

Problemi : IMO 2025.4
 IMO 2026.1
 IMO 2017.1
 EGMO 2025.1
 EGMO 2023.1
 EGMO 2021.1

IMO 2025.4 $(a_n)_{n \geq 0}$ è una sequenza di interi positivi con almeno 3 divisori propri (cioè diversi dal numero stesso). Per ogni n vale " a_{n+1} è la somma dei 3 divisori propri più grandi di a_n ". Quali sono i possibili valori di a_0 ?

IMO 2026.1 ci sono 2026 interi positivi su una lavagna. Una mossa consiste nel sostituire $m, n > 1$ con i numeri $\frac{\gcd(m, n)}{\text{MCD}(m, n)}$ e $\text{MCD}(m, n)$.

a. Mostrare che indipendentemente dalle mosse che si fanno prima o poi (dopo un numero finito di mosse) trova un solo numero $M > 1$ sulla lavagna.

b. Mostrare che M dipende solo dai numeri iniziali e non dalle mosse fatte.

IMO 2017.1 $(a_n)_{n \geq 0}$ $a_{n+1} = \sqrt{a_n}$ se a_n è un quadrato perfetto, tutti i termini > 1 $a_{n+1} = a_n + 3$ altrimenti.

Per quali valori di a_0 esiste un numero che compare infinite volte nella sequenza?

EGMO 2025.1 N intero $c_1 < \dots < c_m$ sono i numeri minori di N coprimi con N .

Trovare per quali N $\text{MCD}(N, c_i + c_{i+1}) \neq 1$ per tutti gli i in $\{1, \dots, m-1\}$.

EGMO 2023.1 $a_1, \dots, a_n$ reali positivi

$$b_i = \frac{a_{i-1} + a_{i+1}}{a_i} \quad (\text{con } a_n = a_0, a_{n+1} = a_1)$$

a_1
 a_2
 a_3
 a_4
 a_5

se vale $a_i \leq a_j \Leftrightarrow b_i \leq b_j$ per ogni i, j

allora $a_1 = \dots = a_n$

EGMO 2021.1 2021 è un numero blu

per ogni m , se $\{m, m+1, m+2\}$ contiene almeno un numero blu allora sono tutti blu.

2021 è per forza blu?

Soluzioni

IMO 2025.1

$(a_n)_{n \geq 0}$ t.c. a_{n+1} è la somma dei 3
divisori propri maggiori di a_n
↑ questi hanno
3 divisori propri

quando muoio? quando ho pochi divisori
 P, P^2

il primo numero 6 $6 \rightarrow 1, 2, 3$

$6 \rightarrow 6 \rightarrow 6 \rightarrow \dots \rightarrow$ vinco

$8 \rightarrow 5+2+1 \rightarrow 7$

$12 \rightarrow 6+5+3 \rightarrow 13$

$10 \rightarrow 5+2+1 \rightarrow 8 \rightarrow 7$

$14 \rightarrow 7+2+1 \rightarrow 10$

1 $13 \rightarrow 5+3+1 \rightarrow 9$

$16 \rightarrow 8+4+2 \rightarrow 15$

$18 \rightarrow 9+6+3 \rightarrow 18$

6, 18

6, 18

18, 6

6, 18

$28 \rightarrow 14+7+4 \rightarrow 25$

$12 \rightarrow 13$

$24 \rightarrow 26$

$30 \rightarrow 31$

istante divisori grandi $\leftrightarrow$ divisori piccoli

6, 18

$n/2, n/3, n/6$ $(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}) = 1$

$n/5, n/5$

posso partire con un divisore?

se a_n è dispari allora a_{n+1} è dispari

$$a_{n+1} = a_n/d_1 + a_n/d_2 + a_n/d_3 \leq a_n \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} \right) < a_n \quad \boxed{\text{No}}$$

a_n è pari per tutti gli n

se invece 3 non divide a_n ?

$$a_{n+1} \leq \frac{a_n}{2} + \frac{a_n}{4} + \frac{a_n}{5} < a_n \quad \text{però!}$$

$$2 \mid a_n \text{ e } 3 \nmid a_n \rightarrow a_{n+1} = a_n \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} \right)$$

① $4|2n \quad x=4$, cioè $2n_{n+1} = 2n \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \right) =$

