

Un polinomio è una scrittura della forma

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

a_i coefficienti

a_0 termine noto

a_n termine di testa

n è il grado del polinomio

$$a_i \in \mathbb{Z} \text{ interi}$$

$$\mathbb{Z}[x]$$

$$a_i \in \mathbb{Q}$$

$$\mathbb{Q}[x]$$

$$a_i \in \mathbb{R}$$

$$\mathbb{R}[x]$$

$$a_i \in \mathbb{C}$$

$$\mathbb{C}[x]$$

— o —

$p(x)$ $q(x)$ polinomi posso fare

$$\deg(p(x)) = n$$

$$\deg(q(x)) = m$$

$$p(x) + q(x) \rightarrow \leq \max(m, n)$$

$$p(x) \cdot q(x) \rightarrow m + n$$

$$p(q(x)) \rightarrow m \cdot n$$

Es $p(x), q(x)$ polinomi in $\mathbb{R}[x]$ tali che

$$p(q(x)^2) = p(x) q(x)^2$$

→ guardiamo cosa succede ai termini di testa.

$$p(x) = a_m x^m + \dots$$

$$q(x) = b_n x^n + \dots$$

$$q(x)^2 \rightarrow \text{ha grado } 2n \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \text{LHS}$$

$$p(q(x)^2) \rightarrow \text{ha grado } 2n \cdot m$$

$$p(x) q(x)^2 = m + 2n \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \text{RHS}$$

$$2n \cdot m = m + 2n \rightarrow m \cdot 2n - m - 2n + 1 = 1$$

$$(m-1)(2n-1) = 1$$

Caso 1 $\begin{cases} m-1 = -1 \\ 2m-1 = -1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} m = 0 \\ n = 0 \end{cases} \quad a_0 = a \cdot b_0^2 \quad \begin{cases} a_0 = 0 \\ b_0 \text{ qualsiasi } \in \mathbb{Z} \\ a = \text{qualsiasi} \\ b_0 = \pm 1 \end{cases}$

Caso 2 $\begin{cases} m-1 = 1 \\ 2m-1 = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} m = 1 \\ n = 2 \end{cases}$

$$p(q(x)^2) = p(x) q(x)^2$$

Se $p(x)$ soddisfa $\Rightarrow$ $1) p(x)$ soddisfa.

$\rightarrow$ possiamo assumere wlog $p(x)$ sia monico

$$p(x) = x^2 + a_1 x + a_0$$

$$q(x) = b_1 x + b_0$$

$$\deg q = 1 \Rightarrow b_1 \neq 0$$

$$\gamma = -\frac{b_0}{b_1} : \text{radice di } q \quad q(\gamma) = 0$$

Valuto l'espressione in γ

$$p(0) = p(\gamma) \cdot 0 = 0 \rightarrow a_0 = 0$$

$$p(x) = x^2 + a_1 x \quad q(x) = b_1 x + b_0$$

$$\text{LHS } p(q(x)^2) = (b_1 x + b_0)^4 + a_1 (b_1 x + b_0)^2$$

$$\text{RHS } p(x) q(x)^2 = (x^2 + a_1 x) (b_1 x + b_0)^2$$

dall'uguaglianza, mettiamo $(b_1 x + b_0)^2$ in evidenza.

