

Girls Selection Test

GST1. Consideriamo l'equazione funzionale

$$f(f(x) - y) = f(y) - f(f(x)).$$

- (a) Dimostrare che esistono funzioni $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ che la soddisfano per ogni x e y in $\mathbb{Z}$ e tali che $f(2011) = 2012$.
- (b) Dimostrare che tutte le funzioni $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ che la soddisfano per ogni x e y in $\mathbb{Z}$ sono limitate.
- (c) Sia S l'insieme degli interi positivi. Determinare tutte le funzioni $f : S \rightarrow S$ che la soddisfano per ogni coppia $(x, y) \in S^2$ tale che $f(x) - y \in S$.

GST2. Sia A un insieme costituito da 101 numeri interi (distinti) maggiori o uguali a 0 e minori di 5050.

Dimostrare che esistono quattro elementi distinti a, b, c, d in A tali che

$$5050 \mid (a - b + c - d).$$

GST3. Sia $ABCD$ un quadrilatero ciclico, e sia P il punto di intersezione delle diagonali. Sia K un punto sulla bisettrice di $\angle APD$ tale che $AP = PK$, e sia L un punto sulla bisettrice di $\angle BPC$ tale che $BP = PL$ (le bisettrici sono intese come semirette). Sia M l'intersezione delle rette AK e BL , e sia N l'intersezione delle rette KD ed LC .

Dimostrare che le rette KL ed MN sono perpendicolari.

GST4. Determinare tutte le terne di interi positivi (x, y, z) tali che

$$3^x + 7^y = 4^z.$$

Modalità di svolgimento della prova: una giornata di gara con 4 problemi e 4 ore e 30 minuti di tempo a disposizione.