$2n = 16 \quad 8 \quad 4 \quad 2$

$2n = 20 \quad 10 \quad 5 \quad 4 \quad -$

$= \frac{3 \cdot 2n}{4}$ 

$4|2n \quad 2n \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right)$

$3|2n_{n+1}$

④ $x=p \quad y=2p$

$\frac{3 \cdot 2n}{2p} + \frac{2n}{2}$

⑤ $x=p \quad y=p \rightarrow$ dispari

$2 \nmid 2n \rightarrow 2 \nmid 2n_{n+1} \text{ e } 2n_{n+1} < 2n$

$2|2n \text{ e } 3 \nmid 2n_{n+1} \rightarrow 2n_{n+1} < 2n \text{ e } (3 \nmid 2n_{n+1} \text{ oppure } 2 \nmid 2n_{n+1})$

$\hookrightarrow$ se $6 \nmid 2n$ allora $2n_{n+1} < 2n$
 riassunto: voglio $6|2n$

Noi abbiamo $m \rightarrow \frac{m}{2}, \frac{m}{3}, \frac{m}{6} \rightarrow$ vinco

$\frac{m}{2}, \frac{m}{3}, \frac{m}{4} \rightarrow ?$
 $\frac{m}{2}, \frac{m}{3}, \frac{m}{5} \rightarrow ?$

4 divide $2n_{n+1} = 2n \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right) = \frac{13}{12} 2n$

$\downarrow$?
 dopo core, $6 \nmid 2n_{n+1} \rightarrow$ perdo
 $6|2n_{n+1}, 4 \nmid 2n_{n+1} \rightarrow$ caso brutto
 stesso caso, ma non per sempre

5 divide $2n$, 4 no, $2n_{n+1} = 2n \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} \right) = \frac{31}{30} 2n$

$\hookrightarrow$ problema $\rightarrow$ è dispari

quali sono i numeri che vanno bene

$6 \cdot m, m$ non div. per $2, 5$

$(6 \cdot m) \cdot \frac{12}{13}$ vanno bene

$$(6 \cdot 13 \cdot 7) \cdot \frac{12}{13} \rightarrow 6 \cdot 7 \cdot 12 \quad 6 \cdot 7 \cdot 13$$

$$(6m) \left(\frac{12}{13} \right)^k \sim 6 \cdot 12^k \cdot m$$

Come scrivo la soluzione?

I numeri che funzionano sono tutti e soli quelli della forma $6 \cdot 12^k \cdot m$, con $k \geq 0$, $m \geq 0$ e $2 \nmid m$, $3 \nmid m$.

Chiamiamo "nipote" di un numero la somma dei suoi 3 più grandi divisori propri, e diciamo che un numero funziona se genera una sequenza infinita di nipoti.

Notiamo che i 3 migliori div. propri di n sono delle forme n/d_1 , n/d_2 , n/d_3 con d_1, d_2, d_3 i minori divisori di $n \neq 1$.

→ se n coincide con suo nipote allora funziona quindi i numeri del tipo $6 \cdot 12^k \cdot m$ con $k=0$ e $m \dots$ funzionano, perché i 3 divisori più piccoli sono 2, 3, 6 e il nipote di $n = 6 \cdot m$ è $n \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} \right) = n$.

→ Un numero funziona $\Leftrightarrow$ suo nipote funziona

Mostriamo per induzione in $k \geq 0$ che $6 \cdot 12^k \cdot m$ funziona per ogni m (non div. per 2, 3)

per $k=0$ (caso base) vedi sopra

passo induttivo (suppongo vero fino a k e mostro per $k+1$)

$$\text{il nipote di } 6 \cdot 12^{k+1} \cdot m \text{ è } n \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} \right) = \frac{13}{12} n = 6 \cdot 12^k \cdot m \cdot \frac{13}{6}$$

↓
funziona.

Quindi n funziona.

Ora manca "se un numero funziona allora è della forma $6 \cdot 12^k \cdot m$ "

Incasetta: $[6 \nmid n \rightarrow 6 \nmid \text{nipote di } n] \rightarrow 6 \nmid n$ non va bene
 $[6 \nmid n \rightarrow \text{nipote di } n \leq n]$

se $6 \nmid n$: se $5 \nmid n$ a un certo punto esce da questo caso

se $5 \nmid n$ se $5 \nmid n \rightarrow 2 \nmid \text{nipote di } n$ però

se $5 \nmid n$ vince

LEMMA 1: $6 \nmid n \rightarrow 6 \nmid \text{nipote di } n$

DIM: se $2 \nmid n$ il nipote di n è somma di 3 dispari $\rightarrow 6 \nmid$

se $2 \nmid n$ e $3 \nmid n$ ho 3 casi

$6 \nmid \text{nipote} \dots \left\{ \begin{array}{l} \text{a. } 5 \nmid n, \text{ nipote} = n/2 + n/4 + n/5 = \frac{3n}{5} + \frac{n}{4} \\ \text{ma } 3 \nmid n/4, 3 \nmid 3n/5 \rightarrow 3 \nmid \text{nipote} \\ \text{b. } 5 \nmid n, \text{ nipote} = n/2 + n/p + n/2p \\ \text{per } p \text{ primo } \rightarrow 3 \\ \text{(come prima)} \quad 3 \nmid \frac{3n}{2p} + \frac{n}{2} \\ \text{c. } 5 \nmid n, \text{ nipote} = n/2 + n/1 + n/9 \text{ dispari} \end{array} \right.$

