

# Ammissione EGMO Camp Pisa 2026

1. I punti  $E$  ed  $F$  vengono scelti all'interno di un quadrato  $ABCD$  in modo che i due triangoli  $ABF$  e  $BCE$  siano equilateri. Mostrare che il triangolo  $DEF$  è anch'esso equilatero.

2. A ciascun segmento e ciascun vertice di un pentagono è stato assegnato uno dei numeri da 1 a 10, in modo tale che la somma dei tre numeri su ogni lato sia la stessa. Qual è il più piccolo valore possibile di questa somma?

3. Un insieme  $S$  si dice *libero da prodotti* se, comunque presi due numeri  $x, y \in S$  (non necessariamente distinti), il loro prodotto  $x \cdot y$  non appartiene ad  $S$ .

Veronica e Francesca hanno davanti a loro i numeri  $2, 3, 4, \dots, 31, 32$ . Veronica sceglie un sottoinsieme dell'insieme  $\{2, 3, 4, \dots, 31, 32\}$  e Francesca prende i rimanenti numeri, ovvero tutti e soli quelli non scelti da Veronica. È possibile fare in modo che entrambe abbiano un insieme libero da prodotti?

4. Trovare il più piccolo valore *positivo* che può assumere l'espressione

$$1 \star 2 \star 3 \star 4 \star \dots \star 2024 \star 2025 \star 2026$$

dove al posto di ogni  $\star$  si sostituisce uno dei segni  $+$  o  $-$ .

5. Sia  $N$  il prodotto di tutti i divisori interi positivi di  $\underbrace{202620262026 \dots 2026}_{2026 \text{ volte}}$ . Qual è la cifra delle unità di  $N$ ?

6. Giulia e Matilde giocano al seguente gioco. Prendono una ciotola, che inizialmente contiene due fiammiferi e, a partire da Giulia, a turno ciascuna di loro esegue la seguente mossa: conta i fiammiferi presenti nella ciotola in quel momento, sceglie un divisore proprio  $d$  di quel numero e aggiunge  $d$  fiammiferi alla ciotola. Il gioco finisce quando ci sono almeno 2026 fiammiferi nella ciotola, e la persona che gioca l'ultimo turno vince.

Dimostrare che Giulia può sempre vincere, indipendentemente da come Matilde giochi.

**Nota bene:** un divisore proprio  $d$  di  $n$  è un numero naturale positivo tale che  $n$  è divisibile per  $d$  ed  $n \neq d$ .

7. Sia  $I$  l'incentro del triangolo acutangolo  $ABC$ . Le rette  $BI$  e  $CI$  intersecano la circonferenza circoscritta al triangolo  $ABC$  nei punti  $S$  e  $T$ , rispettivamente. Il segmento  $ST$  interseca i lati  $AB$  e  $AC$  nei punti  $K$  ed  $L$ , rispettivamente.

Dimostrare che il quadrilatero  $AKIL$  è un rombo.

8. Un numero naturale  $n \geq 2$  si dice *sussequioso* se esistono due permutazioni

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) \quad \text{e} \quad (b_1, b_2, \dots, b_n)$$

dei numeri  $\{1, 2, \dots, n\}$  tali che  $(a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n)$  sia una sequenza di numeri naturali consecutivi.

Determinare tutti i numeri naturali sussequiosi.

Modalità di svolgimento della prova: 8 problemi con 3 ore di tempo a disposizione.

# Test Finale EGMO Camp Pisa 2026

## Problemi a risposta rapida - fino a 3 punti

- [1.] Sia  $(a_1, \dots, a_n)$  una permutazione di  $(1, \dots, n)$ . Se  $n$  è dispari, dimostra che il prodotto

$$(a_1 - 1)(a_2 - 2) \cdots (a_n - n)$$

è pari.

- [2.] Trovare il massimo intero  $n \geq 2$  tale che esistano  $n$  numeri reali  $x_1, \dots, x_n$ , tutti diversi da zero ed a due a due distinti, con le seguenti proprietà:

- $x_1, \dots, x_n$  è una progressione aritmetica;
- l'insieme dei numeri  $\left\{ \frac{1}{x_1}, \dots, \frac{1}{x_n} \right\}$  forma, in un qualche ordine, una progressione aritmetica.

