

Ammissione EGMO Camp Pisa 2025

1. Veronica ha davanti a sé 2025 buste, numerate da 1 a 2025, in ciascuna delle quali ha messo delle monete (anche zero) secondo le seguenti regole:

- nella k -esima busta ci sono 0 o k monete;
- se la k -esima busta è vuota, allora anche la $(2026 - k)$ -esima è vuota.

È possibile che Veronica abbia 9999 monete?

2. Mostrare che non esistono numeri reali a e b che risolvano il sistema di equazioni

$$\begin{cases} 2ab = 6(a + b) - 13, \\ a^2 + b^2 = 4, \end{cases}$$

3. Sia E un punto scelto arbitrariamente sul lato AB del quadrato $ABCD$ distinto da A e B , e siano F e G punti sul segmento CE tali che BF e DG siano perpendicolari a CE . Dimostrare che $DF = AG$.

4. Il numero 2025 è stato scritto sulla lavagna. Alice e Daria giocano al seguente gioco: ad ogni mossa si alternano (a partire da Alice) e sostituiscono il numero sulla lavagna con la differenza tra il numero stesso e uno dei suoi divisori. Perde chi scrive 0. Chi, delle due amiche, può assicurarsi la vittoria?

5. Trovare tutti i polinomi a coefficienti reali che per ogni $x \in \mathbb{R}$ soddisfino

$$(x^2 - 6x + 8)P(x) = (x^2 + 2x)P(x - 2).$$

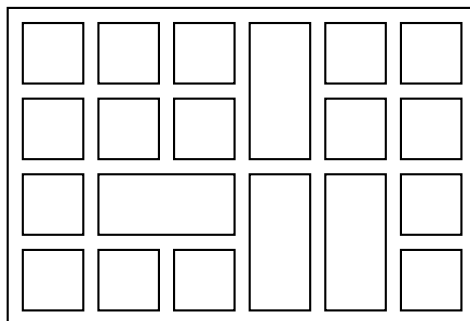
6. Diciamo che un numero n è *divertente* se, detti $1 = d_1 < d_2 < \dots < d_k = n$ tutti i suoi divisori positivi, l'insieme di differenze $\{d_2 - d_1, d_3 - d_2, \dots, d_k - d_{k-1}\}$ è una permutazione dell'insieme $\{1, 3, 5, \dots, 2k - 3\}$, ossia è l'insieme $\{1, 3, 5, \dots, 2k - 3\}$ in qualche ordine. Trovare tutti gli interi n divertenti.

7. Nel triangolo isoscele ABC , con $AB = AC$, D è un punto sul prolungamento di CA tale che DB è perpendicolare a BC , E è un punto sul prolungamento di BC dalla parte di C tale che $CE = 2BC$, e F è un punto su ED tale che FC è parallelo ad AB . Dimostrare che FA è parallelo a BC .

8. L'EGMO Camp si svolgerà in un *quartiere pisano*. Un *quartiere pisano* ha sempre forma rettangolare, le vie sono tutte parallele ai lati del rettangolo e tutti gli isolati (agglomerati di edifici non attraversati da strade) hanno forma rettangolare. Si veda la figura per un esempio. Nel *quartiere pisano* dove si svolgerà lo stage ci sono S strade (intese come vie di lunghezza massimale, ossia tali che ai due estremi incontrino o il confine di un isolato o il confine del quartiere), I isolati, X incroci a quattro-braccia



, e T è il numero di incroci a-T. Per esempio, nel quartiere qui sotto, ci sono 15 strade, 8 incroci a quattro-braccia, 20 isolati e 22 incroci a-T.



Dimostrare che in ogni quartiere $S + X = I + 3$.

Modalità di svolgimento della prova: 8 problemi con 3 ore di tempo a disposizione.

+

Test Finale EGMO Camp Pisa 2025

Problemi a risposta rapida - fino a 3 punti

1. Sia $\triangle ABC$ un triangolo tale che $AB < AC < BC$. Sia D il punto medio dell'arco minore AB della circonferenza circoscritta ad $\triangle ABC$. La retta per AD interseca BC in E e la circonferenza circoscritta al triangolo $\triangle BDE$ interseca AB di nuovo in Z . La circonferenza circoscritta al triangolo $\triangle ADZ$ interseca AC di nuovo in H . Dimostrare che $DH = DE$.
2. Siano a, b, c tre numeri primi maggiori di 3. Dimostrare che $(a - b)(b - c)(c - a)$ è divisibile per 48.
3. Sia n un intero positivo. Quale è il numero di sottoinsiemi di $\{1, 2, \dots, 2n\}$ in cui l'elemento più piccolo è dispari?
4. Trovare tutti i polinomi $P(x)$ e $Q(x)$ a coefficienti reali tali che $P(x^2) + Q(x^3) = x^5$.

