

CONTI IN GEOMETRIA USANDO:

- COORDINATE CARTESIANE
- VETTORI
- NUMERI COMPLESSI
- TRIGONOMETRIA

1) COORDINATE CARTESIANE

facile: rette parallele
e rette perpendicolari

$$y = mx + q$$

↖ costante
↗ coefficiente angolare

Circoli: (x_0, y_0)

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$$

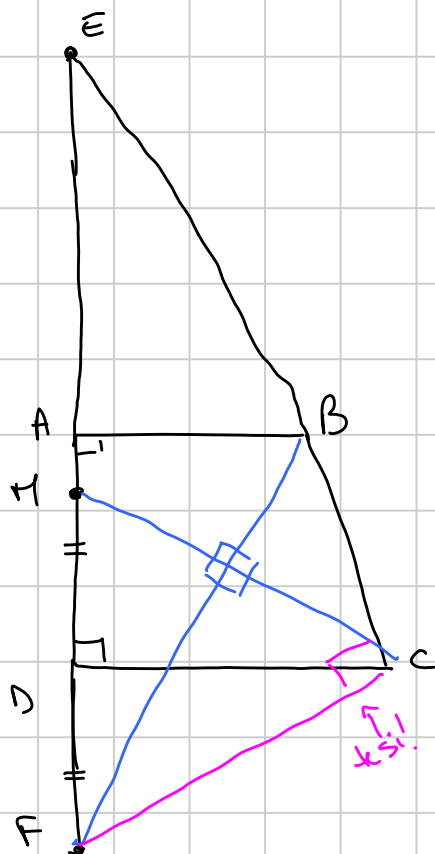
centro ↙ ↘ raggio

Asse radicale di due
circhi:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 - R_0^2 = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 - R_1^2$$

i termini di grado 2 (x^2 e y^2)
si cancellano!

PROBLEMA 1



- F sim. di A rispetto a D
- il pt. medio di EF

$$th) CF \perp BF \Rightarrow CF \perp CE$$

a) D è l'origine e DC e DE assi!

$$D = (0, 0) \quad C = (c, 0)$$

$$A = (0, 2) \quad B = (b, 2)$$

$$E = \begin{cases} y = \frac{2-0}{b-c}x + \left(-\frac{2c}{b-c}\right) \\ x = 0 \end{cases} \sim \left(0, -\frac{2c}{b-c}\right)$$

$$F = (0, -c) \quad M = \left(0, \frac{-\frac{2c}{b-c} - c}{2}\right)$$

$$\text{coeff ang CI: } \frac{-2c}{2(b-c) - \frac{2}{2}} = \frac{-2c}{0-c}$$

$$\text{coeff ang BF: } \frac{2c}{b}$$

$$\text{coeff ang CF: } \frac{-2-0}{0-c} = \frac{2}{c}$$

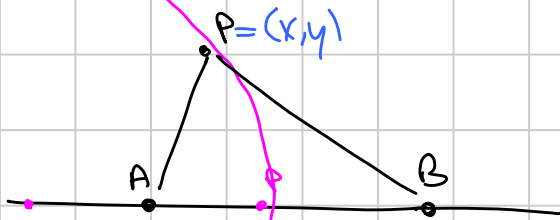
$$\text{coeff ang CI: } \frac{2}{b-c}$$

$$\frac{\cancel{2c} - \cancel{2b} + \cancel{2c} \cdot \frac{2c}{b}}{-2(b-c)c} = -1$$

$$\leadsto \frac{(2)(2)}{+2(b-c)c} = 1$$

$$\parallel \leadsto \frac{2^2}{(b-c)c} =$$

PROBLEMA 2



$$\lambda \in \mathbb{R}^+$$

Det il luogo geometrico P

$$\text{t.c. } PA/PB = \lambda$$

$$A = (0,0)$$

$$B = (b,0)$$

$$PA^2 = (x-0)^2 + (y-0)^2$$

$$PB^2 = (x-b)^2 + (y-0)^2$$

$$\left(\frac{PA}{PB}\right)^2 = \frac{x^2 + y^2}{(x-b)^2 + y^2} \stackrel{!}{=} \lambda^2$$

$$\rightarrow x^2 + y^2 = \lambda^2 (x-b)^2 + \lambda^2 y^2$$

$$\rightarrow \underline{(1-\lambda^2)x^2} + 2xb\lambda^2 + \lambda^2 b^2 + \underline{(1-\lambda^2)y^2} = 0$$

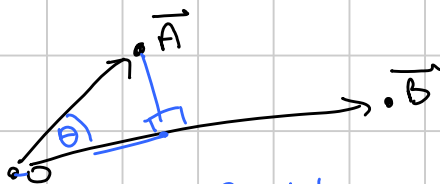
è una conica! guardo i coefficienti di x^2 e y^2

$$x^2 + \left(\frac{2xb\lambda^2}{1-\lambda^2}\right)x - \frac{\lambda^2 b^2}{1-\lambda^2} + y^2 = 0$$

$$x^2 + \left(\frac{2b\lambda^2}{1-\lambda^2}\right)x + \frac{b^2\lambda^4}{(1-\lambda^2)^2} + y^2 = \frac{\lambda^2 b^2}{1-\lambda^2} + \frac{b^2\lambda^4}{(1-\lambda^2)^2}$$

$$\left(x + \frac{b\lambda^2}{1-\lambda^2}\right)^2 + y^2 = R^2$$

[2] VETTORI



• Posso sommare vettori

• Posso (non) scegliere l'origine

• Prodotto scalare

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}| \cdot |\vec{B}| \cdot \cos \theta$$

