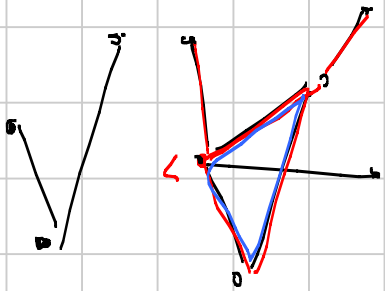
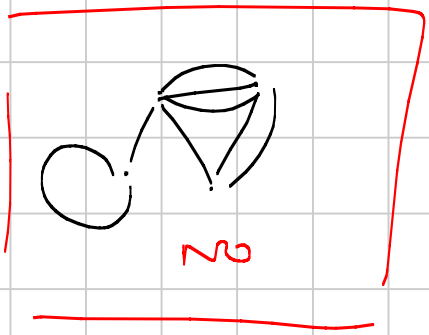
C2 - Grafi, invarianti, principio dell'estremale

Titolo nota 05/09/2024

Un grafo $G = (V, E)$ V insieme di vertici

$E \subseteq \binom{V}{2}$ di archi (grafo semplice senza loop)





$v \in V \quad \deg v = \#\{e \in E \mid v \in e\}$

$$\sum_{v \in V} \deg v = 2 \cdot \#E$$

Un cammino è una successione di vertici

$v_0 \dots v_1 \dots v_2 \dots \quad \dots \dots v_k$ tale che $\{v_i, v_{i+1}\} \in E$

Un ciclo è un cammino in cui $v_0 = v_k$ e tutti gli altri compaiono esattamente una volta.

Un grafo è connesso se $\forall\, v \neq w \in V \;\exists$ un cammino da v a w

Un grafo è un albero se è connesso e senza cicli

$$*E = *V - 1$$

Per induzione su $*V$. Se $*V = 1$ ✓

Se $*V > 1$, cerchiamo una foglia (un vertice di grado 1). Se c'è, la togliamo, togliamo l'unico arco uscente dalla foglia, e otteniamo un albero con $*V-1$ vertici.

Per IH, ha $*V-2$ archi $\Rightarrow$ $*E = *V - 1$.

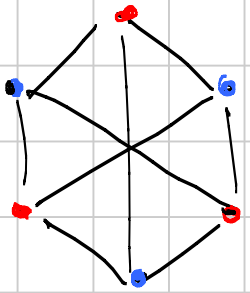
Resta da dimostrare che c'è una foglia. Partiamo da un punto e percorriamo archi andando sempre su vertici nuovi. Se non possiamo, o siamo su una foglia, oppure tutti gli archi dall'ultimo punto riportano a un vertice già visto, ma allora c'è un ciclo, assurdo.

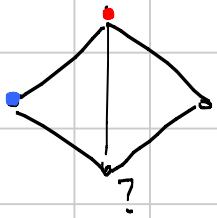
Un cammino / ciclo è euleriano se passa esattamente una volta da ogni arco.

Es: Quali grafi ammettono un cammino / ciclo euleriano?

Un grafo si dice bipartito se $V = A \cup B$,

con $\forall e \in E,\ \#(e \cap A) = \#(e \cap B) = 1$

Es:  è bipartito?



NO

Es: Un grafo è bipartito $\iff$ non ha cicli dispari.

IMO 2021-1. Sia $n \geq 100$. Abbiamo $n+1$ carte con su scritti i numeri da n a $2n$.

Mescoliamo il mazzo e facciamo due pile. Allora c'è una pila con due numeri la cui somma è un quadrato.

Dim: Prendiamo un grafo che ha come vertici i numeri da n a $2n$, e un arco fra a e b $\iff$ $a+b = \square$

G non è bipartito. $\Rightarrow \exists$ sempre un arco tra due vertici dello stesso colore per qualunque 2-colorazione

(cioè modo di dividere i vertici in due pile).

Ci basta trovare un ciclo dispari (per esempio un triangolo)

$a+b = \square$, $b+c = \square$, $a+c = \square$

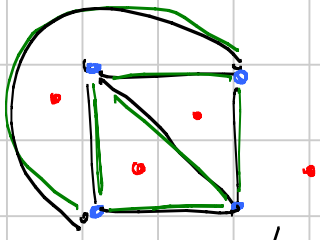
$a = 2m^2+1$, $b = 2m^2-4m$, $c = 2m^2+4m$

$a+b = (2m-1)^2$ $\quad b+c = (2m)^2$

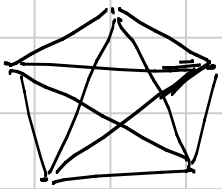
$a+c = (2m+1)^2$

Es: mostrare che un tale m esiste (se $n \geq 100$).

