

funzioni generatrici

$$a_n \quad a_0, a_1, \dots$$

$$\frac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots}{\uparrow}$$

$$\sum x^n = \frac{1}{1-x}$$

$$\left(\sum a_n x^n\right) + \left(\sum b_n x^n\right) = \sum (a_n + b_n) x^n$$

$$\left(\sum a_n x^n\right) \left(\sum b_n x^n\right) = \sum \left(\sum_{i=0}^n a_i b_{n-i}\right) x^n$$

finite operazioni:

$$\left(\sum a_n x^n\right) \left(\sum b_n x^n\right) = 1$$

$$1 + x + x^2 + x^3 + \dots$$

$$c_0 = 1, \quad c_1 = c_2 = \dots = 0$$

$$a_0 b_0 = 1 \quad a_0 b_1 + b_0 a_1 = 0$$

$$b_0 = 1$$

$$b_1 = -1$$

$$a_1 b_2 + a_2 b_1 + a_2 b_0 = 0 \quad b_2 = 0$$

$$(1 + x + x^2 + x^3 + \dots) (1 - x) = 1$$

$$\frac{1}{1-x} =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \rightarrow \sum a_n$$

espansione di Taylor

$$f(x)$$

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \dots$$

$$\frac{1}{1-x}$$

$$1 + x + x^2 + \dots$$

$$\frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

$$f'(0) = -\frac{1}{(1-x)^2}(-1) = 1$$

$$f^{(n)}(0) = n!$$

$$-\frac{2}{(1-x)^3}(-1) = 2$$

→ se ho $f(x) = \sum a_n x^n$, $g(x) = \sum b_n x^n$

$f(g(x))$ ha un senso?

$$\sum a_n x^n = f(x)$$

$$a_n x^n \mapsto n a_n x^{n-1}$$

$$\sum n a_n x^{n-1} = f'(x)$$

$$\begin{array}{ccc} f(x) & \rightsquigarrow & x f'(x) \\ \downarrow & & \downarrow \\ (a_n) & & (n a_n) \end{array}$$

$$\sum n x^n = x \cdot \frac{d}{dx} \left(\sum x^n \right) = x \cdot \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{1-x} \right) = \frac{x}{(1-x)^2}$$

→ questa cosa ci permette di trovare formule per $\sum_{n=1}^{\infty} n x^n$

cose due sono funzioni generatrici in senso (strettamente) combinatorio

$$\partial_i \quad a_i = \binom{n}{i} \quad \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} x^i = (1+x)^n$$

$$(1+x)^n \quad [x^i] (1+x)^n = \binom{n}{i}$$

① Voglio contare il modo di scrivere n come somma di $a_1, \dots, a_k$, con ordine, $\left(\binom{n}{k}\right)$
 cerco un modo di scrivere questa cosa "con serie"
 cioè voglio scrivere $\sum \left(\binom{n}{k}\right) x^n$.

$$(1+x+x^2+\dots)(1+x+x^2+\dots) \dots (1+x+x^2+\dots) \quad k \text{ volte}$$

$$\sum a_n x^n$$

a_n numero di modi di scrivere n come somma di
 $(a_1, \dots, a_k)$ non negativi

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)^k = \sum a_n x^n \quad a_n$$

Fibonacci

$$F_0 = 0 \quad F_1 = 1 \quad [F_{n+2} = F_{n+1} + F_n]$$

$$F(x) = \sum F_n x^n \quad \leadsto \text{trovare una formula per } F_n$$

$$\left[\sum F_{n+2} x^n = \sum F_{n+1} x^n + \sum F_n x^n \right] *$$

$$F(x) = x + \underbrace{F_2 x^2}_{x^2} + \underbrace{F_3 x^3}_{2x^2} + \dots$$

$$\sum F_{n+1} x^n$$

$$F(x) = \sum F_n x^n$$

$$\frac{(\sum F_n x^n) - F_0}{x} = \frac{F_1 x + F_2 x^2 + \dots}{x} = F_1 + F_2 x + \dots = \sum F_{n+1} x^n$$

