

Risvolgimento: Trovare le equazioni baricentriche delle rette tangenti alla  $\Gamma$  circoscritte nei pt. medi degli archi minori  $AB, BC, CA$  per un triangolo qualunque

Sol:  $ABC \quad a^2yz + b^2xz + c^2xy = 0$   $\Gamma$  circ.

bisectrice da  $C = \{ [a:b:t], t \in \mathbb{RP}^1 \}$   
??

$$bx - ay = 0$$

$\Pi_C =$  pt. medio dell'arco  $AB$  che non contiene  $C$

$$\begin{cases} bx - ay = 0 \\ a^2yz + b^2xz + c^2xy = 0 \end{cases} \quad x:y = a:b$$

$$\Pi_C = \left[ a:b: \frac{-c^2}{a+b} \right] = \left[ a(a+b): b(a+b): -c^2 \right]$$

$$P(x,y,z) = 0$$

$P$  pol. omog. di grado 2

Molt. Tre matrici

$$\begin{pmatrix} A & D & E \\ D & B & F \\ E & F & C \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Ax + Dy + Ez \\ Dx + By + Fz \\ Ex + Fy + Cz \end{pmatrix}$$

$n \times k$ . vettore colonna lungo  $k$

$$(x, y, z) \begin{pmatrix} A & D & E \\ D & B & F \\ E & F & C \end{pmatrix} = (Ax + Dy + Ez, Dx + By + Fz, Ex + Fy + Cz)$$

$$(u, v, w) \cdot \begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix} = ul + vm + wn$$

Conica:  $P(x, y, z) = 0$  pol. omog. di grado 2

$$P(x, y, z) = Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Exz + 2Fyz =$$

$$= (x, y, z) \cdot \begin{pmatrix} A & D & E \\ D & B & F \\ E & F & C \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Fatto: La piana di  $Q = [q_0 : q_1 : q_2]$  tang. alla conica

$$T: \{P(x, y, z) = 0\} \text{ e}$$

$$(q_0, q_1, q_2) \cdot \begin{pmatrix} A & D & E \\ D & B & F \\ E & F & C \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

Ed nel nostro caso:  $\begin{pmatrix} 0 & c^2 & b^2 \\ c^2 & 0 & a^2 \\ b^2 & a^2 & 0 \end{pmatrix}$  è la matrice di  $T$

$$\Rightarrow a^2(yz + zy) + b^2(xz + zx) + c^2(xy + yx) = 0$$

$$\Pi_c = [a(a+b) : b(a+b) : -c^2]$$

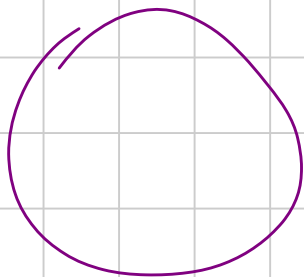
$$0 = a^2 b(a+b)z - a^2 c^2 y + b^2 a(a+b)z - c^2 b^2 x + c^2 a(a+b)y + c^2 b(a+b)x$$

$$c^2 x (b^2 + ab - b^2) + c^2 y (a^2 + ab - a^2) + z ab(a+b)^2 = 0$$

$$c^2(x+y) + z(ab)^2 = 0$$

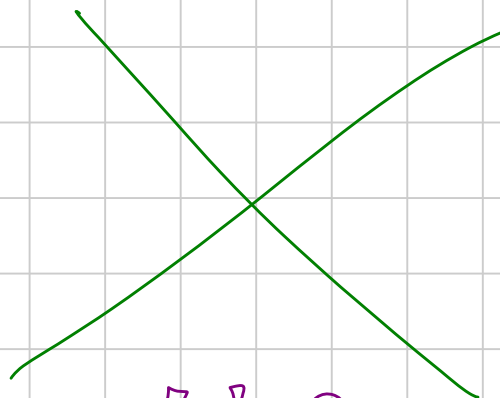
Oss: Ho  $l_1, l_2$  rette per  $Q$  tangenti a  $\Gamma$ ?