Def: Un grafo è planare se si può disegnare su un piano in modo che gli archi non si intersechino.



✓



NO

Se G è planare, allora $\#F + \#V = \#E + 2$

$4 + 4 = 6 + 2$

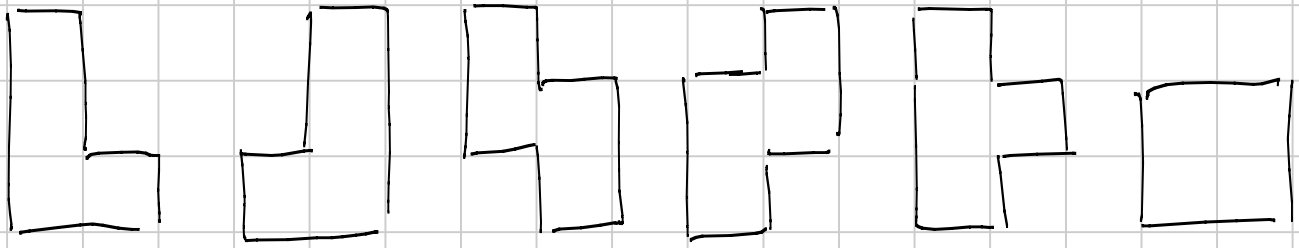
IMO 2020. 4: Su una montagna ci sono n^2 stazioni, (ad altezze tutte diverse)
e due compagnie possiedono ciascuna k funivie (che collegano due stazioni). Le funivie di ciascuna compagnia partono tutte ad altezze diverse e arrivano ad altezze diverse

Inoltre una funivia che parte più in alto arriva più in alto.

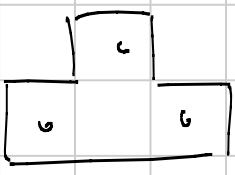
Qual è il minimo k per cui esistono necessariamente due stazioni tali che si può andare dall'una all'altra usando solo funivie di ciascuna delle due compagnie?

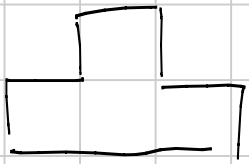
Hint: $k = n^2 - n + 1$.

Colorazioni.

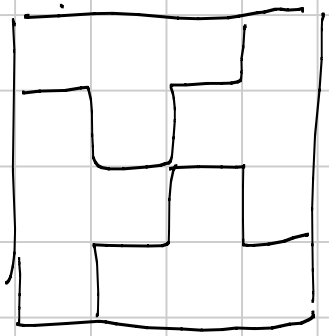


Avete i 7 pezzi del tetris. Riuscite a metterli in una scatola 7×4? NO, perché coloriamo a scacchiera, e ogni pezzo tranne copre due caselle per colore.



Quali quadrati $n \times n$ si tassellano con 

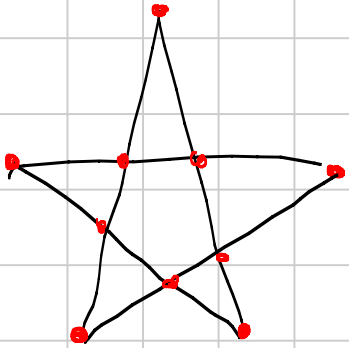
$4n \times 4n$ sì



Il numero di caselle deve essere multiplo di 8. (colorando a scacchiera)

Quindi $4|n$

(lasciamo stare i rettangoli...)



• lampadine.

Possiamo accendere/spegnere ogni diagonale.

Riusciamo a spegnerle tutte?

No. Il numero di lampadine "esterne" accese è invariante modulo 2.

---

n-agono ~~regolare~~ con una moneta su ogni vertice.