$$(b_1 x + b_0)^2 \left[(b_1 x + b_0)^2 + a_1 - x^2 - a_1 x \right] = 0$$

deve essere polinomio nullo

$$b_1^2 x^2 + 2b_1 b_0 x + b_0^2 + a_1 - x^2 - a_1 x = 0$$

$$x^2 (b_1^2 - 1) + x (2b_1 b_0 - a_1) + b_0^2 + a_1 = 0$$

$$\Rightarrow b_1 = \pm 1$$

$$\Rightarrow a_1 = -b_0^2$$

$$\rightarrow 2b_1 b_0 + b_0^2 = 0$$

$$b_0 (2b_1 + b_0) = 0$$

Caso $b_0 = 0$

Caso

$$2b_1 + b_0 = 0 \quad \dots$$

Teorema Ruffini $p(x)$ polinomio, 2 radici

$$(x-a) \mid p(x)$$

Es: Fattorizziamo $p(x) = x^3 + x^2 - 11x - 3$ $\mathbb{Z}[x]$

$$p(x) = (x-a)(x^2 + bx + c) \quad \text{termine noto } -2c = -3$$

Proviamo come radici i divisori di -3 che sono $\pm 1, \pm 3$

3 è radice di $p(x) \rightarrow p(x) = (x-3)(x^2 + 4x + 1)$ $\mathbb{Z}[x]$

$$\Delta = 4^2 - 4 = 12 \quad \lambda_1, \lambda_2 = \frac{1}{2}(-4 \pm \sqrt{12}) = -2 \pm \sqrt{3}$$

$$p(x) = (x-3)(x+2+\sqrt{3})(x+2-\sqrt{3}) \quad \mathbb{R}[x]$$

Se $x^2 + 4x + 1$ fosse fattorizzabile in $\mathbb{Z}[x]$, sarebbe $(x-a)(x-b)$ ma allora a, b sarebbero interi, assurdo.

Def: $p(x) \in \mathbb{Z}[x]$ è irriducibile se non si può scrivere come prodotto di due polinomi di grado più piccolo che non siano costanti.

Lemma di Gauss $p(x) \in \mathbb{Z}[x]$

Un polinomio $p(x)$ è irriducibile in $\mathbb{Q}[x] \Leftrightarrow p(x)$ è irriducibile in $\mathbb{Z}[x]$
 $p(x)$ è fattorizzabile in $\mathbb{Q}[x] \Leftrightarrow p(x)$ è fattorizzabile in $\mathbb{Z}[x]$

Se fosse $x^2 + 4x + 5$ che $\Delta < 0$

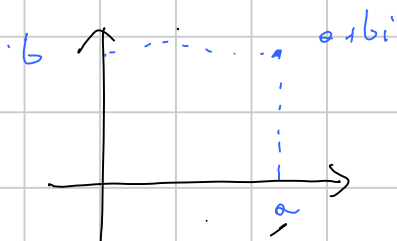
— 0 —

Numeri Complessi $\mathbb{C}$

$$z = a + bi$$

dove i è l'unità immaginaria $i^2 = -1$

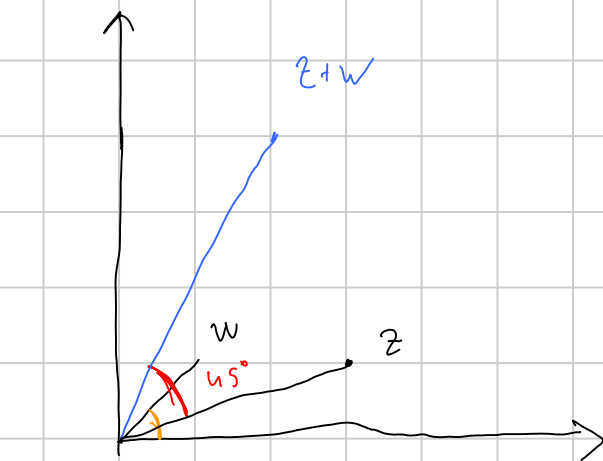
Piano complesso



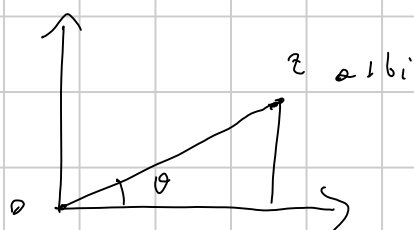
$$z = a + bi \quad w = c + di$$

$$\text{Somma: } z + w = (a+c) + (b+d)i$$

$$\text{prodotto } z \cdot w = (a+bi)(c+di) = ac + bci + adi + bdi^2 \\ = (ac - bd) + (bc + ad)i$$



Forma polare.



$$z = \rho e^{i\theta}$$

$$w = \sigma e^{i\varphi}$$

$$z \cdot w = \rho \cdot \sigma e^{i(\theta + \varphi)}$$

$$(z+i)^{2026}$$

$$z+i = \rho e^{i\theta}$$

$$(z+i)^{2026} = \rho^{2026} e^{i 2026 \theta}$$

molto stesso modo, troviamo radici.

$$X^6 - 15 = 0$$

$$X^6 = 15$$

$$X = \rho e^{i\theta}$$

$$\rho^6 \cdot e^{i6\theta} = 15$$

$$1) e^{i6\theta} = 1$$

$$2) \rho^6 = 15 \rightarrow \rho = \sqrt[6]{15}$$

Domanda: quali θ che $e^{i\varphi} = 1$?