Voglio  $pd_\Gamma(Q)$



$$P=0$$

$$\lambda P - \mu l_1 \cdot l_2 = 0$$

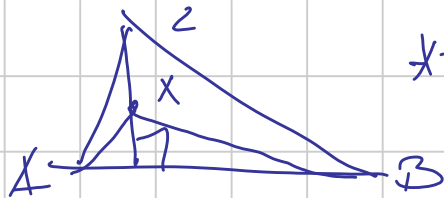


$$l_1 \cdot l_2 = 0$$

Op. in biricchezza:  $a^2 yz + b^2 xz + c^2 xy + (ux + vy + wz)(x + y + z) = 0$ .

$u, v, w$  (a meno del segno) = potenze di  $A, B, C$  risp alle cph.

17/10 20/2/5



$$AX^2 - BX^2 = AC^2 - BC^2$$

$ABC$  rettangolo in  $C$ ,  $D$  piede dell'altessa da  $C$  in  $AB$   
 $X$  pt. interno al segmento  $CD$ .  $K$  in  $AX$  tale che  
 $BK = BC$ ,  $L$  in  $BX$  tale che  $AL = AC$ .

$M = AL \cap BK$ , allora  $MK = ML$ .

Provare in baricentriche w.r.t al triangolo  $ABX$ .

Trovando prima qualche legame tra  $AX, BX, AC, BC$ .

Oss: Se  $AX = p$ ,  $BX = q$  allora  
$$p^2 - q^2 = b^2 - c^2$$

Recall: Distanze in baricentriche

Se ho  $[p_0 : p_1 : p_2]$  e  $[q_0 : q_1 : q_2]$  con  
 $1 = p_0 + p_1 + p_2 = q_0 + q_1 + q_2$  allora la loro distanza è

$$- \left( a^2 (p_1 - q_1) (p_2 - q_2) + b^2 (p_1 - q_1) (p_3 - q_3) + c^2 (p_1 - q_1) (p_2 - q_2) \right)$$

Sol:  $K = (1-t : 0 : t)$        $L = (0 : 1-s : s)$

$$B = (0 : 1 : 0)$$

$$BK^2 = - \left[ q^2 (-1)t + p^2 t (1-t) + c^2 (1-t)(-1) \right] =$$

$$= tq^2 - t(1-t)p^2 + (1-t)c^2$$

$$q^2 = c^2 - t(c^2 + p^2 - q^2) + t^2 p^2$$

$$\boxed{\begin{aligned} p^2 t^2 - 2b^2 t + b^2 &= 0 \Rightarrow p^2 = b^2 (2t-1)/t^2 \\ q^2 s^2 - 2a^2 s + a^2 &= 0 \Rightarrow q^2 = a^2 (2s-1)/s^2 \end{aligned}}$$

$$Bk: tx - (1-t)z = 0$$

$$AL: sy - (1-s)z = 0$$

$$\begin{pmatrix} t \\ 0 \\ t-1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ s \\ s-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s(1-t) \\ t(1-s) \\ st \end{pmatrix}$$

$$\det \begin{pmatrix} t & 0 & i \\ 0 & s & j \\ t-1 & s-1 & k \end{pmatrix} = i(-s(t-1)) - j(t(s-1)) + k(ts)$$

$$\Pi: [s(1-t) : t(1-s) : st]$$

$$\Delta = s + t - st$$

$$\Pi K = BK \cdot \frac{t(1-s)}{\Delta}$$

$$2N = AL \cdot \frac{s(1-t)}{\Delta}$$

$$K = (1-t : 0 : t)$$

$$B = (0 : 1 : 0)$$

$$\begin{aligned} p^2 &= b^2 (2t-1)/t^2 \\ q^2 &= a^2 (2s-1)/s^2 \end{aligned} \parallel \Rightarrow p^2 - q^2 = b^2 - a^2$$

$$b^2 \left( \frac{(2t-1)}{t^2} - 1 \right) = a^2 \left( \frac{(2s-1)}{s^2} - 1 \right)$$

$$b^2 \frac{(1-t)^2}{t^2} = a^2 \frac{(1-s)^2}{s^2} \Rightarrow at(1-s) = bs(1-t)$$

□

B7A 2022/1

$ABC$  tri. scaleno con  $CA \neq CB$ , circoscritta a  $\omega$  con centro  $O$ . Le tg.  $t_A$  e  $t_B$  a  $\omega$  in  $A$  e  $B$  si incontrano in  $X$ .

