

S26 M-Advanced

Titolo nota

1) Dato un intero N , detto P l'insieme delle potenze perfette, vale
 $|P \cap \{1, \dots, N\}| \leq \sum_{k=1}^{\lfloor \sqrt[3]{N} \rfloor} N^{1/k} \leq \sqrt{N} + \sqrt[3]{N} \log_2 N \leq C\sqrt{N}$

Dimostriamo che esiste un tale insieme:

$$a_1 < a_2 < a_3 < \dots$$

- $a_1 = 2$
- Supponendo di avere $a_1, \dots, a_{n-1}$, sia S_{n-1} l'insieme di tutte le somme dei 2^{n-1} sottoinsiemi di $\{a_1, \dots, a_{n-1}\}$.

Dato $s \in S_{n-1}$, gli element. proibiti per $s \leq N$ sono $\leq C\sqrt{N+s}$

In totale gli element. proibiti $\leq N$ sono al più $2^{n-1} C\sqrt{N+s_0}$ dove $s_0 = \max S_{n-1}$

Per N sufficientemente grande vale

$$2^{n-1} C\sqrt{N+s_0} < N - a_{n-1} \\ \Rightarrow \text{possiamo scegliere } a_n \in \{a_{n-1} + 1, \dots, N\}$$

2) La risposta è $\binom{2025}{1012} + 1$

Definiamo $P_i(x)$ come quello tale che
 $P_i(2) = 2^{2025} + i$ $\forall i = 0, \dots, 2^{2025} - 1$

$$P_i(n) < P_j(n) \quad \text{per } i < j \quad \forall n > 0$$

$$P_0(n+1) > P_{2^{2025}-1}(n) \quad \forall n > 0$$

$$P_0(2) < P_1(2) < \dots < P_{2^{2025}-1}(2) < P_0(3) < \dots < P_{2^{2025}-1}(3) < P_0(4) < P_1(4) < \dots$$

Dividiamo quest. polinomi in ^{classi in} funzione del valore di $P_i(1)$

La classe più numerosa è quella per cui $s(1) = 1012$ o 1013 e ha $\binom{2025}{1012}$ elementi.

La strategia per Bob:

Chiede 1012 e 1013

- Entrambi no: tutti i restanti numeri ≤ 2025 e così sapere in classe si trova $P(x)$.
Ora tutte le altre classi hanno al più $\binom{2025}{1011}$ elementi, quindi con questo numero

di domande se trovare $P(x)$

$$\leadsto \leq \binom{2025}{1011} + 2025$$

- Uno dei due sì: con lo stesso ragionamento sappiamo che bastano $\binom{2025}{1012} - 1$ domande

Strategia di Alice:

Dice di no a tutti i numeri ≤ 2025 che non siano 1012 o 1013 e dice sì

- solo al secondo che gli viene chiesto.
 Per il resto dice no finché può
 Supponiamo che Bob abbia fatto $(2025)_{1012}$ domande
 • non ha chiesto due numeri ≤ 2025
 e in questo caso non ha trovata la classe giusta
 • ha chiesto due numeri ≤ 2025 e allora gli rimangono solo $(2025)_{1012} - 2$ domande che non sono sufficienti.

$$3) |A+B| \geq \min \{p, |A|+|B|-1\}$$

Induzione su $|A|$:

$|A|=1$ è ovvio

Consideriamo $|A| \geq 2$:

$A' = A \cap B$, $B' = A \cup B$ } facciamo funzionare quest'idea

Dimostriamo che $\exists x$ classe di resto t.c.

$\exists a_1, a_2 \in A$ $a_1 \in B+x$, $a_2 \notin B+x$:

se così non fosse avremmo che

$B = B + (a_2 - a_1)$. Allora B deve contenere

le classi di resto in quanto p è primo
 e quindi sommando $a_2 - a_1$ opportune volte
 è possibile ottenere ogni classe di resto

$C = B+x$ e definiamo $A' = A \cap C$, $B' = A \cup C$

- $0 < |A'| < |A|$
- $|A+B|' = |A| + |C| = |A'| + |C'|$
- $A' + B' \subseteq A + C$

$$\Rightarrow |A' + B'| \geq |A'| + |B'| - 1 \quad \text{per induzione}$$

$$\Rightarrow |A+B| \geq |A' + B'| \geq |A| + |B| - 1.$$

(Supponendo di avere la tesi per i primi.)

Per n composto:

$n = ab$, allora possiamo prendere a elementi dei $2ab - 1$ in modo che la somma sia divisibile per a . E ripeto questo ragionamento $2b - 1$ volte. Mi ritrovo con $S_1, \dots, S_{2b-1}^*$ e quindi usando il teorema con $n = b^{**}$ sappiamo che possiamo trovare b con somme divisibile per b .

* con $\sum_{x \in S_i} x = Q - C.$

** sui numer. $C_1, \dots, C_{2b-1}$

II caso $n = p$:

Caso 1: ci sono p elementi tutti congrui: è ovvio

Caso 2: altrimenti:

$$a_1 \leq \dots \leq a_{2p-1}$$

So che $a_i \neq a_{i+p-1}$ e quindi definisco

$$A_i = \{a_i, a_{i+p-1}\} \quad \text{che ha } |A_i| = 2.$$

Usando più volte il punto 1 trovo che

$$|A_1 + \dots + A_{p-1}| \geq \min(p, 2(p-1) - (p-2)) = p$$

$\Rightarrow$ contiene tutte le class. di resto.

Ora basta scegliere la classe di resto
di $-2q-1$.