

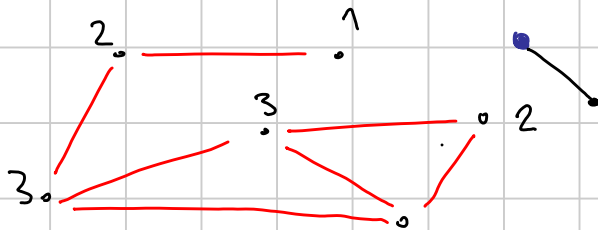
C2 - BASIC

Note Title

04/09/2026

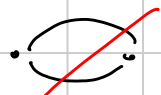
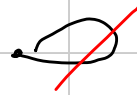
GRAFI

$G = (V, E)$ in cui V è l'insieme dei vertici (o nodi)
 E è l'insieme degli archi $E \subseteq \binom{V}{2}$



studieremo

grafi semplici



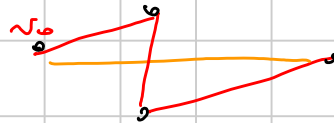
GRADO DI UN VERTECE

$v \in V$

$$\deg v = |\{e \in E \mid v \in e\}|$$

$$\sum_{v \in V} \deg v = 2|E|$$

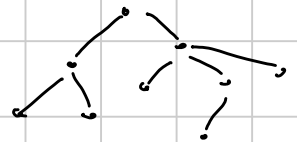
* CAMMINO: successione di archi che parte da un vertice v_0



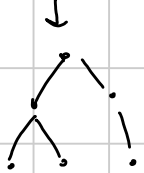
* CICLO: cammino che inizia e finisce con lo stesso vertice

* GRAFO CONNESSO: $\forall v, w \in V \exists$ un cammino da v a w

* ALBERO: grafo connesso senza cicli



ES In un albero $|E| = |V| - 1$

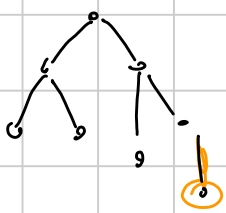


lavoro per induzione sugli archi

• se ho $|E| = 0$ $|V| = 1$ ok

• se ho $|E| = 1$ $|V| = 2$ ok

→ Passo induttivo: supponiamo che per $|E| = n$ funzioni



[ES In ogni albero esiste almeno una foglia

Prendo un arco con un nodo di grado 1

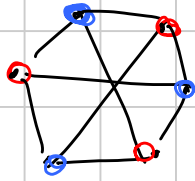
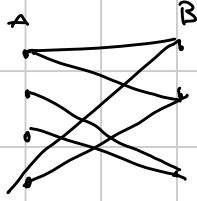
Individuo una foglia

Tolgo la foglia e l'unico arco a lei collegato

$|E| - 1$ $|V| - 1$ osservo che è ancora un albero
per ip. induttiva

$$|E| - 1 = |V| - 1 - 1 \Rightarrow |E| = |V| - 1$$

★ GRAFO BIPARTITO : $V = A \cup B$ e $\forall e \in E \quad |e \cap A| = |e \cap B| = 1$



← unione disgiunta $A \cap B = \emptyset$
 ← grafi bipartiti

PIGEON HOLE

Se ho $N+1$ piccioni e devo metterli in N cassette allora esiste almeno una cassetta con almeno 2 piccioni.

ES In un grafo esistono almeno due vertici con lo stesso grado.

Gradi possibili in un grafo con n vertici
 $0, 1, 2, \dots, n-1$

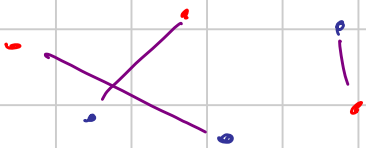
Se ho un nodo di grado 0 allora non posso averne uno di grado $n-1$ e viceversa.

→ ho $n-1$ gradi possibili e n vertici $\Rightarrow$ per pigeonhole almeno due nodi hanno lo stesso grado.