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi = 1$$

$$\rightarrow \begin{aligned} \cos \varphi &= 1 \\ \sin \varphi &= 0 \end{aligned}$$

φ è multiplo di 2π

$$e^{i6\theta} = 1 \quad 6 \cdot \theta \text{ è multiplo di } 2\pi \rightarrow \theta \text{ è multiplo di } \frac{2\pi}{6}$$

$$\theta_0 = \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3} \quad \text{va bene,} \quad 2\theta_0 = \frac{2\pi}{3} \quad 3\theta_0 = \pi, \quad 4\theta_0 = \frac{4}{3}\pi, \quad 5\theta_0 = \frac{5}{3}\pi, \quad 6\theta_0 = 2\pi$$

$$z = 3 + i$$

$$w = 1 + i$$

$$z \cdot w = 3 + 3i + i - 1 = 2 + 4i$$

$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$z = a + bi$$

$$= \rho \cos \theta + \rho \sin \theta i$$

$$= \rho (\cos \theta + i \sin \theta)$$

$$= \rho e^{i\theta}$$

I numeri complessi che risolvono $e^{in\theta} = 1$ si chiamano radici dell'unità

$\zeta_n = e^{i \frac{2\pi}{n}}$ altre soluzioni sono ζ_n^k con $k=0,1,2,\dots,n-1$

Soluzioni di $x^6 - 15 = 0$ sono $x = \zeta_6 \sqrt[6]{15}$

$$x^2 + 4x + 5$$

$$\Delta = 16 - 20 = -4$$

$$\lambda_1, \lambda_2 = \frac{1}{2} (-4 \pm \sqrt{\Delta}) = \frac{1}{2} (-4 \pm \sqrt{-4}) = -2 \pm i$$

$x^2 + 4x + 5$ è irriducibile su $\mathbb{Z}[x]$ e $\mathbb{R}[x]$

$x^2 + 4x + 5$ si può fattorizzare in $\mathbb{C}[x] = (x - 2 - i)(x - 2 + i)$

Teorema Fondamentale dell'algebra $p(x) \in \mathbb{C}[x]$ ha grado n

In $\mathbb{C}[x]$ esistono $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ (eventualmente con ripetizioni) tali che

$$p(x) = c \cdot (x - \lambda_1)(x - \lambda_2) \dots (x - \lambda_n)$$

Principio di identità dei polinomi

$p(x), q(x)$ polinomi in $\mathbb{C}[x]$ di grado $\leq n$

Se esistono $n+1$ valori $x_1, x_2, \dots, x_{n+1}$ tali che $p(x_i) = q(x_i)$ per ogni i

Allora $p(x)$ e $q(x)$ sono lo stesso polinomio

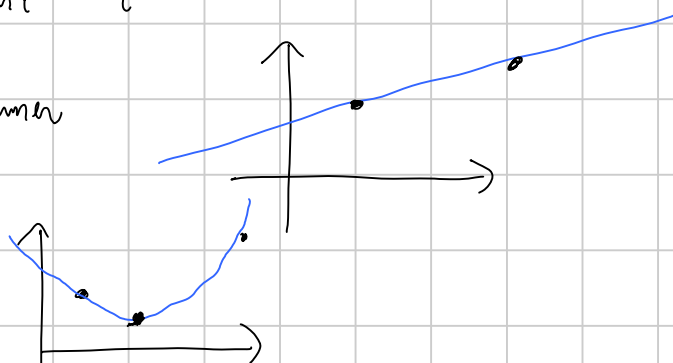
Interpolazione Scelte $n+1$ coppie di numeri $(x_1, y_1), \dots, (x_{n+1}, y_{n+1})$

