

S26, N1A Lemma di Thue e approx di Diophante

Titolo nota

Sic $f(x, y) \in \mathbb{Z}[x, y]$ omogeneo, irriducibile
di grado $d \geq 3$

Allora, $\forall c \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, $f(x, y) = c$ ha al più
finite soluzioni

(Thue, 1906)

Approssimazione di Diophante

$\xi \in \mathbb{R}$ Q è densa in $\mathbb{R}$, quindi, dati
 $\exists p, q \in \mathbb{Z}$ t.c.

$$\left| \xi - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^2} \implies \frac{f(p)}{q^d}$$

$$\xi \in \mathbb{Q} \quad \xi = \frac{a}{b}, \quad (a, b) = 1$$

$$\left| \frac{a}{b} - \frac{p}{q} \right| = \frac{|aq - pb|}{bq} \geq \frac{1}{bq} \quad \xi$$

Se ξ è razionale, $\frac{p}{q} \neq \xi$, $\left| \xi - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{1}{bq}$

Lemma di Dirichlet

$$\text{dato } \xi \in \mathbb{R}, \exists p, q \quad \left| \xi - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^2}$$

Oss: le ottime approx così sono rare.

$q \leq T$, ci sono al più $O(\log T)$,

($\hookrightarrow$ indep da ξ)

(E x A)

Fattore $(-\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!})$ è irrazionale

$$\left| e - \sum_{n=0}^N \frac{1}{n!} \right| > 0$$

$Q_N =$

$$\left| \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n!} \right| = \frac{1}{N!} \frac{1}{N+1} \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1) \cdots (n+k)} \right)$$

$$\leq \frac{1}{N! (N+1)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(N+1)^k} = \frac{1}{(N+1) N!} \frac{1}{1 - \frac{1}{N+1}} \leq \frac{2}{(N+1) N!}$$

$$\left| e - Q_N \right| \leq \frac{1 \cdot 2}{N+1 N!}$$

$\Rightarrow e$ è irrazionale!

Approx Diophantea $\leadsto$ Equazioni diophantee

$$x > 0, y > 0 \quad \leadsto \quad x^2 = dy^2 + 1 \Leftrightarrow x > \sqrt{d} y$$
$$x^2 - dy^2 = 1 = (x - \sqrt{d} y)(x + \sqrt{d} y) = 1$$

$$\left(\frac{x}{y}\right)^2 - d = \frac{1}{y^2}$$

$$|x - \sqrt{d} y| = \frac{1}{|x + \sqrt{d} y|} < \frac{1}{|2\sqrt{d} y|} = \frac{1}{2\sqrt{d} y}$$

$$\left|\frac{x}{y} - \sqrt{d}\right| < \frac{1}{2\sqrt{d} y^2}$$

$$x > 0, y > 0$$

$$\left|\frac{x}{y} - \sqrt{d}\right| < \frac{1}{2\sqrt{d} y^2} \Rightarrow x \leq y\sqrt{d} + 1$$

$$|x^2 - dy^2| \leq \frac{|x + y\sqrt{d}|}{y} \leq \frac{2y\sqrt{d} + 1}{y} \leq 2\sqrt{d} + 1$$
$$(x + y\sqrt{d})(x - y\sqrt{d})$$

Homogeneous

$f(x, y) = c$, ∞ soluzioni,

$f(x, y_0) = c$ ha finite soluzioni
finte

anche $y \rightarrow \infty$

$$a_d x^d + a_{d-1} x^{d-1} y + \dots + a_0 y^d = c$$

$$f\left(\frac{x}{y}\right) := a_d \left(\frac{x}{y}\right)^d + a_{d-1} \left(\frac{x}{y}\right)^{d-1} + \dots + a_0 = \frac{c}{y^d}$$

f irriducibile

allora f non ha radici multiple $(f, f') = 1$.

