

CONTEGGI

A, B insiemi

• regola della somma

$$X = A \cup B \quad A \cap B = \emptyset$$

$$\Rightarrow |X| = |A| + |B|$$

• regola del prodotto

$X = A \times B$ prodotto cartesiano

$$|X| = |A| \cdot |B| \quad x \in X \quad (a, b) \quad a \in A \quad b \in B$$

A, B indipendenti

↑ numero ↑ seme

ES A, B insiemi finiti $|A| = n$

$$A = \{a_1, \dots, a_n\}$$

• quante sono le funzioni da A a B ?

$$|\{f: A \rightarrow B\}| = ?$$

- $f(a_1)$ quanti valori può assumere? $|B|$
- $f(a_2)$ " " " " ? $|B|$
- ...

→ c'è un'indipendenza $|\{f: A \rightarrow B\}| = \underbrace{|B| \cdot \dots \cdot |B|}_{|A|} = |B|^{|A|}$

• quante sono le funzioni iniettive da A a B ? $|\{f: A \rightarrow B \mid f \text{ iniettiva}\}| = ?$

- $f(a_1)$ può assumere $|B|$ valori
- $f(a_2)$ non può assumere $|B| - 1$ valori
- non possiamo usare la regola del prodotto direttamente

$$|\{f \text{ iniettive}\}| = |B| (|B| - 1) \dots (|B| - |A| + 1)$$

• quante sono le funzioni suriettive?

$$|\{f\}| = |\{f \text{ suriettive}\}| + |\{f \text{ non suriettive}\}|$$

$$B = \{b_1, \dots, b_\ell\}$$

$$|B| = \ell$$

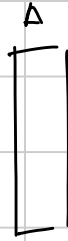
$$F_m = \{f : \text{l'immagine ha } |B|-m \text{ elementi}\}$$

$$|F| \neq |B|, \quad \underbrace{(|B| - 1)^{|A|}} =: g_n$$

$$\binom{N}{k} = \frac{N!}{k! (N-k)!}$$

$$g_n = \binom{|B|}{n} \cdot (|B| - n)^{|A|}$$

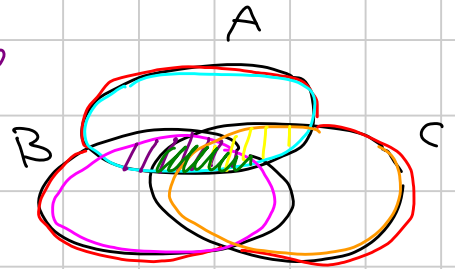
$$|F| = g_1 - g_2 + g_3 - \dots + (-1)^{|B|-1} \underbrace{g_{|B|}}_{\downarrow 0}$$



- Principio di inclusione esclusione

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

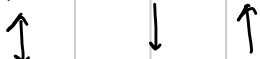


- Regola delle frazioni

$f: A \rightarrow B$ biiezione tra due insiemi

$$\Rightarrow |A| = |B|$$

ES Numero di sottoinsiemi di A con $|A| = n \in \mathbb{N}_0$?



$\{0,1\}^n$ le stringhe di n elementi scelti tra 0 e 1

$$A = \{a_1, \dots, a_n\}$$

$$S \subseteq A$$

se $a_1 \in S \rightarrow$ il primo a della stringa è 1
 $a_1 \notin S \rightarrow$ " " " " " " " " 0
 $a_2 \in S \rightarrow$ il secondo a " " " " " " " " 1
 $a_2 \notin S \rightarrow$ " " " " " " " " 0

9.11

$$\begin{matrix} \text{I} & \text{II} \\ \uparrow & \\ S_1 & S_2 \dots S_n \end{matrix}$$

partiamo da $\phi = S$

- se $S_1 = 1$ $S \cup \{a, 1\}$
- se $S_1 = 0$
- se $S_2 = 1$ $S \cup \{a, 1\}$
- se $S_2 = 0$

$$\therefore$$

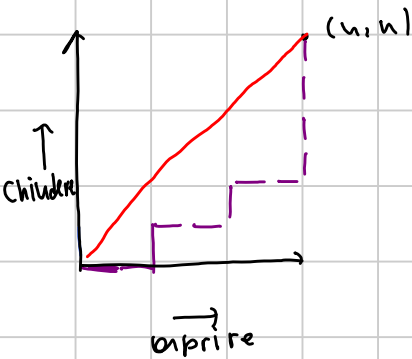
(	.
---	---

$$| \{0,1\}^n | = 2^n$$

ES numero di scritture possibili di n coppie di parentesi $()$ che seguano la regola classica.