PRINCIPIO DELL'ESTREMALE

Voglio che un oggetto abbia una certa proprietà P .
 Ne prendo uno che massimizza o minimizza una certa quantità Q . Cerco di dimostrare che questo ha la proprietà P .

ES Dato un grafo con n punti rossi e n punti blu, $3a3$ non allineati, allora esistono n segmenti che non si intersecano e che collegano punti di colore diverso.



$Q =$ somma delle lunghezze dei segmenti diseguali

prendiamo una configurazione in cui Q è minimo. Vogliamo

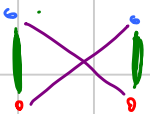
dimostrare che ha la proprietà richiesta $P.A.$ Esisto due segmenti che si intersecano

voglio dimostrare che questo va contro la

richiesta di Q minimo

si può calcolare che la somma dei segmenti verdi è minore di quella dei viola

→ la nostra configurazione non ha intersezioni



INVARIANTI E MONOVARIANTI

* INVARIANTE: una proprietà che non cambia quando faccio delle mosse

ES Ho i numeri $1, 2, \dots, n$. Una mossa consiste nello scegliere a, b tra quelli scritti, cancellarli e scrivere $|a-b|$. Alla fine avrò un solo numero. Per quali n posso essere sicuro che sia pari?



Invariante: la parità della somma dei numeri scritti

$$a, b \mapsto |a-b| \quad a+b \equiv |a-b| \pmod{2}$$

Se alla fine voglio avere un numero pari, voglio partire con una somma iniziale pari

$$\frac{n(n+1)}{2} \equiv 0 \pmod{2}$$
$$4 \mid n(n+1)$$
$$\begin{array}{l} 4 \mid n \quad \vee \quad 4 \mid n+1 \\ n \equiv 0 \pmod{4} \quad \vee \quad n \equiv 3 \pmod{4} \end{array}$$

* MONOVARIANTE: quantità che cresce o decresce sempre

ES A e B giocano ad un gioco. Ci sono varie pile di monete e ci sono due mosse possibili:

(1) togliere una moneta da una pila che ha almeno due monete

(2) spezzare in due una pila con almeno due monete

Se non puoi più muovere perdi.

a) Il gioco finisce sempre?

b) In tal caso posso determinare chi vince?

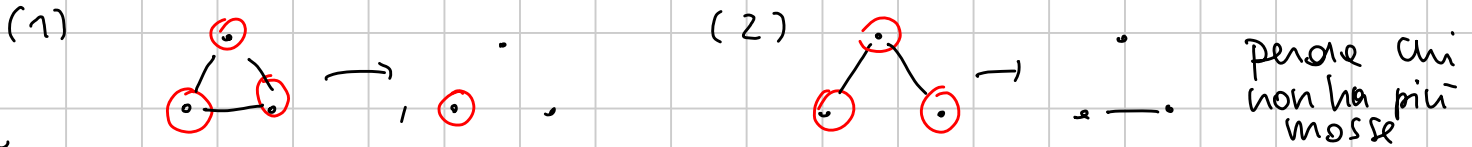
a) MONOVARIANTE $M = \# \text{ monete} - \# \text{ pile}$

Sia (1) che (2) fanno decrescere M . Quando $M=0$ ho tante pile quante monete, ovvero una moneta per pila e quindi il gioco finisce.

b) Dal momento che M diminuisce di esattamente 1 ad ogni mossa, il giocatore A riceve M sempre con la stessa parità e così B. A quel punto il giocatore che riceve M pari perderà a prescindere dalle mosse eseguite. Si chiama che inizia A. Se prima di iniziare M è pari perderà, altrimenti se è dispari vincerà.

ES C2-8

G = grafo. Alberto e Barbara giocano su di esso
 = (V, E) Ci sono due mosse possibili



- 1) Il gioco finisce sempre?
- 2) Il vincitore non dipende dalla strategia?
- 3) Chi vince?