$\exists x \uparrow f \text{ irriducibile} \Leftrightarrow \hat{f} \text{ irriducibile}$

$$\hat{f}(t) = (t - \xi_1) \dots (t - \xi_n) = \frac{c}{y^d} \ll 1$$

$\Rightarrow$ ne follow Sandoz piccolo

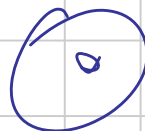
$$|t - \xi_1| < 1$$

Lemma

Dato $\hat{f}$ irriducibile*, $\exists c_1 = c_1(f)$ tale che



raggio = r_p



$$\exists \xi \mid \hat{f}(\xi) = 0, \text{ e } |\xi - t| < C_1 \cdot \varepsilon$$

$$* \hat{f}(t) = \varepsilon.$$

$$\exists \infty x, y, \exists \xi \mid f(\xi) \neq 0, \mid \xi - \frac{p}{q} \mid < \frac{C}{q^d}$$

$$d \geq 3$$

Teorema (Liouville, 1840)

Sia ξ algebrica di grado d (il suo polinomio ha grado d).

Allora $\exists C \neq 0$ s.t. $\underbrace{\text{cot}(f)}_{\rightarrow \text{poly numero di } \xi}$

tale che

$$\left| \xi - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{C}{q^d} \quad \forall p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0$$

$$\left| f\left(\frac{p}{q}\right) \right| \neq 0$$

$$\left| a_d \left(\frac{p}{q}\right)^d + \dots + a_0 \right| = \frac{|\text{num}|}{q^d} \neq 0 \geq \frac{1}{q^d}$$

$$f = \left(\xi - \frac{p}{q} \right) \cdot \prod_{\substack{\xi_i \neq \xi}} \left(\xi_i - \frac{p}{q} \right)$$

$$\xi \nearrow \frac{p}{q}$$

circa $\square$

Ex: Costruite un numero trascendente

(Ex Bonus: Sia $\xi \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, Sia $w \in \mathbb{R}_+$ tale che $\forall Q \in \mathbb{Z}_+$,
 $\exists p, q, q \leq Q$ t.c. $|q\xi - p| < \frac{1}{2^w}$. Dimostrare $w \leq 1$.)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{10^{n!}} \quad (\text{Ex: verificare})$$

Definizione

Si dice **esponente di approssimazione** $e(\xi)$ di un numero reale ξ

$$\sup \{ w \text{ t.c. } \forall \varepsilon > 0, \exists p, q \in \mathbb{Z} \mid \sqrt[q]{(p, q) = 1} \left| \xi - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^{w+\varepsilon}} \}$$

($e(\xi) = 1$ se $\xi \in \mathbb{Q}$, $e(\xi) \geq 2$ (per Dirichlet) ottiene
Liouville dice $e(\xi) \leq d$ se d è **algebraico ordinato**)

$$\text{Thue: } e(\xi) \leq 1 + d/2$$

Quindi,

$$d > 1 + \frac{d}{2} + \frac{1}{2} \quad \text{se } d \neq 3$$

$$\left| \xi - \frac{p}{q} \right| < \frac{C_1}{q^d}$$

Quindi questa conclusione
(Dopo vedere la dim)

f ^{Omogeneo}
non è una potenza di un polinomio
lineare o prodotto di irriducibili

Allora $f(x, y) = c$ ha finite soluzioni

$$f = f_1^{\alpha_1} \cdots f_s^{\alpha_s} = c \quad (E x: \text{gli } f_i \text{ sono omogenei})$$

$$\left\{ f_i = c_{ij} \right\} \rightarrow \text{various tra i divisori di } c$$

$$\left\{ \begin{array}{l} f_i = c_{ij} \rightarrow \text{finiti} \\ f_s = c_{sj} \end{array} \right. \quad \text{con } s \text{ soluzioni}$$

$s > 1$

$$\left\{ \begin{array}{l} f_1(x, y) = c_1 \\ f_2(x, y) = c_2 \end{array} \right.$$

$\rightarrow$ questo ha finite soluzioni
perché (f_1, f_2) sono coprimi

$$\left\{ \begin{array}{l} f_1' = 0 \\ f_2' = 0 \end{array} \right.$$

(E x: poiché f_1, f_2 sono omogenei, $(f_1, f_2) = 1$,
e irriducibili)

