

Girls Selection Test

GST1. Siano a , b e c numeri reali tali che $0 < a < b < c$.

Dimostrare che

$$a^{20}b^{12} + b^{20}c^{12} + c^{20}a^{12} < b^{20}a^{12} + a^{20}c^{12} + c^{20}b^{12}.$$

GST2. Sia $n \geq 3$ un numero intero. Un gruppo di n stagisti, le cui altezze sono tutte l'una diversa dall'altra, è disposto lungo una circonferenza. In tale disposizione, uno stagista si ritiene *alto* se la sua altezza è maggiore di quella dei suoi due vicini. Analogamente, uno stagista si ritiene *mediano* se i suoi due vicini sono l'uno più alto e l'altro più basso di lui.

- (a) Determinare, in funzione di n , quali sono i valori di k per cui esiste una disposizione in cui esattamente k stagisti si ritengono alti.
- (b) Determinare, in funzione di n , quali sono i valori di k per cui esiste una disposizione in cui esattamente k stagisti si ritengono mediani.

GST3. Sia $ABCDE$ un pentagono ciclico (non intrecciato) in cui $AB = BC$ e $CD = DE$. Sia P l'intersezione tra AD e BE , sia Q l'intersezione tra BD e CA , e sia R l'intersezione tra BD e CE .

- (a) Dimostrare che il triangolo PQR è isoscele.
- (b) Dimostrare che la retta CP è perpendicolare alla retta BD .

GST4. Determinare tutte le terne di interi positivi (x, n, p) tali che p è un numero primo e

$$x^3 + 3x + 14 = 2p^n.$$

Modalità di svolgimento della prova: una giornata di gara con 4 problemi e 4 ore e 30 minuti di tempo a disposizione.