti di tempo a disposizione.

Girls' Selection Test 2024 – Day 1

GST1. Sia $n > 2$ un intero positivo. Sui vertici di un n -agono sono scritti, in questo ordine, gli interi $1, 2, \dots, n$. Una mossa consiste nello scegliere due vertici adiacenti e aggiungere 1 ai numeri scritti su quei vertici. Determinare tutti i numeri n per i quali è possibile, in un numero finito di mosse, arrivare ad una configurazione in cui i numeri sui vertici sono tutti uguali.

GST2. Sia $a_1, a_2, \dots$ una sequenza di interi positivi tali che

$$a_n \leq a_{n+2} \leq \sqrt{a_n^2 + 2a_{n+1}}$$

per ogni intero positivo n . Dimostrare che esiste un intero M tale che $a_{n+2} = a_n$ per ogni $n \geq M$.

GST3. Sia $\mathbb{N}_{>0}$ l'insieme degli interi *positivi*. Una funzione $f : \mathbb{N}_{>0} \rightarrow \mathbb{N}_{>0}$ è detta *coerente* se, per ogni coppia di interi positivi x e y , soddisfa

$$\gcd(f(f(x)), f(x+y)) = \gcd(x, y).$$

Trovate tutti gli interi positivi m tali che $f(m) = m$ per ogni funzione coerente f .

Modalità di svolgimento della prova: 3 problemi con 4 ore e 30 minuti di tempo a disposizione.

Girls' Selection Test 2024 – Day 2

GST4. Dati a, b numeri reali con $a \neq 0$, consideriamo il polinomio

$$P(x) = ax^4 - 4ax^3 + (5a + b)x^2 - 4bx + b.$$

Dimostrare che tutte le radici di $P(x)$ sono reali e positive se e solo se $a = b$.

GST5. Sia Γ un circonferenza, P un punto fuori da essa, ed A e B i punti di intersezione di Γ con le tangenti da P e Γ . Sia K un punto sul segmento AB , diverso da A e B , e sia T il secondo punto di intersezione di Γ e la circonferenza circoscritta al triangolo PBK . Infine, sia P' il simmetrico di P rispetto ad A . Dimostrare che $\angle PBT = \angle P'KA$.

GST6. Un gruppo di persone è detto n -amichevole se per ogni sottoinsieme S di n persone, esiste una $(n + 1)$ -esima persona (non in S) che conosce tutte le persone di S (la conoscenza è reciproca). Determinare il massimo k tale che in ogni gruppo n -amichevole di k persone c'è una persona che conosce tutti.

Modalità di svolgimento della prova: 3 problemi con 4 ore e 30 minuti di tempo a disposizione.