(è il Teorema di Bézout),

$$f_1, f_2 \in \mathbb{Q}(x)[y]$$

$$\rightarrow \text{per Euclideo ho } A(x,y) \overset{\mathbb{Q}(x)[y]}{f_1'} + B(x,y) \overset{\mathbb{Q}(x)[y]}{f_2'} = 1$$

$$\text{II } \mathbb{Q}(x) = \left\{ \frac{a_i x^i + \dots + a_0}{b_j x^j + \dots + b_0} \right\}$$

$$\tilde{A} \tilde{f}_1' + \tilde{B} \tilde{f}_2' = q(x)$$

Simmetrizzando con y , trovo finite soluzioni.

Kobayashi

Siene $\{a_i\}_{i \geq 0}$ $\{b_i\}_{i \geq 0}$ successioni di interi positivi.

Se $a_i - b_i = c$, e $\{p \text{ t.c. } p | a_i \text{ per qualche } i\}$ è finito, allora $\{p \text{ t.c. } p | b_i \text{ per qualche } i\}$ è infinito.

$$x - y = c$$

$$p_1^{a_1} \dots p_r^{a_r} = \delta x^3$$

$$s_i x^3 - t_j y^3 = c$$

$\forall i, (S_i, t_j, c) = 1 \Rightarrow (S_i, t_j) = 1, t_j \text{ cube-free}, S_i \text{ cube-free}$
 $\Rightarrow \frac{t_j}{S_i} \text{ non è un cubo, } x^3 - \frac{t_j}{S_i} \text{ non ha}$
 $\text{radici in } \mathbb{Q}, \text{ dunque } \square$

$$S_i x^3 - t_j y^3 = c$$



quinto (e nuovo di aggiustamenti)
è irriducibile

IRANTST 2009/2

$2^{2^n} + c$ ha infiniti fattori primi
al variare di n .

Proof, Bender per Kobayashi

IRANTST 2018 DAY 4 P3

Sia $a_1, \dots, a_n, \dots$ una sequenza di interi ^{positivi} distinti.

$\exists \infty p$ tale che $\exists i, j, k \mid p \mid a_i a_j a_k - 1$
 $\uparrow$
 distinti

$$a_1 a_2 a_n = 1 \rightarrow a_1 a_2 a_3 a_n = a_3$$

$$a_1 a_3 a_n = 1 \rightarrow a_1 a_2 a_3 a_n = a_2$$

Kobayashi.

Sia $L(x)$ il massimo primo che divide $x \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} L(m^3 + c) = \infty$$

$$\forall M \exists m \dots$$

$$\exists m_1, m_2, \dots$$

$$L(m_i^3 + c) < N$$

$$m_i^3 + c = y = s \cdot y^3$$

cube-free

$$x^3 - s \cdot y^3 = -c$$

irriducibile

Per il lemma di Thue, $\square$

- Dimostrazione lemma di Thue
- $Y^2 - \alpha X^2 = r$ $\alpha \leq br$ ($0 < br$) $\neq 0$
 $Z^2 - b \lambda^2 = s$
ha finite soluzioni
- π è irrazionale

Teor (Thue)

ξ è algebrico di grado $d \geq 3$

$|\xi - \frac{p}{q}| < \frac{1}{q^{1+\frac{d}{2}+\epsilon}}$ ha finite soluzioni $\forall \epsilon > 0$

$$\frac{r}{s}, \frac{p}{q} \sim \xi \quad \left| \xi - \frac{r}{s} \right| < \frac{1}{s^v}, \quad \left| \xi - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^{\mu}}$$

$$v, \mu > 1 \quad s^v > q^{\mu} \quad s \gtrsim q^{\mu/v}$$

$$\frac{r}{s} \neq \frac{p}{q}$$

$$\left| \frac{r}{s} - \frac{p}{q} \right| \leq \frac{1}{q^{\mu}} + \frac{1}{s^v} \leq \frac{2}{q^{\mu}}$$