Allora esiste un unico polinomio di grado $\leq n$ tale che

$$p(x_i) = y_i \quad \text{per ogni } i$$

Es: $n=1$ 2 coppie di numeri

$n=2$ 3 punti



Ruffini: a è radice di $p(x) \rightarrow p(x) = (x-a) \cdot q(x)$

$$\begin{array}{l} \mathbb{Z}[x] \\ \mathbb{R}[x] \\ \mathbb{C}[x] \end{array}$$

$\mathbb{Z}[x]$ a radice di $p(x)$
 b altro numero

$$(x-a) \mid p(x) \quad (\text{come polinomi})$$

$$x=b \rightarrow b-a \mid p(b) \quad (\text{come numero in } \mathbb{Z})$$

Lemma: $p(x)$ polinomio in $\mathbb{Z}[x]$
 a, b interi allora $b-a \mid p(b) - p(a)$

Dim: caso $p(x)$ monomio $p(x) = x^n$

$$p(b) - p(a) = b^n - a^n = (b-a)(b^{n-1} + b^{n-2}a + \dots + b a^{n-2} + a^{n-1})$$

$$p(x) = C_n x^n + C_{n-1} x^{n-1} + \dots + C_1 x + C_0$$

$$p(b) - p(a) = C_n (b^n - a^n) + C_{n-1} (b^{n-1} - a^{n-1}) + \dots + C_1 (b - a)$$

tutto questo è divisibile per $b-a$.

Es: $p(x)$ polinomio in $\mathbb{R}[x]$

$p(x)$ dà resto 3 se diviso per $x-1$

$p(x)$ dà resto 1 se diviso per $x-3$

domanda: qual è il resto della divisione di $p(x)$ per $(x-1)(x-3)$

Sol $p(x) = (x-1)q_1(x) + 3 \rightarrow p(1) = 3$

$$p(x) = (x-3)q_2(x) + 1 \rightarrow p(3) = 1$$

dividere (con resto) $p(x)$ per $(x-1)(x-3)$

$$p(x) = \underline{(x-1)(x-3)} q_3(x) + r(x)$$

$r(x)$ ha grado 1

$$r(x) = ax + b$$

$$x=1 \quad p(1) = 0 + a + b = 3$$

$$x=3 \quad p(3) = 0 + 3a + b = 1$$

$$\begin{cases} a+b=3 \\ 3a+b=1 \end{cases} \quad 2a = -2 \rightarrow a = -1 \quad b = 4$$

$$p(x) = (x-1)(x-3)q_3(x) - x + 4$$

Es: $p(x)$ polinomio in $\mathbb{Z}[x]$

$$p(16) = 36 \quad p(14) = 16 \quad p(5) = 25$$

Domanda: quali sono i possibili valori di $p(10)$?

Sol: Lemma: $b-a \mid p(b) - p(a)$

$$b=14, a=10$$

$$4 \mid 16 - p(10)$$

$$4 \mid p(10)$$

$$b=16, a=10$$

$$6 \mid 36 - p(10)$$

$$6 \mid p(10)$$

$$b=5, a=10$$

$$5 \mid 25 - p(10)$$

$$5 \mid p(10)$$

$$\begin{matrix} \backslash \\ \backslash \end{matrix} \quad 60 \mid p(10)$$

Condizione necessaria.

Ma non è detto che sia sufficiente!

$$p(x) = (x-16)(x-14)(x-5)q(x) + r(x)$$

$$r(x) \text{ grado } \leq 2$$

$$r(x) = (x-10)^2$$

$$p(x) = (x-16)(x-14)(x-5)q(x) + (x-10)^2$$

$$x=10 \quad p(10) = 6 \cdot 4 \cdot 5 \cdot q(10) + 0 = 120 \cdot q(10)$$

R.sp: tutti i multipli di 120, non tutti i multipli di 60

Es: $p(x)$ polinomio a coefficienti interi.