1) Noto che ad ogni mossa il numero di archi diminuisce strettamente

(1) $E_n = E_{n-1} - 3$ (2) $E_n = E_{n-1} - 1$

→ Dopo al più 16 mosse finisce

2) Noto che indipendentemente dalle mosse la parità del grado di ogni vertice rimane costante.

↑ Il gioco finisce quando ogni vertice ha grado 0 o 1.

Avevo osservato che la parità dei gradi dei vertici non cambia e avendo alla fine solo 0 e 1 come gradi possibili, posso determinare, prescindendo dalle mosse la ~~configurazione finale~~ il grado finale di ogni vertice.

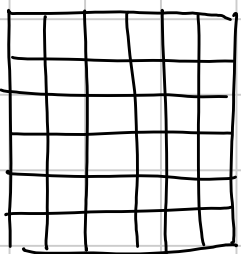
Osservo che ogni giocatore riceve una configurazione con un numero di archi sempre con la stessa parità. In particolare se 16 è pari Alberto riceverà sempre un numero pari di archi e Barbara dispari e se 16 è dispari viceversa.

3. Posso contare il numero di archi nella configurazione finale contando il numero di vertici nella configurazione iniziale con grado dispari. Se il numero di archi finali e iniziali hanno la stessa parità vince Barbara altrimenti vince Alberto.

ES Il numero di nodi di grado dispari è pari.

COLORAZIONI

ES Ho una griglia $n \times n$. Per quanti n è possibile tassellarla con piastrelle del tipo



$\cdot h^2$ vogliamo tassellare con piastrelle di area 4

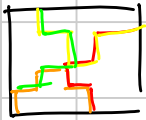
→ n deve essere pari

$$n^2 = 4 \cdot k \quad \Rightarrow \quad 4 | n^2 \Rightarrow 2 | n$$

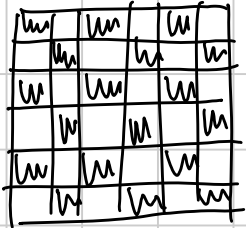
di piastrelle



- se n è multiplo di 4 noto che posso dividere la griglia in sottogriglie 4×4 che posso tassellare nel seguente modo



- $n \equiv 2 \pmod{4}$



9;



3B1N

ho tante caselle bianche quante nere

$$|3N1B| = |3B1N|$$

$$|\text{tessere totali}| \leq |3N1B| + |3B1N|$$

$$= 2 |3N1B|$$

$$\rightarrow 2 |3B1N| \leftarrow \text{intero positivo}$$

$$n^2 = 2 |3B1N| \cdot 4$$

$$\rightarrow 8 |n^2| \Rightarrow 4 |n$$

$$n \equiv 2 \pmod{4}$$

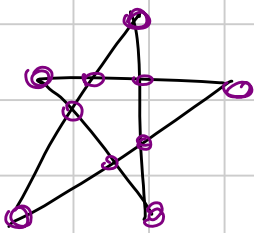
$$n = 2(2k+1)$$

$$n^2 = 4(4k^2 + 4k + 1)$$

$$2 \otimes m = 4k^2 + 4k + 1$$

pari dispari 2

ES Ho



ogni lampadina può essere A o S
mossa: seleziono un segmento e cambio lo stato di tutte le lampadine su segmento. Sono tutte spegne inizialmente

Posso accenderle tutte contemporaneamente?

Guardo le 5 lampadine agli estremi

ogni mossa cambia lo stato di 2 lampadine

$$SS \rightarrow AA \quad SA \rightarrow AS \quad AS \rightarrow SA \quad AA \rightarrow SS$$

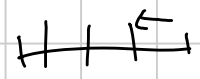
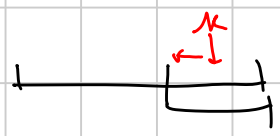
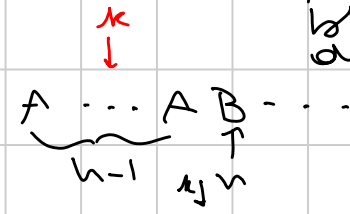
osserviamo che la parità del numero di lampadine agli estremi accese non cambia

Noi abbiamo 5 lampadine agli estremi e 0 accese $\rightarrow$ non possono accendersi contemporaneamente.