$Y$  = piede della perpendicolare da  $O$  su  $CX$

La retta per  $C$  parallela ad  $AB$  incontra  $t_A$  in  $Z$ .

Allora  $YZ$  passa per il pt. medio di  $AC$

Sol: 
$$e^2 yz + b^2 xz + c^2 yx = 0$$

$$t_A: c^2 y + b^2 z = 0$$

$$t_B: c^2 x + e^2 z = 0$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ c^2 \\ b^2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} e^2 \\ 0 \\ e^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c^2 e^2 \\ c^2 b^2 \\ -c^4 \end{pmatrix} \leadsto X = [e^2 : b^2 : -c^2]$$

$\ell$  = parallela ad  $AB$  per  $C$  e  $x+y=0$

$$\ell \cap t_A: \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ c^2 \\ b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b^2 \\ -b^2 \\ c^2 \end{pmatrix}$$

$$Z = [b^2 : -b^2 : c^2]$$

$H$  pt. medio di  $AC$

$$H = [1 : 0 : 1]$$

$$CX: b^2 x - e^2 y = 0$$

$$HZ: \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b^2 \\ -b^2 \\ c^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b^2 \\ b^2 - c^2 \\ -b^2 \end{pmatrix}$$

$$b^2 x + (b^2 - c^2) y - b^2 z = 0$$

$$K = HZ \cap CX$$

$$\begin{pmatrix} b^2 \\ -e^2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b^2 \\ b^2 - c^2 \\ -b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^2 b^2 \\ b^4 \\ b^2(b^2 - c^2) + b^2 e^2 \end{pmatrix}$$

$$K = [e^2 : b^2 : a^2 b^2 - c^2] \quad \text{se dim } OK \perp CZ \text{ ho finito.}$$

$$O = [e^2(b^2 + c^2 - e^2) : b^2(e^2 + c^2 - b^2) : c^2(e^2 + b^2 - c^2)]$$

$$\begin{pmatrix} e^2 \\ b^2 \\ S_C \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a^2 S_A \\ b^2 S_B \\ c^2 S_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b^2(c^2 S_C - S_B S_C) \\ e^2(S_A S_C - c^2 S_C) \\ e^2 b^2(S_B - S_A) \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow OK: b^2 S_C x + e^2 S_C y - 2e^2 b^2 z = 0$$

Se  $P_\infty \in Q_\infty$  sono i pt all'inf di  $OK$  e  $CZ$

devo vedere se  $(P_0 | P_1 | P_2) \begin{pmatrix} e^2 & b^2 & 0 \\ c^2 & 0 & a^2 \\ b^2 & a^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = 0$

$$P_\infty = \begin{pmatrix} b^2 S_C \\ a^2 S_C \\ -2e^2 b^2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^2(S_C - 2b^2) \\ -b^2(S_C + 2e^2) \\ S_C(b^2 - a^2) \end{pmatrix}$$

$$Q_\infty = \begin{pmatrix} b^2 \\ -a^2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a^2 \\ -b^2 \\ b^2 + e^2 \end{pmatrix}$$

Facendo il conto si ottiene la tesi.

Altri es: BNo 2020/1 (\*) INo 2023/6

# Proiettiva

$f: l_1 \rightarrow l_2$  proiettività se conserva i birapporti

$f: F \rightarrow C$  proiettività se conserva i birapporti.  
 $\uparrow$  fascio di rette  $\uparrow$  curva

Una proiettività  $\xleftarrow{\text{in dim 1}}$  è univocamente determinata se la conosce in 3 punti

Es: Dimostrare Pascal usando questo fatto

$A, B, C, D, E, X$  punti su una curva  $\Gamma$

$$R = AB \cap DE, \quad U = BC \cap EX, \quad V = CD \cap AX$$

$$g: \Gamma \rightarrow l_{CD} \quad g(X) = CD \cap RU$$

1. Dim che  $g$  è una proiettività

$$f: \Gamma \rightarrow l_{CD} \quad f(X) = CD \cap AX$$

2. Dim che  $f$  è una proiettività

3. Dim che  $f = g$

4. Dedurre Pascal.

Es (B7W 2021/1)