$$\frac{1}{s^v} \leq \frac{|rq - sp|}{sq} \leq \frac{2}{q^{\mu}}$$

GAP PRINCIPLE

$$\frac{1}{q^{\mu-1}} \leq s$$

$$s \gtrsim q^{\mu-1}$$

$$\mu-1 \times \mu/v$$

$$v > \frac{\mu}{\mu-1}$$

ξ algebrico di grado d

Costruiremo buone approssimazioni
portando da una approssimazione molto buona
 μ , ne troveremo molte

$$v \sim \frac{2}{d} \mu$$

ASSURDO: Esistono ∞ approx con $\mu = 1 + \frac{d}{2} + \epsilon$



$$M \leq 1 + \frac{n}{2} + \epsilon$$

$$F_n(x, y) = P_n(x) - y Q_n(x)$$

$F_n(x, \xi)$ abbia uno 0 di ordine
 $m \sim \frac{2}{3}n$ in ξ

Le p con $|\xi - \frac{p}{q}| < \frac{1}{q^m}$ che fissare dopo.
 Sia r/s con $|\xi - \frac{r}{s}| < \frac{1}{s^m}$, suff. grande.

$$F_i(x, r/s) = (x - \xi)^{m-j} R_{m-j}^{(i)}(x) + (\frac{r}{s} - \xi) Q_n(x)$$

$$W(x) = Pa' - Qp'$$

$\frac{p}{q}$

1) $\partial^j F(x, y)$ $D_j F = \frac{1}{j!} D^j F(x, y) \in \mathcal{U}[x, y]$

$$x^n \xrightarrow{D^j} n \cdot n-1 \cdot \dots \cdot (n-j+1) x^{n-j}$$

$$D_j x^n = \binom{n}{j} x^{n-j}$$

$$D_j F_n(\xi, \zeta) = 0 \quad j=0, 1, \dots, m-1$$

$$D_j (P_n - \sum Q_n)(\xi) = 0$$

$$\left(\sum a_i \xi^i = 0 \quad [\underline{Q[\xi] : Q}] = d \right.$$

$$\checkmark \sum_{s=j}^n x_s \binom{s}{j} \xi^{s-j} + \sum_{s=1}^n y_s \binom{s}{j} \xi^{s-j+1} =$$

$$\xi^d = \sum_{l=0}^{d-1} c_{d,l} \xi^l$$

$$\xi^r = \sum_{l=0}^{d-1} c_{r,l} \xi^l$$

$$c_{r+1,d} = c_{d,d-1} c_{r,d-1} + c_{r,d-2}$$

$$\downarrow$$

$$c_{r,l} \leq \beta_1$$

$$\checkmark \sum_{s=j}^n x_s \binom{s}{j} \xi^{s-j} + \sum_{s=j}^n y_s \binom{s}{j} \xi^{s-j+1} =$$

$$= \sum_{s=j}^n x_s \sum_{l=0}^{d-1} \binom{s}{j} c_{s-j,l} \xi^l + \sum_{s=j}^n y_s \sum_{l=0}^{d-1} c_{s-j+1,l} \xi^l =$$

$$= \sum_{l=0}^{s-1} \sum^l \left(\sum_{s=j}^n x_s \binom{s}{j} c_{s-j,l} + y_s \binom{s}{j} c_{s-j+1,l} \right) = 0$$

$$\left| \binom{s}{j} c_{s-j+1,l} \right| \leq B_2^{s-j+1}$$

Lemma di Siegel

N incognite M equazioni $N > M$

$|a_{ij}| < A$, interi

$\exists t_1, \dots, t_N$ soluzioni non banali o

$$\sum a_{ij} t_j = 0$$

che soddisfa $|t_i| \leq (N A)^{\frac{M}{N-M}}$

T



T^N

$>$

$(A N T)^M$

T^{N-M}

$>$

$(A N)^M$

$T \geq (A N)^{\frac{M}{N-M}}$

$$\lambda < \frac{1}{2}$$

$$\delta := \left(1 + \frac{2\varepsilon}{\lambda}\right) (1-\lambda) - 1 > 0$$

$$m := \frac{(2n+2)(1-\lambda)}{\lambda} \quad (\text{chose per gli } n \text{ per cui } m \text{ è un intero})$$