- [3.] Trovare tutti gli interi  $n > 1$  tali che  $n$  soddisfa un'equazione del tipo  $n = a^2 + b^2$  dove  $a$  è il minimo divisore positivo di  $n$  diverso da 1 e  $b$  è un qualche divisore di  $n$ .

- [4.] Sia  $ABCD$  un parallelogramma e siano  $E, F, G$  e  $H$  i punti medi dei lati  $AB, BC, CD$  e  $DA$  rispettivamente. Se  $BH \cap AC = I$ ,  $BD \cap EC = J$ ,  $AC \cap DF = K$ , e  $AG \cap BD = L$ , dimostra che il quadrilatero  $IJKL$  è un parallelogramma.

## Problemi dimostrativi - fino a 7 punti

- [5.] Definiamo i numeri *quasiprimi*, indicandoli con  $q_1 < q_2 < q_3 < \dots$ , nel modo seguente:

- il primo numero *quasiprimo* è  $q_1 = 2$ ;
- per ogni  $n \geq 2$  il numero  $q_n$  è il più piccolo intero tale che  $q_n > q_{n-1}$  e  $q_n$  non è scrivibile come prodotto di  $q_i$  e  $q_j$  dove  $1 \leq i, j \leq n-1$  (non necessariamente distinti)

Determinare se il numero:  $2024^{(2025^{2026})}$  è *quasiprimo* oppure no.

- [6.] Dato un intero positivo  $m$ , una sequenza di numeri reali  $a_1, a_2, a_3, \dots$  si dice  $m$ -potente se soddisfa

$$\left( \sum_{i=1}^k a_i \right)^m = \sum_{i=1}^k a_i^m$$

per ogni intero positivo  $k$ .

- (a) Trovare una sequenza in cui nessun elemento è nullo e che sia 2025-potente  
(b) Dimostrare che una sequenza è 4-potente se e solo se al più un suo elemento è non nullo.

- [7.] Sia  $ABC$  un triangolo tale che  $AB < AC < BC$  con circonferenza circoscritta  $\Gamma_1$ . La circonferenza  $\Gamma_2$  ha centro  $D$  giacente su  $\Gamma_1$  e inoltre  $\Gamma_2$  è tangente in  $E$  a  $BC$  e tangente in  $F$  al prolungamento di  $AB$  dalla parte di  $B$ . Siano  $K$  e  $G$  le due intersezioni di  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$ , e siano  $M = KG \cap EF$  e  $N = KG \cap CD$ . Dimostrare che il quadrilatero  $BCNM$  è ciclico.

*Il testo continua alla pagina seguente!*

**8.** Dato un intero positivo  $n$ , consideriamo una scacchiera bianca e nera  $n \times n$ . Chiamiamo *figura* un insieme non vuoto di caselle della scacchiera che sia connesso, ovvero tale che per ogni coppia di celle  $X$  e  $Y$  nella figura esista un cammino di celle adiacenti l'una alla successiva da  $X$  a  $Y$  interamente contenuto nella figura. In altre parole, esiste una sequenza  $c_1 = X, c_2, \dots, c_{m-1}, c_m = Y$  di celle, tutte facenti parte della figura, tali che  $c_i$  e  $c_{i+1}$  hanno un lato in comune per ogni  $i = 1, \dots, m-1$ . Diciamo che due figure sono *simili* se possono essere ottenute l'una dall'altra mediante una sequenza di mosse di questi due tipi:

- rotazione di  $90^\circ$  rispetto al centro della scacchiera;
- traslazione di un numero intero di celle in una direzione parallela agli assi della scacchiera.

Definiamo  $k(n)$  il più grande intero tale che per ogni figura  $\mathcal{F}$  formata da  $k(n)$  celle, esistano due figure  $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$  simili a  $\mathcal{F}$  tali che  $\mathcal{F}_1$  abbia strettamente più caselle nere che bianche e  $\mathcal{F}_2$  abbia strettamente più caselle bianche che nere. Determinare:

- $k(2026)$ ;
- $k(2025)$ .