Sia  $\triangle ABC$  con  $AB < AC$ . Sia  $\omega$  una circonferenza per  $B, C$  con  $A$  interno a  $\omega$ . Siano  $X, Y$  su  $\omega$  tali che

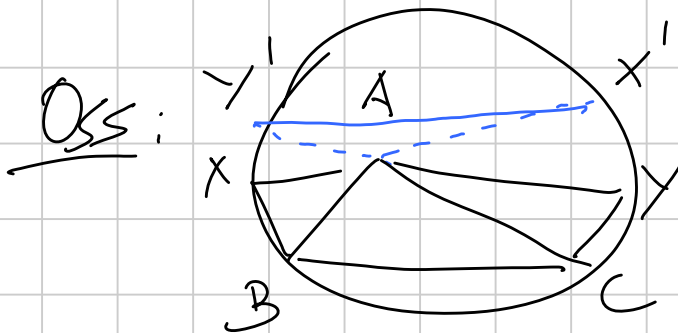
$\angle BXA = \angle AYC$ , inoltre  $X, C$  stanno da parti opposte risp. a  $AB$  e  $Y, B$  stanno da parti opposte risp. a  $AC$ .

Mostrare che al variare di  $X, Y$  la retta  $XY$  passa per un punto fisso.

Step 1: Trovare un candidato pt. fisso tramite casi particolari.

Casi particolari

- $XY \parallel BC$  con  $A \in XY$
- $X =$  seconda intersec. di  $BA$  con  $\omega$   
 $Y =$  seconda intersec. di  $CA$  con  $\omega$
- $\Pi =$  pt. medio dell'arco (maggiore  $BC$  / minore  $BC$ )  
 $Y = X =$  seconda intersec. di  $\Pi A$  con  $\omega$ .



$i: \omega \rightarrow \omega$

$i(T) =$  seconda intersec. di  
 $AT$  con  $\omega$

$i(X) = X'$

$i(Y) = Y'$

$j: \omega \rightarrow \omega$

$j(T) =$  seconda intersec. di  $\omega$  con la corda per  $T$   
parallela a  $BC$

$f = i \circ j \circ i$  involuzione proiettiva e  $f(X) = Y$

Candidato:  $UV \parallel BC$  per  $A$   $R = BA \cap w$   
 $S = CA \cap w$

$$Z = UV \cap RS$$

$g: w \rightarrow w$   $g(T) =$  seconda intersezione di  $ZT$  con  $w$

$g, f$  due proiettività  $\Rightarrow$  coincidono se coincidono in 3 pts

$$\begin{aligned} f(V) &= U \\ f(U) &= V \\ f(R) &= S \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(V) &= U \\ g(U) &= V \\ g(R) &= S \end{aligned}$$

A meno di scegliere le opportune coord. proiettive,  
 $w$  è  $x^2 + y^2 = z^2$   $\leadsto [1-t^2 : 2t : 1+t^2]$   $[t:s]$   
 $P = [p_0 : p_1 : p_2]$   $[1-t^2 : 2t : 1+t^2]$   $t$

$P = [\alpha : 0 : 1]$  a meno di rotazione

$\left( \frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2} \right), (\alpha, 0)$   $h(t) =$  seconda intersezione  
 $=$  funt. razionale

ES (170 SL 2018 G2)

$\triangle ABC$  con  $AB = AC$ ,  $\Pi$  pt. medio di  $BC$ .  $P$  tale che

$PB < PC$  e  $PA \parallel BC$ .  $X \in PB$ ,  $Y \in PC$  con

$B$  tra  $P$  e  $X$ ,  $C$  tra  $P$  e  $Y$  e  $P\hat{X}\Pi = P\hat{Y}\Pi$ .

Allora  $APXY$  ciclico

Idea:  $X$  su  $PB$  il pt simmetrico

$f: PB \rightarrow PC$  t.c.  $f(X) = Y$  t.c.  $\widehat{PXN} = \widehat{PYN}$  e se  $X$  è esterno,  $Y$  è interno

$g: PB \rightarrow PC$   $g(X) =$  seconda intersezione di  $(APX)$  con  $PC$

terzi  $f = g$