$$c \text{ sono tre valori } a, b, c \quad p(a) = p(b) = p(c) = 2$$

Tesi: per qualsiasi n intero, $p(n) \neq 3$

Sol:

$$n-a \mid p(n) - p(a) = 3 - 2 = 1$$

$$n-a \mid 1$$

$$n-a = \pm 1$$

$$n-b = \pm 1$$

$$n-c = \pm 1$$

Quindi n ha 3 interi (distinti) a distanza ± 1

$\rightarrow$ ASSURDO

Formule di Viète $p(x)$ polinomio $\in \mathbb{C}[x]$

$$p(x) = \cancel{x} (x - \lambda_1) (x - \lambda_2) (x - \lambda_3) \quad \text{per semplificare assumiamo } c=1$$

$$p(x) = x^3 + x^2(-\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3) + x(\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3) - \lambda_1\lambda_2\lambda_3$$

$$p(x) = x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

Relazione tra coefficienti e radici

$$a_2 = -\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3$$

$$a_1 = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3$$

$$a_0 = -\lambda_1\lambda_2\lambda_3$$

Più in generale, per polinomio di grado n

$$p(x) = x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_1 x + a_0$$

$$\begin{aligned} p(x) &= (x - \lambda_1)(x - \lambda_2) \dots (x - \lambda_n) = \\ &= x^n + \\ &\quad + x^{n-1}(-\lambda_1 - \lambda_2 - \dots - \lambda_n) \\ &\quad + x^{n-2}(\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_1\lambda_4 + \lambda_2\lambda_3 + \dots) \\ &\quad + x^{n-3}(-\lambda_1\lambda_2\lambda_3 - \dots) \\ &\quad + \dots \\ &\quad + (-1)^n \lambda_1\lambda_2 \dots \lambda_n \end{aligned}$$

ES: $p(x) = x^2 - 3x + 4$ in $\mathbb{C}[x]$

Siano λ_1, λ_2 le radici di $p(x)$. Calcolare $\lambda_1^3 \lambda_2^3 + \lambda_1 \lambda_2^3$

$$\left(\lambda_1, \lambda_2 = \frac{1}{2} (3 \pm \sqrt{-7}) = \frac{1}{2} (3 \pm \sqrt{7}i) \right)$$

$$\lambda_1^3 \lambda_2^3 + \lambda_1 \lambda_2^3 = \lambda_1 \lambda_2 (\lambda_1^2 + \lambda_2^2) = 4 \cdot 1 = 4$$

Per formule di Viète $\lambda_1 \lambda_2 = 4$

$$(\lambda_1 + \lambda_2)^2 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + 2\lambda_1 \lambda_2$$

$$\begin{aligned} \lambda_1^2 + \lambda_2^2 &= (\lambda_1 + \lambda_2)^2 - 2\lambda_1 \lambda_2 \\ &= 3^2 - 2 \cdot 4 = 9 - 8 = 1 \end{aligned}$$

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

$$P(0) = a_0$$

$$P(1) = a_n + a_{n-1} + \dots + a_1 + a_0$$

Domanda: Qual è $\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} a_{2k}$?

$$P(1) = a_n + a_{n-1} + \dots + a_2 + a_1 + a_0$$

$$P(-1) = (-1)^n a_n + (-1)^{n-1} a_{n-1} + \dots + a_2 - a_1 + a_0$$

$$P(1) + P(-1) = 2 \cdot (a_0 + a_2 + a_4 + \dots)$$

Domanda: Se chiedo $\sum$ coefficienti con indici multipli di 3
 $a_0 + a_3 + a_6 + \dots$

$$\zeta_3 = e^{i \frac{2\pi}{3}} \text{ risolve } x^3 - 1 = 0$$

$$\zeta_3^3 - 1 = 0$$

$$\cancel{(\zeta_3 - 1)} (\zeta_3^2 + \zeta_3 + 1) = 0$$

$$\rightarrow \zeta_3^2 + \zeta_3 + 1 = 0$$

$$P(x) = x^n$$

$$P(1) + P(\zeta_3) + P(\zeta_3^2)$$

$$\begin{matrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \end{matrix}$$

$$1 + 1 + 1 = 3$$

$$1 + \zeta_3 + \zeta_3^2 = 0$$

$$1 + \zeta_3^2 + \zeta_3^4 = 1 + \zeta_3^2 + \zeta_3 = 0$$

$$P(x) = \underline{a_0} + \underline{a_1 x} + \underline{a_2 x^2} + \underline{a_3 x^3} + \underline{a_4 x^4} + \underline{a_5 x^5} + \dots$$

$$P(1) + P(\zeta_3) + P(\zeta_3^2) = \underline{3a_0} + \underline{0} + \underline{3a_3} + \underline{0} + \dots$$

Filtro delle radici dell'unità Root Unity Filter.

