

Girls Selection Test

GST1. Sia $(a_n)_{n \geq 0}$ una successione di numeri reali tali che $a_n = a_{n-1} + a_{n+2}$ per ogni $n \geq 1$.

Quanto può valere, al massimo, il numero di elementi strettamente positivi consecutivi della successione?

GST2. Sia $\triangle ABC$ un triangolo ottuso in A e siano D, E, F i punti di tangenza della circonferenza inscritta al triangolo con i lati BC, AC, AB , rispettivamente. Chiamiamo inoltre Γ la circonferenza di diametro BC .

Sia ora X il secondo punto di intersezione (oltre a B) della circonferenza passante per B, D, F con Γ . Analogamente, sia Y il secondo punto di intersezione (oltre a C) della circonferenza passante per C, D, E con Γ .

Dimostrare che i punti X, Y, E, F sono allineati.

GST3. Trovare tutti gli interi $n \geq 1$ tali che esiste una permutazione $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ di $(1, 2, \dots, n)$ tale che $a_1 + a_2 + \dots + a_k$ è divisibile per k per ogni $k = 1, 2, \dots, n$.

GST4. In una prova EGMO ci sono 3 esercizi valutati ciascuno da 0 a 7 punti. La gara è detta *emozionante* se si può sempre trovare una coppia di partecipanti tali che una delle due ha ottenuto un punteggio maggiore o uguale all'altra su ogni esercizio.

- (a) Dimostrare che se la gara ha 65 partecipanti, allora è sempre emozionante.
- (b) Dimostrare che esiste una gara con 48 partecipanti che non è emozionante.
- (c) Dimostrare che se la gara ha 49 partecipanti, allora è sempre emozionante.

Modalità di svolgimento della prova: una giornata di gara con 4 problemi e 4 ore e 30 minuti di tempo a disposizione.