$$\text{H } m \geq 2$$

$$|x_n|, |y_n| \leq (NA)^{\frac{M}{N-M}} = \left((2n+2)B_2\right)^n \frac{(2n+2)(1-\lambda)}{(2n+2)\lambda}$$

$$\leq B_3^{n \left(\frac{1-\lambda}{\lambda}\right)}$$

$$\|P_n\|, \|Q_n\| \leq B_3^n$$

$$F_n(x, y) = P_n(x) + y Q_n(x)$$

$$D_j F_n\left(\frac{p}{q}, \frac{r}{s}\right) = \left(\frac{r}{s}\right)^{m-j} \underline{R_{n,j}}\left(\frac{p}{q}\right) + \left|\frac{r}{s} - \frac{p}{q}\right| Q_n\left(\frac{p}{q}\right) \leq$$

$$\leq \left(\frac{r}{s}\right)^{m(m-j)} + \frac{r^{-m}}{s^{-m}} B_3^n \leq 2 \frac{r^{-m(m-j)}}{s^{-m}} B_3^n$$

$$u := \frac{p}{q} \quad v := \frac{r}{s}$$

$$D_j\left(\frac{p}{q}, \frac{r}{s}\right) = \begin{cases} 0 \\ \geq \frac{1}{q^{n-j+s}} \end{cases}$$

$$P_n^{(j)}(u) + v Q_n^{(j)}(u) = 0 \quad \forall j=1, \dots, h$$

$$P_n^{(i)}(u) + v Q_n^{(i)}(u) = 0$$

$$v(Q_n^{(j)} P_n^{(i)} - Q_n^{(i)} P_n^{(j)}) = 0$$

$$W^{(j)}(P_n Q_n^{(i)} - Q_n P_n^{(i)})^j =$$

$$= \sum_{i=0}^j \binom{j}{i} (P_n^{(j-i)} Q_n^{(i+1)} - Q_n^{(j-i)} P_n^{(i+1)}) = 0$$

$$\forall j \leq h-2$$

$$W(P_n, Q_n) \neq 0 \quad \text{perché?}$$

$$F_n(x, y) = P_n(\sigma \tau \sigma y)$$

$\rightarrow P_n$ ha 0 di mult. m in $\mathbb{S}$

ma $\mathbb{S}$ ha grado d. Sic f il suo poly. irred.

$$\begin{array}{ccc} f^m & | & P_n \\ \downarrow & & \downarrow \\ m d & & n \\ & & (2n+2)(1-\epsilon) \end{array}$$

Assurdo

- $W(p_n, a_n) \neq 0$

- $\chi^{(j)}(u, v) = 0$ per $j = 1, \dots, h-2$

- $\chi^{(j)}(\xi, \xi) = 0$ per $j = 1, \dots, m-1$

- W ha grado $\leq 2n-1$

$$d(m-1) + h \leq 2n-1$$

$$(2n+2)(1-1) + h \leq 2n-1$$

$$h \leq 2n-1$$

per h più grande, risento felice.

$$q^m \leq s$$

$$\frac{\log(s)}{\log(q)} - \tau \leq m \leq \frac{\log(s)}{\log(q)}$$

$$q^{-(n-h)} s^{-1} \leq |D_n F_n(u, v)| \leq 2B_5^n q^{-u(m-j)}$$

$$\mu m - \mu h + h - n \leq \frac{\log(s)}{\log(q)} + \frac{n \log B_\epsilon}{\log(q)} \leq$$

$$\left(\frac{d}{2} + \epsilon\right) \left(\frac{(2n+2)(1-\lambda)}{d}\right) - n =$$

$$= \left(1 + \frac{2\epsilon}{d}\right)(1-\lambda) - 1 \Big) n \leq \quad (2\frac{1}{d}n + c) \xrightarrow{\quad}$$

$$= \delta' n < \frac{nc}{\log(q)}$$

$$\delta'' n < 1$$

$$n < \delta''(\log(q))$$

$$\frac{\log(s)}{\log(q)} \leq t + n \leq t + n \leq C(\log(q))$$

per $\log(s)$ è ottenuto grande,
osserva! $\square$

