

A1 - Advanced

Titolo nota

1) (Regola di Cartesio)

Dimostrare che il numero di radici reali positive di un polinomio $P \in \mathbb{R}[x]$ è minore o uguale al numero di cambi di segno tra coefficienti contigui (ignorando i coefficienti nulli). Mostrare inoltre che i 2 numeri hanno stessa parità.

2) Siano $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n \in \mathbb{Z}$ t.c.:

$$(i) \quad x_i \neq x_j \quad \forall i \neq j$$

$$(ii) \quad \forall m \in \mathbb{Z} \quad \exists Q_m \in \mathbb{Z}[x] \text{ tale che}$$

$$Q_m(x_i) \equiv y_i \pmod{m} \quad \forall i = 1, \dots, n$$

Dimostrare che $\exists P \in \mathbb{Z}[x]$ tale che $P(x_i) = y_i$
per $i = 1, \dots, n$

1) Regole di Cartesio

Induzione su # radici reali positive

PASSO BASE: Banale

Passo induttivo: Considerare $Q(x) = \sum_{i=0}^d a_i x^i$

$$\text{e } P(x) = (x - \lambda) Q(x) \quad \lambda \in \mathbb{R}^+$$

$$P(x) = \sum_{j=0}^{d+1} b_j x^j$$

$$b_j = a_{j-1} - \lambda a_j \quad j \neq 0, d+1$$

$$b_{d+1} = a_d \quad b_0 = -\lambda a_0$$

• Se a_j, a_{j-1} hanno stesso segno b_j non so che segno ha

• Se a_j, a_{j-1} sono discordi b_j ha segno di a_{j-1}

Le $a_{\sigma_1}, a_{\sigma_2}, \dots, a_{\sigma_r}$ sono i punti in cui cambia il segno
allora $b_{\sigma_1+1}, b_{\sigma_2+1}, \dots, b_{\sigma_r+1}$

a_{0r} ha stesso segno di a_0 , però $b_0 = -\lambda a_0$ ha segno opposto

$\Rightarrow b_{0r+1}$ e b_0 hanno segni diversi

$\Rightarrow$ ho almeno un cambiamento di segno in più

Esercizio: Rendere più civile questo sketch.

Per la parte si fa di nuovo induzione
nel passo induttivo

$$\begin{array}{cc} a_d, a_0 \\ b_{d+1}, b_0 \\ \parallel \quad \parallel \\ a_d, -\lambda a_0 \end{array}$$

~~$a_0 a_d$~~ e $b_0 b_{d+1}$ hanno diverso segno

$\Rightarrow$ parità del numero di cambi è diversa.

Per il passo base serve:

NO RADICI POS. $\Rightarrow$ PARI CAMBI DI SEGNO

Contronominale

DISPARI CAMBI DI SEGNO $\Rightarrow$ RADICI POSITIVE

Per esercizio: Pensarci Bene

2) RMM shortlist 2021 / A2

Un po' di Algebra lineare...

M matrice $n \times n$, $\vec{y}$ vettore n -dimensionale
sistema $M\vec{x} = \vec{y}$. Vale:

M invertibile $\Leftrightarrow \det M \neq 0 \Leftrightarrow$ Soluzioni uniche
al sistema

$\Downarrow$
E' sempre
soluzione al
sistema

... Applicato all'interpolazione polinomiale

$x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$, distinti e $y_1, \dots, y_n \in \mathbb{R}$
Sia $P(x) = \sum_{i=0}^d a_i x^i$ $n-1 = d$

$$P(x) = y \quad \begin{pmatrix} 1 & x & x^2 & \dots & x^d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_d \end{pmatrix} = y$$

$$P(x_i) = y_i \text{ per } i = 1, \dots, n$$

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^d \\ 1 & x_2 & \dots & x_2^d \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

"
"
 M
(Vandermonde)

"
"
 $\vec{y}$

Interpolare vuol dire risolvere il sistema $M\vec{a} = \vec{y}$

Se le sol non fossero uniche allora $\exists \vec{v}$ tale che $\vec{v} \neq (0 \dots 0)$ e $M\vec{v} = \vec{0}$

Principio di identità dei polinomi $\rightarrow$ UNICITÀ DELLE SOLUZIONI

CONCLUSIONE $\det M \neq 0 \Leftrightarrow x_i \neq x_j \forall i \neq j$

$$\det M = \prod_{i \neq j} (x_i - x_j)$$

SCRIVERE le SOLUZIONI DEL SISTEMA

Quando M è invertibile, M^{-1} l'inversa (tale che $MM^{-1} = I$)
 $M\vec{x} = \vec{y}$ ha soluzione $\vec{x} = M^{-1}\vec{y}$.