LEMMA 2: $6 \nmid n \rightarrow \text{nipote di } n < n$

• $2 \nmid n$ nipote $\leq n \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} \right) < n$

• $3 \nmid n$ nipote $\leq n \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \right) < n$

Quindi se esiste a_i t.c. $6 \nmid a_i$ vale per ogni $j \geq i$

$a_j > a_{j+1}$, assurdo se assumiamo la seq. infinita

$\hookrightarrow$ se un numero funziona allora è multiplo di 6

Ora se $6 \nmid n$ ho due casi

① $12 \nmid n$ (che poi è $5 \nmid n$)

② $12 \nmid n$

② se $5 \nmid n$ il nipote di n è $n(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}) = n$
 $\hookrightarrow$ i numeri della forma $6n, 24n, 54n \checkmark$

se $5 \mid n$ il nipote ~~di~~ è dispari

④ il nipote è $13/12 n$. Se $n = 12^k t \rightarrow 13t \cdot 12^{k-1}$

(e un numero funzione $\Leftrightarrow$ un no discendente funzione)

n funzione $\Leftrightarrow 13^k t$ funzione

$13^k t$ funzione $\Leftrightarrow$ è $6 \cdot m' \cdot 13^k$ con m' non div. per 2 o 5

Quindi se n funzione $n = 6 \cdot 12^k \cdot m$

IMO 2026. 1

2026 intero in una base

m, n maggiori di 1

$$\hookrightarrow \frac{\text{mcm}(m, n)}{\text{MCD}(m, n)}, \text{MCD}(m, n)$$

① ~~la~~ prime o poi ho solo un $M > 1$ sulle basi

② M non dipende dalle masse.

Voglio cercare una qualche quantità globale che decresce. Provo il prodotto $mn \rightarrow \text{mcm}(m, n)$

Quindi scende quando m, n coprimo

$$mn = \text{mcm}(m, n) \text{MCD}(m, n)$$

me sto aggiungendo un 1

se P è il prodotto totale $\rightarrow$ o decresce o aggiunge un 1

$P + \#(\text{numero diversi da 1}) \rightarrow$ scende sempre

fixiamo le masse $\rightarrow M, 1, \dots, 1$

b.: non dipende dalle masse

1^a idea: ha senso fattorizzare

2^a idea: per semplificare questo solo fattori 2

$$2 \ 4 \rightarrow 2 \ 2 \rightarrow 1 \ 2 \quad \text{note: } 2^a \ 2^b \ 2 \geq b$$

$$2 \ 8 \rightarrow 2 \ 4 \rightarrow 2 \ 2 \rightarrow 1 \ 2 \quad \downarrow$$

$$2 \ 16 \rightarrow 2 \ 8 \rightarrow 2 \ 2^k \rightarrow 1 \ 2$$

$$4 \ 4 \rightarrow 1 \ 4 \quad 2^2 \ 2^k \rightarrow 1 \ 2 \text{ se } k \text{ dispar.}$$

$$4 \ 8 \rightarrow 2 \ 4 \rightarrow 1 \ 2$$

$$4 \ 16 \rightarrow 4 \ 4 \rightarrow 1 \ 4$$

$$4 \ 32 \rightarrow 4 \ 8$$

$$1 \ 4 \text{ se } k \text{ pari}$$

prova

$$8 \rightarrow 1 \rightarrow 8$$

$$8 \rightarrow 2 \rightarrow 8 \rightarrow 1 \rightarrow 2$$

$$8 \rightarrow 3 \rightarrow 8 \rightarrow 1 \rightarrow 2$$

$$8 \rightarrow 6 \rightarrow 8 \rightarrow 1 \rightarrow 8$$

cycle again

$$8 \rightarrow 2 \rightarrow 8 \rightarrow 2 \rightarrow 8$$

2^6

$$2^1 \rightarrow 1 \rightarrow 2$$

$$2^2 \rightarrow 1 \rightarrow 4$$

$$2^3 \rightarrow 1 \rightarrow 8$$

$$2^4 \rightarrow 1 \rightarrow 16$$

$$2^5 \rightarrow 1 \rightarrow 32$$

$$2^6 \rightarrow 1 \rightarrow 64$$

perché?

congettura: se guardo una mossa, questa preserva
MCD (esponenti relativi a un primo) per i

due coinvolti

→ MCD (esponenti rel. a un primo) per tutti i numeri
(per tutti i primi)

MA → se arrivo alla fine, →

a. Siano P_i il prodotto dei numeri nella lacrima dopo i mosse
e x_i il numero di valori > 1 nella lacrima dopo i mosse.