Es 1 Calcolare $(-\sqrt{3} + i)^{200}$

Es 2: Fattorizzare con polinomi in $\mathbb{R}[x]$ ← Esercizio

a) $x^3 - 2x^2 + 3x - 2$

b) $x^4 - 5x^2 + 6$

Es 3 $p(x)$ polinomio in $\mathbb{R}[x]$

← Esercizi

Alg 1 / 8

$$p(0)=2 \quad p(1)=4 \quad p(2)=6 \quad p(3)=56$$

Qual è il resto di $p(x)$ diviso $x(x-1)(x-2)(x-3)$

Es 4 $p(x)$ polinomio in $\mathbb{R}[x]$ che soddisfa l'identità

$$x p(x+2026) - (x+2027) p(x) = 2026x - 2027$$

Domanda: Qual è il resto della divisione di $p(x)$ per x^2+x

Es 5 $p(x), q(x)$ polinomi in $\mathbb{Z}[x]$, dello stesso grado hanno gli stessi coefficienti ma in un ordine permutato

Tesi: Mostrare che $2026 \mid p(2027) - q(2027)$

Es 6 Siano α, β, γ le tre radici del polinomio seguente. (esso per caso)

a) $x^3 + 4x - 5$

Calcolare $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$

b) $x^3 - x^2 + x + 1$

Calcolare $\alpha^{-2} + \beta^{-2} + \gamma^{-2}$

Es 7 Calcolare la somma dei coefficienti del tipo a_{4k} (indice multipli di 4)

di $(x^{20} + x^{15} - x^{12} + x^{10} + x^9 - x^7 + 2)^{24}$

Es 8 Calcolare la somma dei coefficienti cui indice è divisibile per 3 (a_{3k})

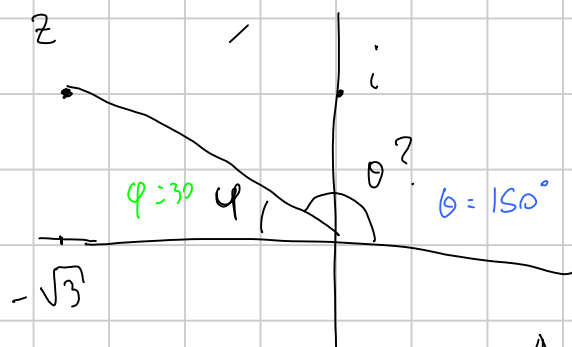
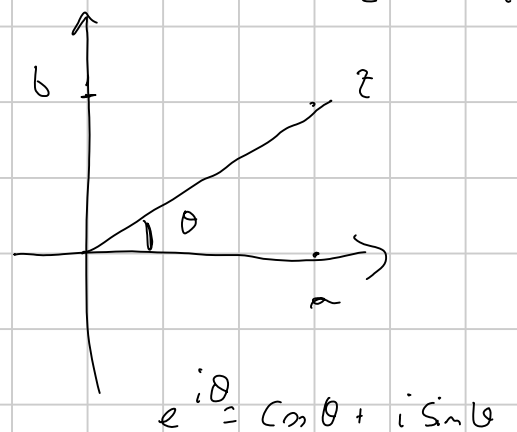
di $(x^4 + x + 2)^{100}$

