

# Girls Selection Test

**GST1.** Determinare tutte le terne  $(a, b, c)$  di numeri reali per cui esiste almeno una funzione  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , non identicamente nulla, tale che

$$af(yz + f(x)) + bf(zx + f(y)) + cf(xy + f(z)) = 0$$

per ogni terna di numeri reali  $x, y$ , e  $z$ .

**GST2.** Nel cerchio delimitato da una circonferenza di raggio unitario sono dati  $n$  segmenti, la somma delle cui lunghezze è maggiore o uguale di  $2\sqrt{n}$ .

Dimostrare che esiste una circonferenza, con lo stesso centro di quella iniziale, che interseca almeno due degli  $n$  segmenti.

**GST3.** Sia  $ABC$  un triangolo isoscele, con  $AB = AC$ . Sia  $M$  un punto sul lato  $BC$ , e sia  $N$  un punto sul lato  $AC$  tale che  $\angle BAM = \angle MNC$ . Sia  $P$  il punto di intersezione delle rette  $MN$  ed  $AB$ .

Dimostrare che le bisettrici degli angoli  $\angle BAM$  e  $\angle BPM$  e la retta  $BC$  sono concorrenti.

**GST4.** Per ogni intero positivo  $n$ , definiamo  $f(n)$  come il numero dei divisori positivi di  $n$  che sono congrui ad 1 modulo 6, e definiamo  $g(n)$  come il numero dei divisori positivi di  $n$  che sono congrui a  $-1$  modulo 6.

Determinare tutti gli interi positivi  $n$  per cui  $f(n)$  e  $g(n)$  hanno parità diversa.

Modalità di svolgimento della prova: una giornata di gara con 4 problemi e 4 ore e 30 minuti di tempo a disposizione.