• $P_i + x_i \geq P_{i+1} + x_{i+1}$ è chiaro: $P_{i+1} = \frac{\max(a_i, b_i)}{mn} P_i$

e il numero di 1 può solo aumentare: $x_{i+1} \geq x_i$

Vale $>$: se $P_i = P_{i+1}$ ho $\max(a_i, b_i) = mn \rightarrow \text{MOD}(a_i, b_i) = 1$

e la mossa è $m, n \rightarrow mn, 1$

Quindi $x_{i+1} = x_i + 1 > x_i$

Ma allora dopo $P_0 + x_0$ mosse al massimo il processo si deve arrestare. Se il processo si arresta ha un solo valore $M > 1$.

b. p $V_p(n) \rightarrow$ valutazione pedice $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$ $V_2(30) = 1$
 $120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$, $V_2(120) = 3$ $V_3(30) = 1$
 $V_7(30) = 0$

Vorremmo dire che $\text{MOD}(V_p(a_1), \dots, V_p(a_{2026}))$ si conserva

b. Siano $a_1^{(j)}, \dots, a_{2026}^{(j)}$ i numeri dopo j mosse

Mostriamo che per ogni primo p ogni mossa preserva

$\text{MOD}(V_p(a_1), \dots, V_p(a_{2026}))$, cioè che

$$\text{MOD}(V_p(a_1^{(j)}), \dots, V_p(a_{2026}^{(j)})) = \text{MOD}(V_p(a_1^{(j+1)}), \dots, V_p(a_{2026}^{(j+1)}))$$

WLOG la mossa agisce su $a_1^{(j)}, a_2^{(j)}$ e $V_p(a_1^{(j)}) \geq V_p(a_2^{(j)})$

e abbiamo $a_1^{(j+1)} = \frac{\max(a_1^{(j)}, a_2^{(j)})}{\text{MOD}(a_1^{(j)}, a_2^{(j)})}$, $a_2^{(j+1)} = \text{MOD}(a_1^{(j)}, a_2^{(j)})$

$$\text{MOD}(V_p(a_1^{(j)}), \dots, V_p(a_{2026}^{(j)})) = \text{MOD}(\text{MOD}(V_p(a_1^{(j)}), V_p(a_2^{(j)})), \dots, V_p(a_{2026}^{(j)}))$$

Basta $\text{MOD}(V_p(a_1^{(j)}), V_p(a_2^{(j)})) = \text{MOD}(V_p(a_1^{(j+1)}), V_p(a_2^{(j+1)}))$

Se $x = V_p(a_1^{(j)})$, $y = V_p(a_2^{(j)})$ $x \geq y$ $\text{MOD}(x, y) = \text{MOD}(x-y, y) \checkmark$
 $V_p(a_1^{(j+1)}) = x-y$ $V_p(a_2^{(j+1)}) = y$

Concludo: per ogni p vale

$$\text{MCD}(v_p(2_1^{(0)}), \dots, v_p(2_{2026}^{(0)})) = \text{MCD}(v_p(M), v_p(1), \dots, v_p(1))$$

$\downarrow$
 $\oplus$

$$\text{MCD}(v_p(M), \underbrace{0, 0, 0, \dots, 0}_{v_p(M)})$$

Quindi per ogni p $v_p(M) = \oplus$

Detto meglio se $p \nmid 2_1^{(0)}, p \nmid 2_2^{(0)}, \dots, p \nmid 2_{2026}^{(0)}$ allora $p \nmid M$

se invece p ne divide almeno 1, $v_p(M)$ è fissato

Quindi, se $p_1, \dots, p_r$ sono i primi che dividono i numeri iniziali vale

$$M = \prod_{i=1}^r p_i^{\text{MCD}(v_{p_i}(2_1^{(0)}), \dots, v_{p_i}(2_{2026}^{(0)}))}$$

1110 2017.1

- se $3/20 \rightarrow$ trova un quadrato e scende in particolare $2, \overline{3} \dots \overline{3}$ 

↳ scende sempre (o meno di $3 \rightarrow 6 \rightarrow 9$)
 ↳ prima o poi $3 \rightarrow 6 \rightarrow 9$