ES IMO 1 - 2022

Ho una stringa lunga $2n$, n monete del tipo A e n monete del tipo B. Scelgo $1 \leq k \leq 2n$.
 Identifico la moneta k -esima e prendo la sottostringa di monete uguali massima che la contiene e sposto tutta la sottostringa a sinistra. Per quanti k e n arriviamo ad avere le prime n uguali?

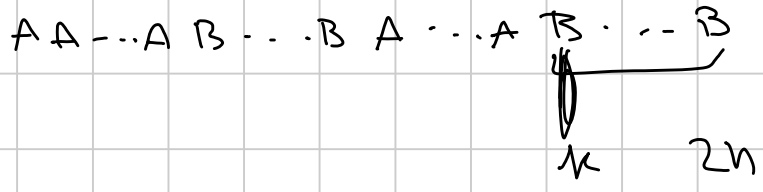
• $k < n$ se prendo la configuratione con le prime $n-1$ monete A e la n -esima B. Ad ogni mossa spostiamo sempre il primo blocco e lo riposizioniamo nel posto di partenza $\rightarrow$ la configuratione non cambia.



se abbiamo solo 2 blocchi $\hookrightarrow$ abbiamo finito
 se abbiamo 3 blocchi: a un certo punto finiamo
 se ho 4 blocchi possono alternarsi sempre

se k prende sempre e solo l'ultimo blocco la tela da k a $2n$ deve avere lo stesso blocco

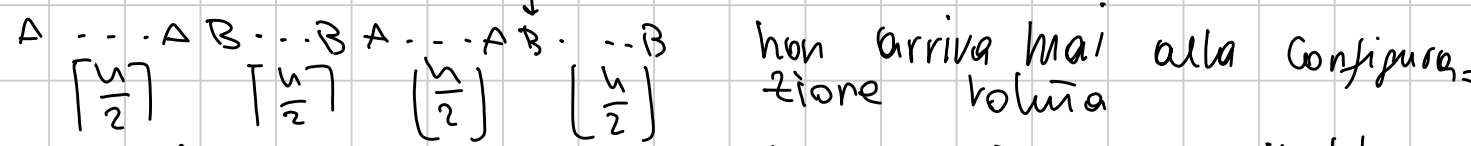
$$\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \quad \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \quad \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \quad \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \quad \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$$



$$2n - k + 1 = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$$

$$k > \left\lceil \frac{3n}{2} \right\rceil$$

• se $k > \left\lceil \frac{3n}{2} \right\rceil$ Allora dico che la configuratione $\left\lceil \frac{3n}{2} \right\rceil + 1$



Infatti in questo caso selezionerò sempre il blocco più a destra ad ogni mossa e quindi il numero di blocchi non cambia mai e dopo 4 mosse mi trovo nella situazione di partenza

• $n \leq k \leq \left\lceil \frac{3n}{2} \right\rceil$ CLAIM: dopo un po' di mosse la # blocchi si riduce $\rightarrow$ fino ad arrivare a 2 osserviamo che se il blocco selezionato non è né quello più a sinistra né quello più a destra, allora una mossa fa diminuire il

numero di blocchi totali, dato che spostare il blocco fa avvicinare i suoi vicini.