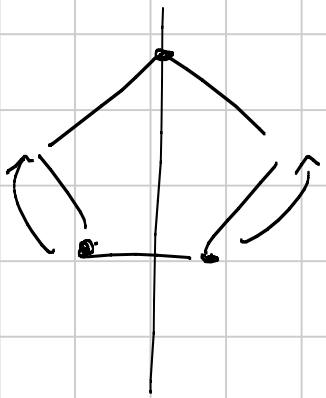
Possiamo scegliere due vertici (con delle monete sopra) e spostarne una in senso orario e una in senso

antiorario. Per quali n possiamo metterle tutte sullo stesso vertice?

Se n è pari, possiamo colorare i vertici in modo alternato, e su ogni colore il numero di monete è invariante modulo 2.

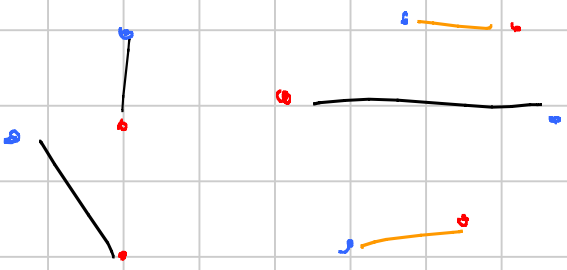
Sicuramente non riusciamo se $n = 2(2k+1)$

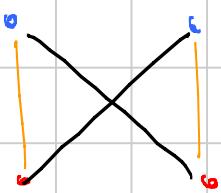
Se n dispari, si riesce. Scegliamo un vertice e muoviamo le monete verso di lui simmetricamente rispetto all'asse del lato opposto.



Ci persiamo?

Principio dell'estremale.





a 3 a 3 non allineati

$2n$ punti nel piano, n blu, n rossi.

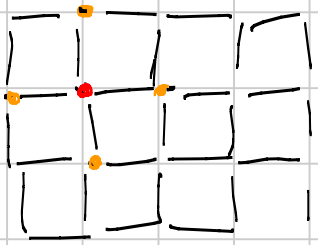
È possibile unirli con n segmenti (fra blu e rossi) che non si intersecano?

Vogliamo un oggetto con una proprietà P. Cerchiamo una quantità Q associata ad ogni oggetto in modo che se un oggetto minimizza / massimizza Q, allora soddisfa P.

Q = somma delle lunghezze dei segmenti.

Es: $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ su ogni punto scriviamo un numero <u>naturale</u> in modo che ciascun punto sia la media dei suoi vicini.

Dimostrare che tutti i numeri sono uguali.



Prendiamo un punto di minimo. Deve essere uguale ai suoi vicini. Ma allora anche loro realizzano il minimo, e quindi anche i loro vicini, eccetera...

Es. 9 ~ Alice deve salire su un aereo, ma ha perso la carta d'imbarco, e non si ricorda il suo posto.

Allora (sale per prima) e si siede su un posto a caso.

Gli altri passeggeri provano a sedersi al loro posto, ma se è occupato si siedono a caso.

Qual è la probabilità che l'ultimo passeggero si sieda al suo posto?

Sol: $\frac{1}{2}$. Perché? O si siede al suo posto o no.
(scherziamo)

Hint: il volo è Lufthansa, e quindi i passeggeri sono tedeschi, e quindi fanno spostare Alice.

Quando l'ultimo sale, Alice o è al proprio posto, o in quello dell'ultimo passeggero. Ma per simmetria, è $\frac{1}{2}$.

Tornano (col loro volo Lufthansa) Alberto e Barbara.

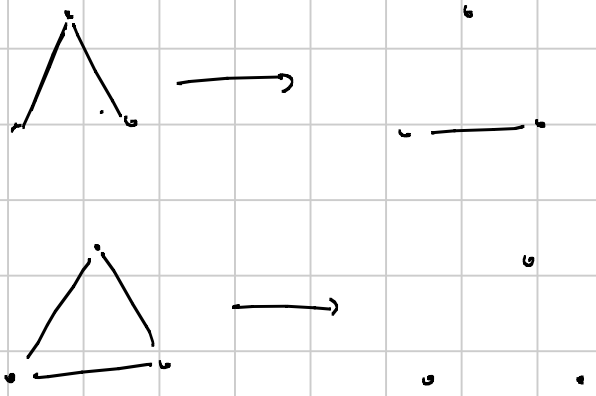
Alberto sceglie un numero n fra 1 e 200. Barbara, a ogni mossa, sceglie $S \subseteq [200]$, e paga 1€ se $n \notin S$, e 2€ se $n \in S$.