• se $2 \equiv 2 (3)$

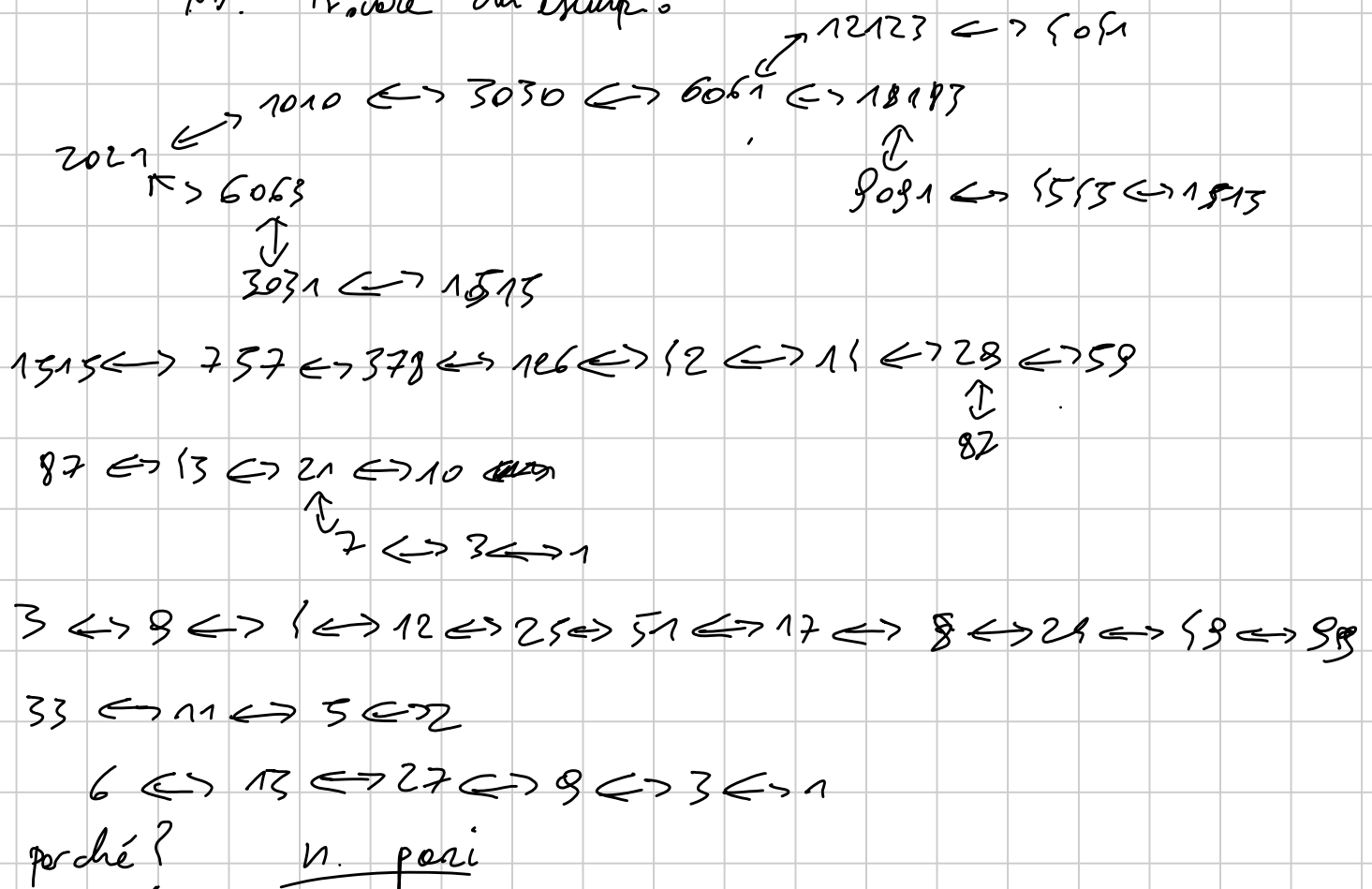
- se $2_0 \equiv 1 (3) \rightarrow$ o può o arrivare a $\{ \rightarrow 2 \rightarrow 5 \dots$

EGMO 2021.1

la risposta è sì o No

Sì: voglio dire "un sacco di numeri sono 5m"

No: trovare un esempio



perché?

n. pari

$$2n \leftrightarrow 5n+1 \leftrightarrow \underline{12n+3} \leftrightarrow 6n+1 \leftrightarrow 3n \leftrightarrow n$$

osserva

Prendo 2j min, giusto

l. aperto: trovo che i vicini di un numero sono