$$\sum F_{n+2} x^n = \frac{F(x) - F_0 - F_1 x}{x^2}$$

$$* \rightarrow \frac{F(x) - F_0 - F_1 x}{x^2} = \frac{F(x) - F_1}{x} + F(x)$$

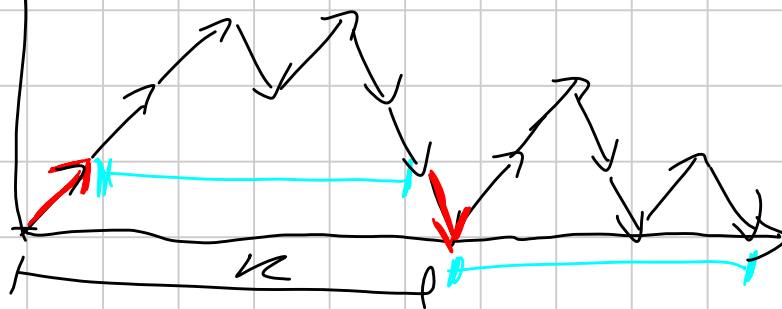
$$\frac{F(x) - x}{x^2} = \frac{F(x)}{x} + F(x) \quad F(x)(x^2 + x) = F(x) - x$$

$$F(x) = \frac{x}{1-x-x^2}$$

$$\left(\frac{\alpha}{x-\alpha} = \frac{-\alpha}{\alpha-x} = -\frac{\alpha}{\alpha} \frac{1}{1-\frac{x}{\alpha}} = -\frac{\alpha}{\alpha} \sum \left(\frac{x}{\alpha} \right)^i \right)$$

$$\alpha, \beta : \frac{q(x)}{(x-\alpha)(x-\beta)} = \frac{q_1(x)}{x-\alpha} + \frac{q_2(x)}{x-\beta} \quad \rightarrow \text{Partial}$$

numeri L catalan e f.f.



$n=7$

$C_n = \# \text{ percorsi } \text{lunghezza } n$

percorsi di Dyck
 in n mosse
 n volte $\nearrow$
 n volte $\searrow$
 da $(0,0)$ a $(2n,0)$
 senza scendere
 sotto 0

$$C_n = \sum_{k=1}^n C_{k-1} C_{n-k}$$

$$C(x) = \sum C_n x^n$$

tipo C^2 ha coeff diversi perché $[x^n]C^2 = \sum_k C_k C_{n-k}$
 ma $[x^{n-1}]C^2 = \sum_{i=0}^{n-1} C_i C_{n-1-i}$

$$1 + x C(x)^2 = C(x)$$

$$x C(x)^2 - C(x) + 1 = 0$$

$$C(x) = \frac{1 \pm \sqrt{1-4x}}{2x}$$

$$C(0) = C_0 = 1$$

$$C(x) = \frac{1 - \sqrt{1-4x}}{2x}$$

$$(1-4x)^{1/2}$$

$$\binom{1/2}{k} = \frac{1/2 (1/2 - 1) (\dots) (1/2 - k + 1)}{k!}$$

$$C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$$

① sia $\{n \atop k\}$ il numero di partizioni di $\{1, \dots, n\}$ in k parti

$$\{n \atop k\} = \{n-1 \atop k-1\} + k \{n-1 \atop k\}$$

$$A_k(x) = \sum_n \{n \atop k\} x^n$$

trovare $A_k(x)$

bonus: $\{n \atop k\} = \frac{1}{k!} \sum_{r=0}^k (-1)^{k-r} \binom{k}{r} r^n$

② mostrare che il numero di partizioni di n $(a_1, \dots, a_k)$ $a_1 \geq \dots \geq a_k$, $\sum a_i = n$

part. con addendi distinti

part. con addendi d'uguale

$$e^x = \sum_n \frac{x^n}{n!}$$

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \dots$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots \quad (\text{perché } \frac{d}{dx} \arctan x = \frac{1}{1+x^2})$$

IMO 2008.5 K, n interi positivi $K \geq n$, $K-n$ pari
 ho n lampadine speinte messe: cambiare stato
 A, B.