Quanti soldi servono a Barbara per essere sicura di indovinare n?

Risposta: 12 €

Vecchio SNS (Zoo ish)

G un grafo. Alberto e Barbara giocano sul grafo



Perde chi non può più muovere.

1. Dimostrare che il gioco finisce

2. Dimostrare che il vincitore NON dipende da come giocano.

3. Determinare chi vince a seconda della configurazione iniziale

1. Il numero di archi diminuisce sempre strettamente.

2. La parità del numero di archi cambia a ogni mossa.
   La parità del grado di ogni vertice rimane uguale.

Il gioco finisce quando ogni vertice ha grado 0 o 1.

Sappiamo dall'inizio quali avranno grado 0 e quali grado 1.

$\Rightarrow$ sappiamo la parità del numero di archi alla fine.

$\Rightarrow$ sappiamo la parità del numero di mosse fatte

$\Rightarrow$ sappiamo chi vince.

IMO 2022. 1

Stringa lunga $2n$ con n A e n B. Scegliamo $k \leq 2n$

prendiamo la stringa massima (tutta uguale) che contiene la k-esima moneta e la spostiamo all'inizio.

Per quali (k, n), a prescindere dall'ordine iniziale, arriviamo a $AA\cdots ABB\cdots B$?

Sol:

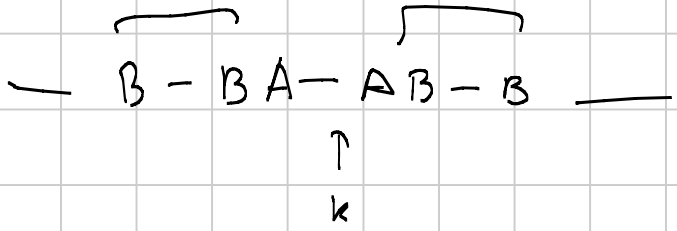
Se $k < n$, $\overbrace{AA\cdots ABB\cdots BA}^{n-1}$ rimane fissa ✗

(Assumiamo n pari per semplicità)

Se $k > \lceil \frac{3n}{2} \rceil$, $\overbrace{A\cdots A}^{\lfloor n/2 \rfloor}\overbrace{B\cdots B}^{\lceil n/2 \rceil}\overbrace{A\cdots A}^{\lceil n/2 \rceil}\overbrace{B\cdots B}^{\lfloor n/2 \rfloor}$ ✗

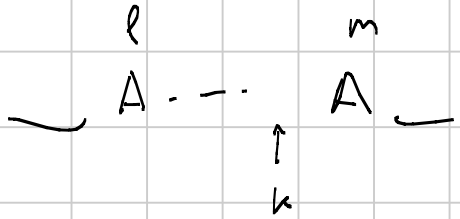
Vogliamo dimostrare che se $n \le k \le \lceil \frac{3n}{2} \rceil$, allora

si arriva a $A - AB - B$.



Se siamo in un caso del genere, dopo una mossa, due catene si uniscono, e quindi il numero diminuisce. ✓

Diciamo che la catena che contiene la k-esima moneta va da l a m compresi.



Se $k \in [1, l] \Rightarrow k = l$, ma $k \ge n$, e $l < n+1$ (perché altrimenti non è la prima catena) $\Rightarrow k = n$ ✓

Se $k \in (l, m]$ $n < 2n$ allora non è l'ultima catena, e quindi muovendola ne uniamo 2, e quindi il numero diminuisce.

Se $k \in [m, 2n]$, vogliamo dimostrare che ci sono

sole 2 o 3 catene.

Per assurdo, ce sono almeno 4. Allora, per pigeonhole, ce n'è una più corta di $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1 \leq 2n - k + 1$

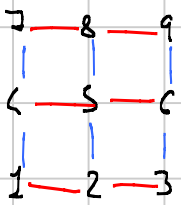
$\Rightarrow$ Se questa catena è l'ultima, k non ne fa parte.