- Il blocco non può essere quello più a sinistra tranne se $k=n$ e le prime n monete sono tutte uguali (e in quel caso abbiamo finito)
- Se il blocco selezionato è il più a destra vuol dire che è lungo almeno $2n-k+1$
 - se abbiamo 2 blocchi totali abbiamo finito
 - se abbiamo 3 blocchi dopo una mossa avremo finito: infatti la configurazione sarà del tipo $A \dots A B \dots B A \dots A$ (a meno di rinominare A e B) e quindi le A ^{$\uparrow k$} vengono unite
 - se abbiamo almeno 4 blocchi
 - * se dopo una mossa il blocco contiene la moneta k -esima non è quello finale allora il numero di blocchi scende.
 - * se dopo una mossa il blocco contiene la moneta k -esima ~~ma~~ è quello più a destra allora posso fare un'altra mossa senza variare il numero di blocchi

• Se ~~il blocco~~ la moneta k -esima non è nei primi blocchi allora il numero di blocchi diminuisce

③ Altrimenti vuol dire che il blocco considerato è lungo almeno $2n-k+1$, ma noi abbiamo detto di avere almeno 4 blocchi, ovvero 2 per tipo, quindi abbiamo ~~almeno~~ 2 blocchi di B lunghi almeno $2n-k+1$ ma $2n-k+1 + 2n-k+1$

$$= 4n - 2k + 2$$

$$\geq 4n - 2 \left\lceil \frac{3n}{2} \right\rceil + 2 > n$$

$\rightarrow$ È assurdo.

$$\bullet n \leq k \leq \left\lceil \frac{3n}{2} \right\rceil$$

○ Vogliamo dimostrare che dopo 3 mosse il numero di blocchi diminuisce, per stabilizzarsi a 2 blocchi.

- se il blocco contiene la moneta k -esima non è né il più a destra né il più a sinistra, dopo una mossa i due blocchi ai suoi estremi si uniranno $\Rightarrow$ il numero di blocchi diminuisce.
- se il blocco è il più a sinistra le monete dalla 1 alla k sono uguali $\rightarrow$ le prime k ma $n \leq k \leq \left\lceil \frac{3n}{2} \right\rceil \Rightarrow k=n$, le prime n sono uguali, ho due blocchi $\rightarrow$ ho finito
- se il blocco è il più a destra $\rightarrow$ le monete dalla pos. k alla n sono uguali $\rightarrow$ il blocco ha almeno $2n-k+1$ lettere
Eseguo una mossa:

- ⊕ se il numero di blocchi era 2 in parentesi $\rightarrow$ ok
- ⊕ se il numero 3 dopo una sola mossa ho unito i due agli estremi $\rightarrow$ ne ho solo 2
- ⊕ se il numero di blocchi è almeno 4 eseguo una mossa
 - * se il blocco della moneta k -esima non è quello finale o iniziale ho finito (scende di 1, come prima)
 - * se è quello iniziale come prima
 - * se è quello finale posso eseguire un'altra mossa
 - ◇ se il blocco della moneta k -esima non è né iniziale né finale ok
 - ◇ se è iniziale (può capitare)
 - ◇ se è quello finale allora le ultime monete da k a $2n$ sono uguali $\rightarrow$ almeno $2n - k + 1$
 - $\rightarrow$ noto che questo blocco era le stesse lettere del primo blocco di almeno $2n - k + 1$ ma