$(() (() (())))$

$$0 \leq D = \# \text{ par. aperte} - \# \text{ par. chiuse}$$



calcolare il numero cercato e $\rightarrow$ equivalente a calcolare i percorsi monotoni in una griglia $n \times n$ che non passano sopra la diagonale $\uparrow$

• Ricorsione

Scomporre un problema in casi più piccoli e costruire sui casi piccoli per arrivare a quelli più grandi

- Passo base $P(n)$ è vero

$P(n)$

- Passo induttivo assumiamo $P(n)$ sia vero $\Rightarrow P(n+1)$ è vero

ES lancio n monete ^{in ordine} perdo se mi escono 2 teste consecutive

In quante configurazioni vinco?

se lancio una moneta

$$F(1) = 2$$

finiscono con C

finiscono con T

$$F(2) = 3$$

T C

C C

C T

$$F(3) = 5$$

T C C C T C

T C T C C T

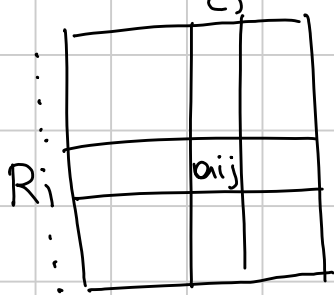
$$F(k) = [F(k-1)] + [F(k-2)]$$

se mi esce
Croce al k -esimo
lancio

se mi esce
testa

DOUBLE COUNTING

CONTINUO



la stessa cosa in due modi diversi

$$\sum_{i,j} a_{ij} = \sum_i \left(\sum_j a_{ij} \right) = \sum_j \left(\sum_i a_{ij} \right)$$

scego la riga scego la colonna

ES Esistono solo 5 solidi platonici

$p=3$ $\triangle$

$p=4$ $\square$

$p=5$ $\triangleleft$

~~$p=6$~~

γ

$$F + V = S + 2$$

$\triangleleft$

$$2 \cdot S = p \cdot F$$

$$2 \cdot S = q \cdot V$$

$q :=$ numero di triangoli per vertice

$$\frac{2 \cdot S}{p} + \frac{2 \cdot S}{q} = S + 2$$

$$\frac{2 \cdot S}{2S} \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \right) = \frac{S+2}{2S}$$

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{2} + \frac{1}{S} > \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} > \frac{1}{2}$$

$$p=3 \rightarrow q=3, 4, 5$$

$$p=4 \rightarrow q=3$$

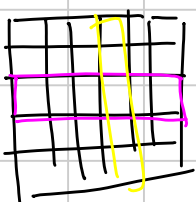
$$p=5 \rightarrow q=3$$

ES C1-10

Ad un party ci sono $12k$ persone. Ciascuno stringe la mano a $3k+6$ persone. Si sa che $\exists N$ t.c.

per ogni coppia di persone A, B il numero di invitati che stringe la mano sia ad A che a B è esattamente N . Quanti valori può assumere N ?

$\downarrow$



} righe : coppie di invitati non ordinate

Colonne: individui

$$a_{\{A,B\},c} = \begin{cases} 1 & \text{se } c \notin \{A,B\} \text{ e } c \text{ stringe la mano sia ad } A \text{ che a } B \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

• Fisso prima la riga $\binom{12k}{2}$

$$\sum_{\text{righe}} \left(\sum_{\text{colonne}} a_{ij} \right) = \sum_{\text{righe}} (N) = N \sum_{\text{righe}} (1) = N \binom{12k}{2}$$

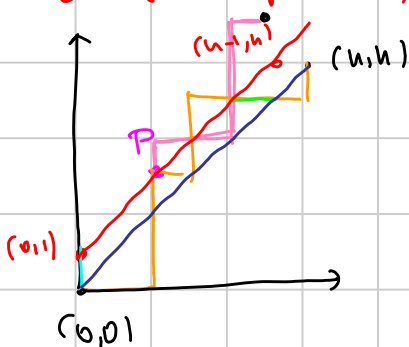
• Fisso prima la colonna $12k$

$$\sum_{\text{colonne}} \left(\sum_{\text{righe}} a_{ij} \right) = \sum_{\text{colonne}} \left(\frac{3k+6}{2} \right) = \left(\frac{3k+6}{2} \right) \sum_{\text{colonne}} 1$$

$$= \left(\frac{3k+6}{2} \right) 12k$$

$$N \binom{12k}{2} = \left(\frac{3k+6}{2} \right) 12k$$

ES (di prima)



percorsi totali - percorsi brutti

↑
percorsi che superano la diagonale

oss 1: se un percorso è brutto passa per la retta passante

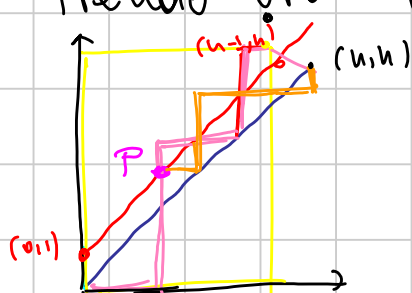
Prendo un percorso brutto
Chiamo P la prima intersezione della retta rossa con il nostro percorso