Corruzione

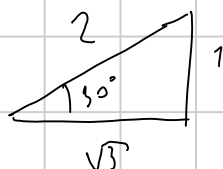
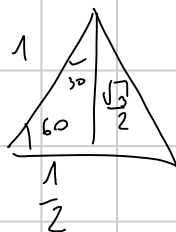
Es 1: $(-\sqrt{3} + i)^{200} = ?$

$$z = \rho \cdot e^{i\theta} = \rho (\cos \theta + i \sin \theta)$$

$$z^n = \rho^n e^{in\theta} = \rho^n (\cos(n\theta) + i \sin(n\theta))$$



non sappiamo che



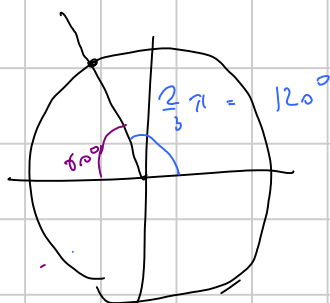
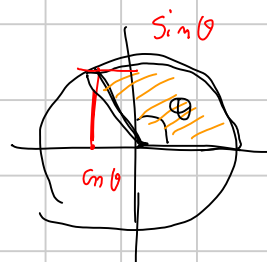
$$\cos 30^\circ = \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin(30^\circ) = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\theta = \frac{5}{6} \pi$$

$$z = 2 e^{i \frac{5}{6} \pi} = (-\sqrt{3} + i)$$

$$\begin{aligned} z^{200} &= 2^{200} e^{i \frac{5}{6} \pi \cdot 200} = 2^{200} e^{i \frac{500}{3} \pi} \\ &= 2^{200} e^{i \frac{500 - 498}{3} \pi} = 2^{200} e^{i \frac{2}{3} \pi} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} e^{i \frac{2}{3} \pi} &= \cos\left(\frac{2}{3} \pi\right) + i \sin\left(\frac{2}{3} \pi\right) \\ &= -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

$$(-\sqrt{3} + i)^{200} = 2^{200} \left(-\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

— 0 —

Es 3 $p(x)$ diviso per x $x-1$ $x-2$ $x-3$

$$p(x) = \underbrace{x(x-1)(x-2)(x-3)}_{\text{diviso per } x, x-1, x-2, x-3} q(x) + r(x)$$