$$M^{-1} = \frac{1}{\det M} \cdot M^*$$

matrice
aggiunta

(si ottiene da M con solo
addizioni, sot., molt. dei coefficienti)

M ha coefficienti interi $\Rightarrow M^*$ ha coeff interi

Possiamo scrivere quindi la soluzione del sistema $M\vec{a} = \vec{y}$
come $\vec{a} = \frac{1}{\det M} \cdot M^* \cdot \vec{y}$

$$Q_m(x_i) = y_i + c_m$$

$$c_i \in \mathbb{Z}$$

MANCA WLOG Q

$$\deg Q_m = m-1$$

$$R_m(x_i) = c_m$$

$$\boxed{\frac{P(x_i)}{1}}$$

$$Q_m - R_m(x_i) = y_i + c_m - c_m = y_i$$

$$\vec{b} = \frac{m}{\det M} \cdot M^* \vec{c}$$

Se quindi $\frac{m}{\det M} \in \mathbb{Z}$ abbiamo finito.

In generale $\exists$ P tale che $P(x_i) = y_i$
 per $i = 1, \dots, n$
 Si può ~~annunciare~~ ^{ottenere} $\deg P \leq n-1$

$$(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n) \quad \text{grado } n$$

3) RMM shortlist 2023 | A1

Funzionano, $\rightarrow$ Cost ~~non sono~~ tutte
 $\rightarrow ax + b$ con $b \in \mathbb{Q}$

Oss Se $P(r) \in \mathbb{Q}$ allora posto $\tilde{P}(x) = P(rx)$
 si ha $\tilde{P}(1) \in \mathbb{Q}$ e anche $\tilde{P}(2), \tilde{P}(3), \dots$
 e la condizione si preserva ($\tilde{P}$ spezzato)

Possiamo assumere wlog $P(n) \in \mathbb{Q} \quad \forall n \in \mathbb{N}$
~~per~~ $\mathbb{Q}$ meno di pensare a $\tilde{P}$

Idea Interpoliamo $(1, P(1)), (2, P(2)), \dots, (d+1, P(d+1))$
 dove $d = \deg P$

facendo interpolazione di Lagrange

Il sistema è in $\mathbb{Q} \rightarrow$ soluzione è in $\mathbb{Q}$

$\Rightarrow P$ ha coefficienti in $\mathbb{Q}$

Oss 2, Se $r \in \mathbb{Z}$ è tale che $P(r) \in \mathbb{Q}$
 Allora $P(nr+m) \in \mathbb{Q} \quad \forall n, m \in \mathbb{N}$

Idea 2 Sia $\mathcal{Q}(m, n) = P(nr+m)$

fissato un valore m , il polinomio deve avere coeff razionali visto in m .

Me i coefficienti del poli in m sono polinomi in n che sono razionali: $\forall m \in \mathbb{N} \Rightarrow$ sono a coeff razionali.

$\Rightarrow \mathcal{Q}(m, n)$ ha coeff razionali.

Me adesso, guardando il ~~termine~~ coefficiente di

$\underbrace{m^{d-1} \cdot n}_{ad(nr+m)^d}$ Esso deve venire da $\underline{ad \cdot d \cdot r} \in \mathbb{Q}$
 $\Rightarrow r \in \mathbb{Q}$

DIMOSTRAZIONE

Se $P(r) \in \mathbb{Q}$ allora $r \in \mathbb{Q}$

Ora basta trovare un razionale q tale che

$P(x) = q$ abbia soluzioni reali e tale che $v_p(q) = -1$ per p primo che non compare nei coefficienti di P .