Problemi dimostrativi - fino a 7 punti

5. Un numero n è *k-cifrato* se soddisfa le seguenti proprietà:

- (a) k divide la somma delle cifre di n (in base decimale);
- (b) k divide la somma delle cifre di $n + 1$ (in base decimale);
- (c) n ha al più $2k$ cifre (in base decimale).

Il codice della cassaforte dei cioccolatini di Francesca è un numero m 7-cifrato. Ovvero, m è un numero di al più 14 cifre e 7 divide la somma delle cifre di m e la somma delle cifre di $m + 1$.

Veronica è molto golosa di cioccolatini, ma non conosce il codice della cassaforte. Francesca le propone un cioccolatino per ogni intero k diverso da 7 tale che esista un codice m 7-cifrato che è anche k -cifrato. Quanti cioccolatini mangerà Veronica?

6. I numeri 43 e 2024 sono scritti sulla lavagna. Benedetta e Daria giocano al seguente gioco: Benedetta comincia e a turni scelgono due numeri a e b con $a > b$, la cui differenza $a - b$ non è già scritta sulla lavagna, e scrivono questa differenza sulla lavagna. Il gioco finisce quando non è più possibile fare mosse. Vince chi fa l'ultima mossa.

Dimostrare che Daria vince, indipendentemente da come giocano.

7. Sia $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ una successione di numeri naturali tale che

$$a_{n+1} = a_n + b_n \quad \forall n = 1, 2, \dots$$

dove b_n è l'ultima cifra di a_n . Dimostrare che la successione $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ contiene infinite potenze di 2 se e solo se a_1 non è divisibile per 5.

8. Sia ABC un triangolo rettangolo tale che $\angle A = 90^\circ$ e $AB < AC$. Sia AD l'altezza uscente da A sul lato BC . Siano P, Q e I rispettivamente gli incentri dei triangoli ABD, ACD e ABC . Dimostrare che AI è perpendicolare a PQ e che $AI = PQ$.

Il testo continua alla pagina seguente!

Problemi noti - fino a 7 punti

9. Maga Magò ha un mazzo di 52 carte, disposte in pila, con il dorso in alto. Magò separa il mazzetto costituito dalle sette carte in cima alla pila, lo capovolge, e lo mette sotto alla pila. Ora tutte le carte sono nuovamente in pila, ma non tutte hanno ancora il dorso in alto: le sette in fondo sono girate al contrario. Magò ripete l'operazione precedente finché non si verifica di nuovo che tutte le carte hanno il dorso in alto. In totale, quanti mazzetti di sette carte ha girato Magò?
10. Sono dati $n \geq 3$ numeri reali positivi $a_1, a_2, \dots, a_n$. Per ogni $1 \leq i \leq n$ definiamo $b_i = \frac{a_{i-1} + a_{i+1}}{a_i}$ (qui per a_0 si intende a_n e per a_{n+1} si intende a_1). Assumiamo che, per ogni i e j tra 1 ed n , si abbia $a_i \leq a_j$ se e solo se $b_i \leq b_j$. Dimostrare che $a_1 = a_2 = \dots = a_n$.

Modalità di svolgimento della prova: 10 problemi con 4 ore e 30 minuti di tempo a disposizione.

+

Girls' Selection Test 2025

GST1. Sia $a_1, a_2, \dots, a_{2025}$ una successione di interi positivi, tale che:

- $a_1 = 2^{2024} + 1$
- a_{n+1} è il più grande fattore primo di $a_n^2 - 1$ per ogni $1 \leq n \leq 2024$

Quando vale $a_{2024} + a_{2025}$?

GST2. 100 numeri reali non nulli $a_1, a_2, \dots, a_{100}$ (non necessariamente distinti) sono tali che le 99 frazioni

$$\frac{a_1}{a_2}, \frac{a_2}{a_3}, \frac{a_3}{a_4}, \dots, \frac{a_{99}}{a_{100}}$$

assumono tutti valori distinti. Quanti elementi diversi ci sono, al minimo, nell'insieme $\{a_1, a_2, \dots, a_{100}\}$?

GST3. Trovare tutte le funzioni $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tali che:

$$f(x)f(yf(x) - 1) = x^2f(y) - f(x) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

GST4. Sia ABC un triangolo acutangolo con circocentro O . Sia P un punto sul lato AB tale che $\angle BOP = \angle ABC$, e Q sul lato AC tale che $\angle COQ = \angle ACB$. Sia r la riflessione della retta BC rispetto alla retta PQ . Mostrare che r è tangente alla circonferenza circoscritta al triangolo APQ .

Modalità di svolgimento della prova: 4 problemi con 4 ore e 30 minuti di tempo a disposizione.