### Problemi noti - fino a 7 punti

**9.** Jack scrive sulla lavagna il numero  $x_0 = 2024^{2024}$ . Successivamente lo cancella e scrive al suo posto  $x_1 = |x_0 - \pi|$ . Poi cancella  $x_1$  e scrive al suo posto  $x_2 = |x_1 - \pi|$ , e così via. In altri termini, ad ogni mossa Jack cancella il numero  $x_n$  scritto precedentemente e lo sostituisce con  $x_{n+1} = |x_n - \pi|$ . Dimostrare che esiste un valore di  $n$  tale che  $x_{n+2} = x_n$ .

**10.** Fissato un intero strettamente positivo  $N$ , siano  $c_1 < c_2 < \dots < c_m$  tutti gli interi strettamente positivi minori di  $N$  e coprimi con  $N$ . Determinare tutti gli  $N \geq 3$  tali che:

$$\text{MCD}(N, c_i + c_{i+1}) \neq 1$$

per ogni  $1 \leq i \leq m-1$ .

*Modalità di svolgimento della prova: 10 problemi con 4 ore e 30 minuti di tempo a disposizione.*

# Girls' Selection Test 2026

**GST1.** Su un cerchio sono disposte 2025 pedine bianche, a formare un 2025-agono regolare. Giorgia e Sabrina giocano al seguente gioco. Una mossa consiste nel dipingere una pedina bianca di rosso oppure di blu. Fatta eccezione per la prima mossa, la pedina che si dipinge deve essere adiacente a una pedina che sia già rossa oppure blu. Inizia Giorgia, e le giocatrici si alternano nel fare mosse fino a colorare tutte le 2025 pedine. Sabrina vince se alla fine del gioco c'è un triangolo equilatero, avente come vertici tre pedine, tale che tutti e tre i suoi vertici siano colorati di rosso oppure tutti e tre di blu. Altrimenti vince Giorgia.

Supponendo che entrambe giochino in modo ottimale, chi vince la partita?

**GST2.** Sia  $ABC$  un triangolo acutangolo con circentro  $O$  e circonferenza circoscritta  $\omega$ . Siano  $D, E, F$  i piedi delle altezze uscenti rispettivamente da  $A, B$ , e  $C$ . Sia  $P$  l'intersezione delle tangenti a  $\omega$  passanti per  $B$  e  $C$ . Definiamo:

- $Q$  come l'intersezione tra  $AD$  e la retta uscente da  $P$  e perpendicolare a  $EF$ ;
- $R$  come l'intersezione tra  $EF$  e la retta uscente da  $A$  e perpendicolare a  $EF$ .

Dimostrare che le rette  $DR$  e  $OQ$  sono parallele.

**GST3.** Sia  $n$  un intero positivo e siano  $x_1, x_2, \dots, x_n$  numeri reali **positivi**. Dimostrare che si possono scegliere dei segni, ovvero dei numeri  $a_1, a_2, \dots, a_n \in \{-1, +1\}$ , tali che:

$$a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + \dots + a_nx_n^2 \geq (a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n)^2.$$

**GST4.** Sia  $\mathbb{Z}_+$  l'insieme dei numeri interi positivi e  $\varphi : \mathbb{Z}_+ \rightarrow \mathbb{Z}_+$  la funzione di Eulero. Trovare tutte le funzioni  $f : \mathbb{Z}_+ \rightarrow \mathbb{Z}_+$  che soddisfano entrambe le condizioni:

$$\begin{cases} n - m \mid f(n) - f(m) & \text{per ogni } n, m \in \mathbb{Z}_+, n \neq m; \\ \varphi(f(n)) = f(\varphi(n)) & \text{per ogni } n \in \mathbb{Z}_+. \end{cases}$$

Si richiama che per definizione  $\varphi(n)$  è il numero di interi  $k$ , con  $1 \leq k \leq n$ , tali che  $k$  ed  $n$  siano coprimi.

Modalità di svolgimento della prova: 4 problemi con 4 ore e 30 minuti di tempo a disposizione.