A: fa K mosse e vuole avere le prime n accese e le ultime n speinte

B: fa K mosse solo sulle prime n e vuole avere tutte accese.

A $\rightarrow$ ha N modi per farlo trova N/M
 B $\rightarrow$ ha M modi trova N/M

soluzioni: ① $A_k(x) = \frac{x}{1-kx} A_{k-1}(x)$

bonus: combi $\rightarrow A_k(x) = \frac{x^k}{(1-x) \cdot (1-kx)}$

② $\prod_{i \text{ dispar.}} \frac{1}{1-x^i} = \prod_i (1+x^i)$

③ inizio: K mosse che muovono tutto

$n+i \mapsto i$

$(a_1, \dots, a_n, \dots, a_{2n})$

$\downarrow$

$(a_1 + a_{n+1}, \dots, a_n + a_{2n}, \dots, a)$

$(a_1, \dots, a_n, a_{n+1}, \dots, a_{2n})$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{N = \sum_{(\cdot, \cdot) \text{ belle}} \# \text{ di modi di fare la moltiplicazione}} \underbrace{\hspace{10em}}_{\text{cosa bella}}$

$N = \sum_{(\text{cosa bella})} \frac{K!}{\prod a_i!}$

$\downarrow K$

$(a_1 a_2 \dots a_m)$

$\sum \frac{x^{2n+1}}{(2n)!} = g(x)$

$\sum \frac{x^{2n}}{(2n)!} = (1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \dots) = f(x)$

$K! \left(\sum_{(\text{cosa bella})} \frac{1}{\prod a_i!} \right) \rightarrow K! \left(\underbrace{[x^K] f(x) \dots f(x)}_{n \text{ volte}} \underbrace{g(x) \dots g(x)}_{n \text{ volte}} \right)$

$f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, $g(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

$\cosh(x)$, $\sinh(x)$

$$M: \kappa! [x^\kappa] f^n$$

$$2\sinh(x)\cosh(x) = \sinh(2x)$$

$$\begin{aligned} N/M &= \frac{\kappa! [x^\kappa] f^n}{\kappa! [x^\kappa] f^n} = \frac{[x^\kappa] \left(\frac{\sinh(2x)}{2}\right)^n}{[x^\kappa] (\sinh x)^n} = \\ &= \frac{1}{2^n} \frac{[x^\kappa] (\sinh(2x))^n}{[x^\kappa] (\sinh x)^n} = \frac{2^\kappa}{2^n} = 2^{\kappa-n} \end{aligned}$$