↳ grado 4

→

$r(x)$ ↳ grado ≤ 3

$$r(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

$$x=0 \quad 2 = p(0) = 0 \cdot q(0) + r(0) = d$$

$$d = 2$$

$$x=1 \quad 4 = p(1) = r(1) = a + b + c + d$$

$$\rightarrow a + b + c = 2$$

$$x=2 \quad 6 = p(2) = r(2) = 8a + 4b + 2c + d$$

$$4a + 2b + c = 2$$

$$x=3 \quad 56 = p(3) = r(3) = 27a + 9b + 3c + d$$

$$9a + 3b + c = 18$$

$$3a + b = 0 \quad b = -3a$$

$$18 = 9a + 3b + c = c$$

$$c = 18$$

$$a + b + 18 = 2$$

$$a = 8$$

$$b = -24$$

$$a + b = -16$$

$$b = -3a$$

Es 4: $x p(x+2026) - (x+2027) p(x) = 2026x - 2027$

Voglio resto di $p(x)$ diviso per $x^2 + x$

$$x^2 + x = x(x+1)$$

dividere per $x \rightarrow$ valutare in $x=0$

dividere per $x+1 \rightarrow$ valutare in $x=-1$

Se valuto in $x=0$

$$0 \cdot p(2026) - 2027 \cdot p(0) = -2027$$

$$p(0) = 1$$

Valuto in $x=-1$

$$-1 \cdot p(2025) - 2026 \cdot p(-1) = -2026 - 2027$$

Valuto in $x=-2027$

$$-2027 p(-1) - 0 \cdot p(-2027) = -2026 \cdot 2027 - 2027$$

$$p(-1) = 2027$$

$$p(x) = x(x+1)q(x) + ax + 1$$

$$p(-1) = 0 = -a + 1 = 2027 \quad a = -2026$$

ES 5 $p(x) = q(x)$ polynomials $T_h: 2026 \mid p(2027) - q(2027)$

$$2027 - 1 \mid p(2027) - p(1)$$

$$2027 - 1 \mid q(2027) - q(1)$$

difference $2026 \mid \underline{p(2027) - q(2027)} - \underline{p(1) - q(1)}$

hp stess coefficient: $p(1) = \sum c_{all} = q(1) \quad p(1) - q(1) = 0$

$$2026 \mid p(2027) - q(2027)$$

— 0 —

$$b = 0 \mid p(1) \cdot p(x) \quad b \equiv a \pmod{b=0}$$

— 0 —

ES 6

a) $x^3 + 4x - 5$

$$2^2 + p^2 + x^2 = ?$$

$$\begin{cases} 2\beta x = 5 \\ 2p + 2x + p x = 4 \\ 2 + p + x = 0 \end{cases}$$

$$0 = (2 + p + x)^2 = \underline{2^2 + p^2 + x^2} + 2 \cdot 2\beta + 2 \cdot 2x + 2\beta x$$

$$\begin{aligned} 2^2 + p^2 + x^2 &= (2 + p + x)^2 - 2(2\beta + 2x + p x) \\ &= 0 - 2 \cdot 4 = -8 \end{aligned}$$

b) $x^3 - x + x + 1$

$$2^{-2} + \beta^{-2} + \gamma^{-2}$$

$$\frac{\beta^2 x^2 + 2 x^2 + 2 \beta^2}{2^2 \beta^2 \gamma^2}$$

← 6 separate

$$\begin{aligned} (2\beta + 2x + p x)^2 &= \sum 2^2 \beta^2 + 2 \cdot 2^2 \beta x + 2 \cdot 2 \beta^2 x + 2 \cdot 2 p x^2 \\ &= \dots + 2 \cdot 2 \beta x (2 + p + x) \end{aligned}$$

$$x^3 - x^2 + x + 1 = (x-2)(x-p)(x-\gamma)$$

dividi per x^3 e chiamo $\frac{1}{x} = y$

$$1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} = \left(1 - \frac{2}{x}\right) \left(1 - \frac{p}{x}\right) \left(1 - \frac{\gamma}{x}\right)$$

$$1 - y + y^2 + y^3 = 2p\gamma \left(\frac{1}{2} - y\right) \left(\frac{1}{p} - y\right) \left(\frac{1}{\gamma} - y\right)$$

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{p}, \frac{1}{\gamma} \text{ radici di } 1 - y + y^2 + y^3$$

[Es 7] Calcolare i coeff. di indegnite per n di S

$$p(x) = (x^{20} + x^{15} - x^{12} + x^{10} + x^9 - x^7 + 2)^{24}$$

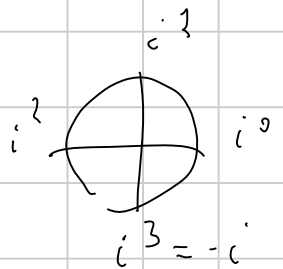
$$\zeta_4 = \text{radice quarta dell'unita'}, \quad \zeta_4^4 = 1$$

$$4S = p(1) + p(\zeta_4) + p(\zeta_4^2) + p(\zeta_4^3)$$

$$x^4 - 1 = 0$$

$$(x^2 - 1)(x^2 + 1) = 0$$

$$\zeta_4 = i$$



$$\zeta_4^2 = -1, \quad \zeta_4^3 = -i$$

$$p(1) = (1 + 1 - 1 + 1 + 1 - 1 + 2)^{24} = 4^{24}$$

$$p(i) = (i^{20} + i^{15} - i^{12} + i^{10} + i^9 - i^7 + 2)^{24} =$$

$$= (1 - i - 1 - 1 + i + i + 2)^{24} = (i+1)^{24}$$

$$p(-i) = \text{conjugato} = (1-i)^{24}$$

$$p(-1) = 2^{24}$$

$$4S = 4^{24} + 2^{24} +$$

$$(1+i)^{24} + (1-i)^{24}$$

$$= 4^{24} + 2^{24} + 2^{12} + 2^{12}$$

$$1 \pm i = \sqrt{2} \cdot e^{i \frac{\pi}{4}}$$

$$(1+i)^{24} = \sqrt{2}^{24} \cdot e^{i \frac{\pi}{4} 24} = 2^{12} \cdot e^{i 6\pi} = 2^{12}$$

$$(1-i)^{24} = \sqrt{2}^{24} \cdot e^{-i \frac{\pi}{4} 24} = 2^{12}$$

