

Girls Selection Test

GST1. Siano C_1 e C_2 due circonferenze tangenti esternamente in S tali che il raggio di C_2 è il triplo del raggio di C_1 . Consideriamo una retta tangente a C_1 in $P \neq S$ e a C_2 in $Q \neq S$. Sia T un punto in C_2 tale che QT è diametro di C_2 . Infine la bisettrice dell'angolo $\angle SQT$ incontra ST in R .

Dimostrare che $QR = RT$.

GST2. Determinare tutti gli interi positivi n per cui il numero

$$1^{\phi(n)} + 2^{\phi(n)} + \dots + n^{\phi(n)}$$

è coprimo con n .

(Si intende che ϕ è la funzione ϕ di Eulero.)

GST3. Sia f una funzione dai numeri interi positivi a valori nei numeri interi positivi, tale che $(n-1)^2 < f(n)f(f(n)) < n^2 + n$ per ogni intero positivo n .

(a) Dimostrare che se $f(f(n)) = f(n)$, allora $f(n) = n$.

(b) Dimostrare che $f(n) = n$ per ogni intero positivo n .

GST4. Sia S un insieme di n punti sul piano a tre a tre non allineati e sia P un altro punto sul piano, distinto dai precedenti e non allineato con nessuna coppia di punti in S . Chiamiamo k il numero di triangoli con vertici in S che contengono P al loro interno.

(a) Dimostrare che se $n = 5$, allora k può essere sia pari che dispari.

(b) Dimostrare che se n è pari, allora anche k è sempre pari.

Modalità di svolgimento della prova: una giornata di gara con 4 problemi e 4 ore e 30 minuti di tempo a disposizione.