IMOSL 2006. A2

$$a_0, a_1, a_2, \dots \quad a_0 = -1$$

$$\sum_{\kappa} \frac{a_{n-\kappa}}{\kappa+1} = 0 \quad \text{per } n \geq 1$$

Mostrare $a_n > 0$ per $n > 0$

soluzione semplice

$$\text{soluzione f.f.: } A(x) = \sum_n a_n x^n$$

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \dots$$

ci fa pensare a qualcosa tipo $\frac{1}{\ln(1-x)}$

$$A(x) \cdot \ln(1-x) = x$$

$$\ln(1-x) = \frac{x}{A}$$

$$-\frac{1}{1-x} = \frac{1}{A} - \frac{x}{A^2} A'$$

$$\frac{x A'}{A} - \frac{A}{1-x} = 1$$

$$x(1-x)A' = A^2 + A(1-x)$$

il problema: $a_0 \neq 0$

$$B = 1 + A \quad \ln \quad b_0 = 0 \\ B' = A'$$

$$x(1-x)B' = (B-1)^2 + (B-1)(1-x) = B^2 - 2B + 1 + B - 1 - xB + x$$

$$= B^2 - B(x+1) + x$$

$$x(1-x)B' = B^2 - B(x+1) + x$$

$$x B' - x^2 B' = B^2 - B(x+1) + x$$

$$xB' - x^2 B' = B^2 - B(1+x) + x \quad n \geq 2$$

$$[x^n] \quad nb_n - (n-1)b_{n-1} = \sum_i b_{n-i}b_i - b_n - b_{n-1}$$

$$(n+1)b_n = \sum_{i=1}^{n-1} b_{n-i}b_i + (n-2)b_{n-1}$$



IMO 1985.6 contare $S \subset \{1, \dots, 2p\}$ con $|S|=p$
e somme degli el. div per p

IMO SL 2014. N 6 $a_1 < \dots < a_n$ coprimi, $a_n \geq n+2$, a_n primo

$I = [0, a_1 a_2 \dots a_n]$, segno i punti con coordinate
divisibile per qualche $a_i \rightarrow$ ho dei segmenti

H : a_n divide le somme dei quadrati
delle lunghezze dei segmenti

a 2 volte non voglio guardare $\sum a_n x^n$
 mi conviene $\sum \frac{a_n}{n!} x^n$

caso 2: $b(n)$, # partizioni di n

8 (1, 3, 1) (1, 2, 2)

$$b(n+1) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{n-k} b(k) \quad [x^n] e^x B(x) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \frac{1}{(n-k)!} b(n-k)$$

$$B(x) = \sum \frac{b(n)}{n!} x^n \quad e^x \quad \sum_{k=0}^n \frac{\binom{n}{n-k} b(k)}{n!}$$

$$b(n+1) = n! [x^n] e^x B(x)$$

$$b(n+1) = ([x^{n+1}] B(x)) (n+1)!$$

$$B(x) = \sum x^n \frac{b(n)}{n!} \quad ?(x) = \sum \frac{b(n+1)}{n!} x^n = \sum b(n+1) \frac{x^n}{n!}$$

$$B(x) = \sum \frac{b(n+1)}{(n+1)!} x^{n+1} \quad B(x)$$

$$[x^n] B'(x) = [x^n] e^x B(x) \rightarrow B' = e^x B \quad B(0) = 1 \Leftrightarrow b(0) = 1$$

$$e^{f(x)} = B \quad f'(x) e^{f(x)}$$

$$\cancel{e^{f(x)}} f'(x) = e^x \cancel{e^{f(x)}} \quad f'(x) = e^x \quad f(x) = e^x + c$$

$$B = e^{e^x + c} \Rightarrow B(x) = e^{e^x - 1}$$

$D_n = \# \text{ diantazioni in } n \text{ el.}$

trovare $D(x) = \sum_n \frac{D_n}{n!} x^n$

$$D_n = n! \left(\sum_i \frac{(e-1)^i}{i!} \right) \rightsquigarrow D_n = \left[\frac{n!}{e} \right]$$

$\hookrightarrow \sim 1/e$

$$e^x = \sum_n \frac{x^n}{n!}$$

idea: $\sum_{i=0}^{j-1} \binom{j-1}{i}^K = \begin{cases} j & \text{se } K \equiv 0 \pmod{j} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

$$\sum_{i=1}^{p-1} i^K \stackrel{CP}{=} \begin{cases} -1 & \text{se } K \equiv 0 \pmod{p-1} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

funzioni per da più variabili

$\hookrightarrow$ usi ogni variabile per contare qualcosa

hans. n classi con un numero dispari di persone mediocri, scarsi

1 p. per classe

(numero pari di mediocri)

(numero dispari di scarsi)

$\updownarrow$
(# classi con scarsi mediocri) è pari

$$S = \{1, \dots, n\} \quad A_1, \dots, A_m \subseteq S \text{ distinct}$$

$$|A_i \cap A_j| = \lambda \text{ for } i \neq j$$

$$\text{determine } m \leq n$$

← USA TST 2018.2, USAMO 2008.6