Infatti se $r \in \mathbb{Q}$ poniamo $P(r) = q$

Allora avremmo 2 casi:

• $v_p(r) \geq 0$ ma allora $v_p(P(r)) \geq 0$
ma $v_p(q) < 0$ ASSURDO

• $v_p(r) < 0$

le valutazioni $v_p(P(r)) = v_p(ad \cdot r^d) = d \cdot v_p(r) < -1$
per $d \geq 2$

NON ESISTE P con $\deg \geq 2$ tale che
 $P^{-1}(\mathbb{Q}) \subseteq \mathbb{Q}$

ASSURDUM quindi $\deg \leq 1$

ESERCIZIO: Escludere $ax+b$ con $b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

4) ELMO shortlist A5/2024

Se B volesse scoprire proprio i coeff di $\mathbb{Q}$, quante domande servirebbero?

$$\text{Probabilmente } \binom{d+2}{2} = 1 + d + \dots + (d+1)$$

$$P(x,y) = z \iff \begin{pmatrix} 1 & x & y & x^2 & xy & y^2 & x^3 & \dots & y^d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{00} \\ a_{10} \\ a_{01} \\ a_{20} \\ a_{11} \\ \vdots \\ a_{dd} \end{pmatrix} = z$$

(a_{ij} coeff di $x^i y^j$)

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 & y_1 & x_1^2 & \dots \\ 1 & x_2 & \dots & & \\ \vdots & & & & \\ 1 & x_n & \dots & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{00} \\ a_{10} \\ a_{01} \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$$

$\parallel$ $\parallel$ $\parallel$
 (M) $\vec{a}$ $\vec{z}$

→ Affinchè sia quadrata devo avere $n = \binom{d+2}{2}$

$$= P(x_i, y_i) = z_i$$

PROBLEMA $\det M$ fa schifo

Quindi NON sappiamo descrivere le $2n$ -uple x_i, y_i
in cui $\det M \neq 0$

NON NULLO

$\det M$ è un polinomio in $x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n$
 E si interpola quando $\det M(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n) \neq 0$

Back to Problem

→ Abbiamo anche le condizioni $\begin{cases} P(x_i, y_i) \neq 0 \\ \det M \neq 0 \end{cases}$

Se riusciamo a trovare x_i, y_i con queste proprietà
 allora potremmo sempre stabilire Q in $\binom{d+2}{2}$ domande

$$\text{Sic } R(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n) = \prod_{i=1}^m P(x_i, y_i) \cdot \det M(x_1, \dots, y_n)$$

Ci basta trovare $(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^{2m}$ che
 non annulla R

○

Or dimostriamo che senza $\binom{d+2}{2}$ domande
 facciamo finta che B abbia fatto $k < \binom{d+2}{2}$
 domande e abbia determinato se $P|Q$.
 $(x_1, y_1), \dots, (x_k, y_k)$

Allora i polinomi che può aver scelto A sono
 tutti e soli quelli che risolvono il sistema
 lineare

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 & y_1 & \dots & y_1^d \\ 1 & x_2 & y_2 & \dots & y_2^d \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_k & y_k & \dots & y_k^d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{00} \\ a_{10} \\ \vdots \\ a_{0d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 \\ 1 \\ \vdots \\ z_k \end{pmatrix}$$

$\begin{matrix} \parallel \\ M \end{matrix} \qquad \begin{matrix} \parallel \\ \vec{a} \end{matrix} \qquad \begin{matrix} \parallel \\ \vec{z} \end{matrix}$

$$k < \binom{d+2}{2} \Rightarrow M \text{ NON È QUADRATA}$$

$$M = \begin{bmatrix} & \\ & \\ & \\ & \end{bmatrix}_k \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix} \left\{ \binom{d+2}{2} \right\}$$

$$\vec{z} = \begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix}_k$$

In questi casi $\ker M$ (i vettori $\vec{v}$ tali che $M\vec{v} = 0$)
 Contiene vettori non nulli

tradotto per i polinomi

$\exists R(x,y)$ tale che $R(x_i, y_i) = 0 \quad \forall i = 1, \dots, k$

$\forall R$ con questa proprietà B non sa distinguere
 fra Q e $Q+R$

Quindi assumendo che B sappia se $Q \equiv 0 (P)$
 Allora si deve avere $R \equiv 0 (P)$

$$\Rightarrow R(x,y) = P(x,y) S(x,y)$$

Ma abbiamo $P(x_i, y_i) \neq 0 \quad \forall i$ e $R(x_i, y_i) = 0 \quad \forall i$

$$\Rightarrow \underline{S(x_i, y_i) = 0 \quad \forall i}$$

Questa condizione è la condizione di essere nel
 kernel, e quindi B non sa distinguere tra
 $Q, Q+P \Rightarrow P|S$ e ripeto il giochino

$\Rightarrow B$ NON PUÒ AVERE CAPITO SE Q È MULTIPLO DI P

Quindi servono $\binom{d+2}{2}$ domande 