$\Rightarrow$ quando questo succede, stiamo unendo due catene

□

Funivie:

$n = 3$



ogni compagnia ha $n^2 - n$ funivie

$n^2 - n + 1$ riusciamo

Con $n^2 - n + 1$ funivie $\Rightarrow$ abbiamo $n-1$ componenti connesse

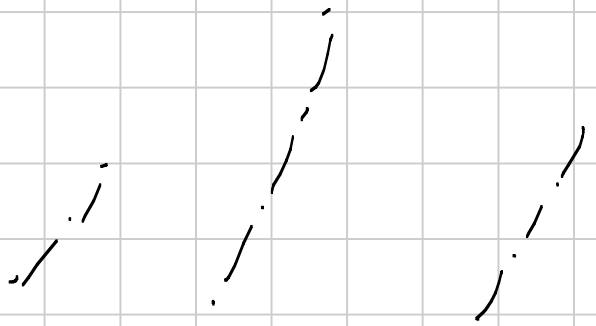
Sia per A che per B.

Ma per pigeonhole, se ho $n-1$ componenti connesse per A, ce n'è almeno una con $n+1$ vertici

$\Rightarrow$ siccome ho $n-1$ componenti connesse per B

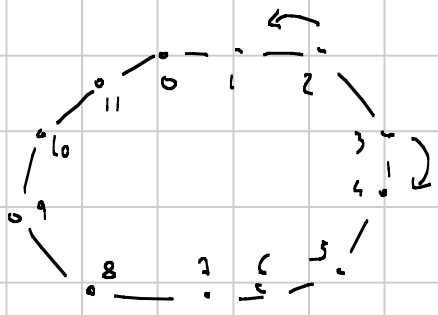
allora di questi $n+1$ vertici, almeno 2 stanno nella stessa componente connessa.

$\Rightarrow$ ho 2 vertici nella stessa componente sia di A che di B $\square$



---

n-agono



$\sum_v$ v. raggiunte su v

$\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$

$n \cdot k$

è invariante modulo n

Se n è pari, $\frac{n(n-1)}{2}$ non è multiplo di n

Se n è dispari, abbiamo visto che si può.

Alberto e Barbara

x $\quad$ $1-x$ $\quad$ $x^2 = (1-x)$

1€ $\quad$ 2€

$x^2 - x + 1$

$\frac{1}{\varphi}$

$a_n = \max \{ k \mid$ con n € riesco a indovinare un numero da un insieme grande $k \}$

$a_0 = 1 \quad a_1 = 1 \quad a_2 = 2$

$a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$

$F_{12} \geq 200$

* $S = m \quad A \cup B$

* $A > a_n \Rightarrow$ mi servono almeno $n+1$ €
* $B > a_{n-1} = 1$ " n €

$x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_n \quad \leftarrow$

$x > y \longrightarrow \begin{matrix} (y+1, x) \\ (x-1, x) \end{matrix}$

$$\ldots > x_i > x_{i+1} >$$

$x_1 \ldots x_n$ è minore di $y_1 \ldots y_n$

Se: $x_n > y_n$ oppure $x_n = y_n$ e $x_{n-1} > y_{n-1}, \ldots$

$\max_{i}^{m} \{x_i\}$ è costante

Sono stringhe lunghe n di interi positivi fra 0 e m

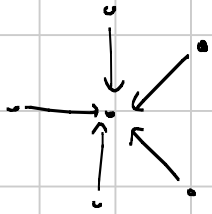
sono un numero finito e decrescono strettamente.

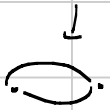
Scegliamo una città c fra quelle che raggiungono il massimo numero di città.

Supponiamo per assurdo che $\exists$ c' che non si può raggiungere da c. Allora da c' posso andare a c

$\Rightarrow$ da c' posso andare in tutte le città che posso raggiungere da c. $\Rightarrow$ c' raggiunge più città di c, assurdo.

L'altro verso è uguale, girando tutte le frecce.

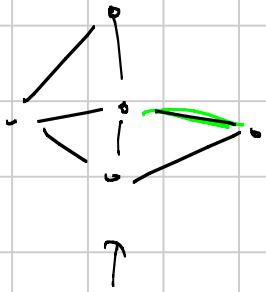




"Metodo di deletion-contraction"

Es: Diciamo che una colorazione di un grafo con k colori è "buona" se vertici adiacenti hanno colori diversi.

Allora, fissato G, il numero di k-colorazioni buone è un polinomio in k



Colorazione buona di questo

$$\#\text{ col. di questo} = \#\text{ col di questo} - \#\text{ col. di questo}$$