Considero il percorso da P a (n,n) e lo specchio rispetto alla retta rossa

Il nostro nuovo percorso parte da (0,0) e arriva a (n-1, n+1)

Il nostro percorso brutto è stata mandata in un percorso da (0,0) a (n-1, n+1)

Prendo ora un percorso da (0,0) a (n-1, n+1)



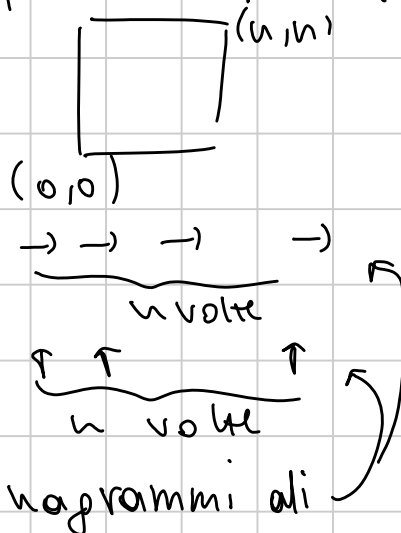
se dimostro che esiste P che interseca per la prima volta la retta rossa, posso specularlo nuovamente rispetto alla retta rossa

ogni percorso che da da $(0,0)$ a $(n-1, n+1)$ deve toccare almeno una volta la retta rossa
 posso quindi specchiare nuovamente. Finisce nuovamente in $(n, n) \rightarrow$ Il nostro percorso è brutto

$\rightarrow$ I percorsi brutti sono tanti quanti i percorsi monotoni da $(0,0)$ a $(n-1, n+1)$

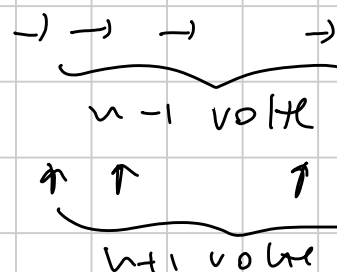
percorsi belli = percorsi totali - percorsi brutti

$$= \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1}$$



$$\binom{2n}{n}$$

= percorsi da $(0,0)$ a $(n-1, n+1)$



$$\binom{2n}{n-1}$$

ES. 105, 106, 107
 118, 119, 122, 123, 124
 C1 : 3, 4, 5, 6, 14
 + provare a finire C1.10 $\leftarrow$ hint

C1-10

$$N \binom{12k}{2} = \binom{3k+6}{2} 12k$$

$$N \approx \frac{12k(12k-1)}{2} = \frac{(3k+6)(3k+5)}{2} 12k$$

$$N(12k-1) = (3k+6)(3k+5) \\ \uparrow \\ = 9k^2 + 33k + 30$$

$$(12k-1, 9k^2 + 33k + 30)$$

$$\uparrow$$

$$4 \mid 12k-1 \quad \rightarrow$$

$$(12k-1, 4(9k^2 + 33k + 30))$$

$$3 \times 12k-1 \quad \uparrow$$

$$(12k-1, \frac{4}{3}(9k^2 + 33k + 30))$$

$$(12k-1, 12k^2 + 44k + 40)$$

$$(12k-1, (12k^2 + 44k + 40) - (12k-1)k)$$

$$(12k-1, 45k + 40)$$

$$(12k-1, 45k + 40 - (12k-1)3)$$

$$(12k-1, 3k + 43)$$

$$4 \mid 12k-1$$

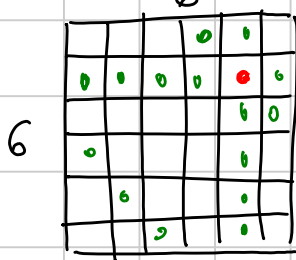
$$(12k-1, 36k + 172)$$

$$(12k-1, 36k + 172 - (12k-1)3)$$

$$(12k-1, 175) \quad 175 = 7 \cdot 25$$

$$\boxed{k=3}$$

36 persone
15 giorni



6
N
5 5 5 15

ES 14

$$p(x) = (x-1)^9 = a_9 x^9 + a_8 x^8 + \dots + a_1 x + a_0$$

$$f(x) = a_9 9^x + a_8 8^x + \dots + a_1 1^x$$

$$= (-1)^{9-1} \binom{9}{0} 9^x + (-1)^{9-1} \binom{9}{1} 8^x + \dots$$

$$f(10) = \binom{9}{0} 9^{10} - \binom{9}{1} 8^{10} + \binom{9}{2} 7^{10} - \dots$$

$$\boxed{} \rightarrow \boxed{}$$

