

Girls Selection Test

GST1. Per ogni $k = 1, 2, \dots, 2014$ poniamo

$$S_k = \sum_{i=k}^{2014} \frac{1}{i} = \frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} + \dots + \frac{1}{2014}.$$

Calcolare

$$S_1 + \sum_{k=1}^{2014} S_k^2 = S_1 + S_1^2 + S_2^2 + \dots + S_{2014}^2.$$

GST2.

- (a) Determinare se è possibile partizionare l'insieme degli interi positivi come unione disgiunta di insiemi $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$, dove ogni A_i è costituito da 2 elementi la cui somma è $2014 + i$.
- (b) Determinare se è possibile partizionare l'insieme degli interi positivi come unione disgiunta di insiemi $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$, dove ogni A_i è costituito da 2 elementi la cui somma è $2014 + i^2$.

GST3. Due circonferenze Γ_a e Γ_b , di raggio diverso, si intersecano in due punti M ed N . Una retta t è tangente a Γ_a nel punto A e a Γ_b nel punto B . La perpendicolare a t passante per A interseca MN in C . La perpendicolare a t passante per B interseca MN in D .

- (a) Dimostrare che il quadrilatero $ACBD$ è un parallelogrammo.
- (b) Sia E l'ulteriore intersezione tra CA e Γ_a , sia F l'ulteriore intersezione tra CB e Γ_b , sia X l'ulteriore intersezione tra DA e Γ_a , e sia Y l'ulteriore intersezione tra DB e Γ_b .

Dimostrare che i punti E, F, X, Y sono allineati.

GST4. Determinare tutte le terne (p, n, a) in cui p è un numero primo, n ed a sono interi positivi e

$$(2p)^n + 1 = a^3.$$

Modalità di svolgimento della prova: una giornata di gara con 4 problemi e 4 ore e 30 minuti di tempo a disposizione.