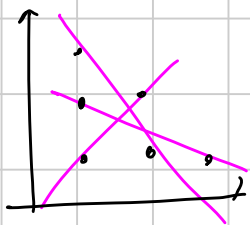
$$2n - k + 1 + 2n - k + 1$$

$$= 4n - 2k + 2$$

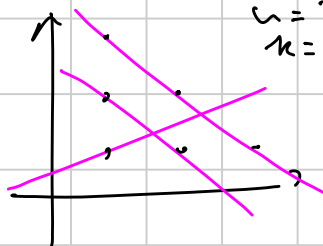
$\rightarrow$ assurdo

$$\geq 4n - 2\left\lceil \frac{3n}{2} \right\rceil + 2 > n$$

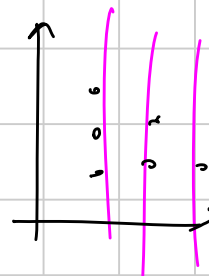
ES IMO 1 - 2025



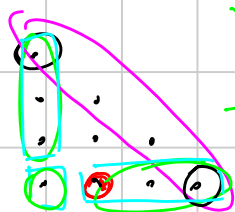
$u=3$
 $k=3$



$u=3$
 $k=1$



$u=3$
 $k=0$



$n \geq 4$

$u-1 = n-1$

$(x,1), (1,y), (1,1) \quad x, y \neq 1$

n

$n-1$ rette passanti per più
 $n-1$ punti $(x,1)$

$n-1$ rette parallele per più

le rette per $n-1$ punti $(1,y)$
diverse per $(1,1)$ e $(n,1)$ sono

$\rightarrow$ condizioni sulle n rette

consideriamo i punti sulla retta

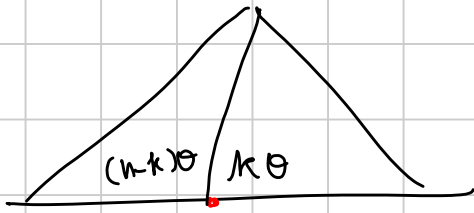
del tipo $x+y = n+1 \rightarrow$ ne abbiamo

ne copriamo al massimo 1 con quella
per $(1,1)$ e poi abbiamo coperto $(1,n)$
e $(n,1) \rightarrow$ sono tutti i punti coperti

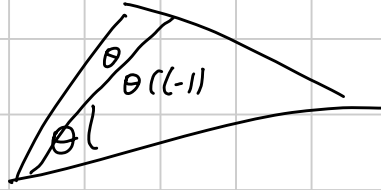
$\rightarrow 3$

ES 1mo 4 - 2026

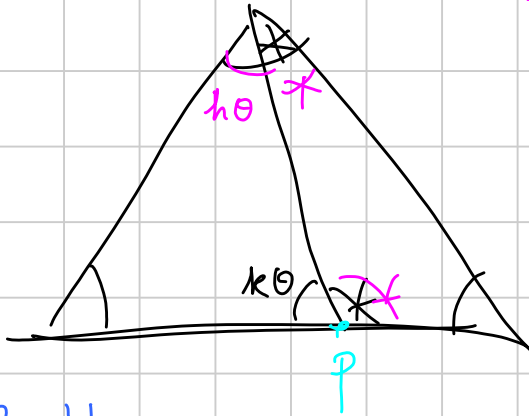
vinco: $\odot = \frac{180}{n}$ $n \geq 2$



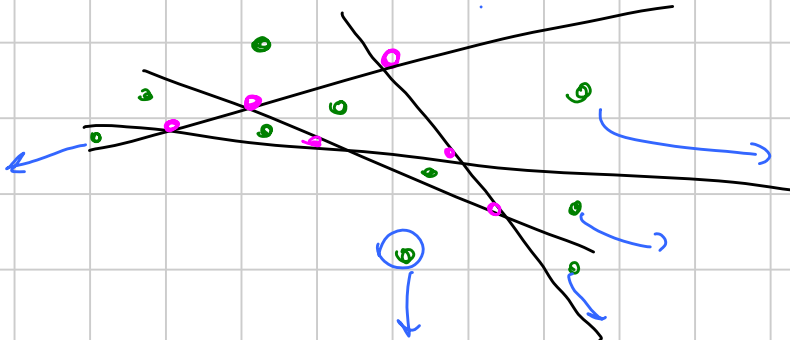
$\theta \neq \frac{180}{n}$ $n \geq 2$



k, h intero



ES C2-11



↓ gravita-
oss

palline num. creato

$$n + \binom{n}{2} + 1$$

$$n + \frac{n(n-1)}{2} + 1$$

ES C2-10

Pavimento

n quadri, 1 componente connessa
ROSA -1 AZZURRO +1



$$\sum_{\substack{i,j \\ \text{amici}}} c_i c_j$$

aumenta
se cambio
colore

A ogni cambiamento aumento

$$-\frac{n(n-1)}{2} \leq \sum_{\substack{i,j \\ \text{amici}}} c_i c_j \leq \frac{n(n-1)}{2}$$