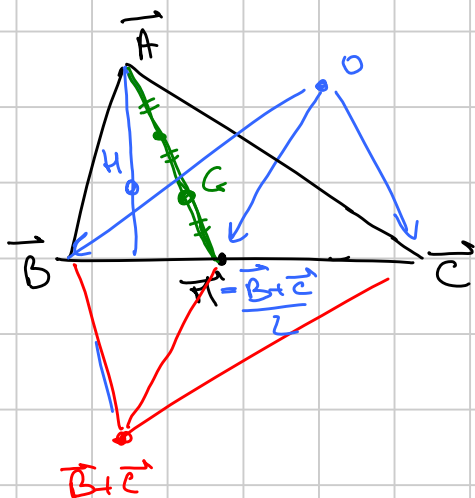
• Baricentro?

$$\vec{G} = \frac{1}{3} \vec{A} + \frac{2}{3} \vec{H}$$

$$= \frac{1}{3} \vec{A} + \frac{2}{3} \frac{\vec{B} + \vec{C}}{2} = \frac{\vec{A} + \vec{B} + \vec{C}}{3}$$

• Ortocentro? Se il circocentro è l'origine
allora $\vec{H} = \vec{A} + \vec{B} + \vec{C}$

Fatto



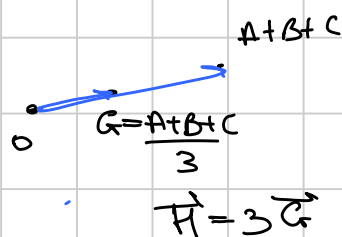
Infatti

AH è altezza? Se e solo: $\vec{AH} \cdot \vec{BC} = 0$

$$\Leftrightarrow (\vec{H} - \vec{A}) \cdot (\vec{C} - \vec{B}) = 0$$

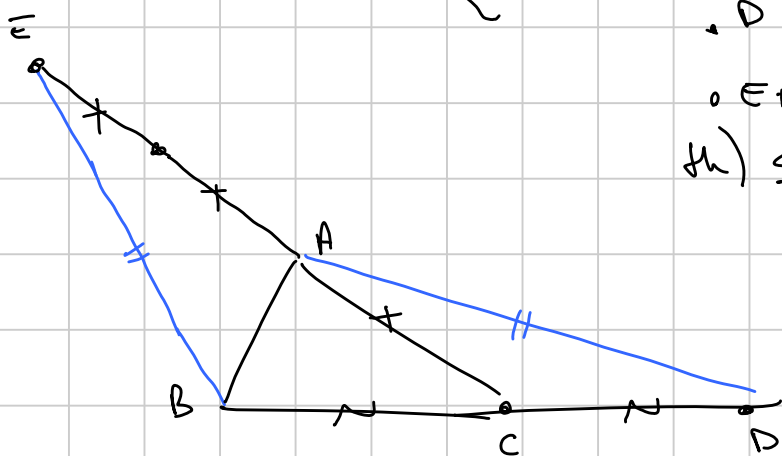
$$\Leftrightarrow (\vec{A} + \vec{B} + \vec{C} - \vec{A}) \cdot (\vec{C} - \vec{B}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\vec{C} \cdot \vec{C} - \vec{B} \cdot \vec{B}}{|\vec{C}|^2 = R^2} = 0$$



Fatto (Retta di Eulero). O, G e H sono allineati
e $OH = 3OG$

PROBLEMA [EG 10 '13 p1]



• D sim di B risp a C

• $EA = 2AC$

th) Se $\vec{AD} = \vec{BE}$, allora $\widehat{BAC}$ è retto.

$$|\vec{v}|^2 = \vec{v} \cdot \vec{v}$$

$$|\vec{AD}|^2 = \vec{AD} \cdot \vec{AD} = (\vec{D} - \vec{A}) \cdot (\vec{D} - \vec{A})$$

$\vec{C} = 0$ origine!

$$\vec{D} = -\vec{B}$$

$$\vec{E} = 3\vec{A}$$

$$(-(\vec{B} - \vec{C}) + \vec{C} = 2\vec{A} - \vec{B})$$

$$|\vec{AD}|^2 = (\vec{A} - \vec{D}) \cdot (\vec{A} - \vec{D}) = (\vec{A} + \vec{B})^2 = |\vec{A}|^2 + |\vec{B}|^2 + 2\vec{A} \cdot \vec{B}$$

$$|\vec{BE}|^2 = (\vec{E} - \vec{B})^2 = (3\vec{A} - \vec{B})^2 = 9|\vec{A}|^2 + |\vec{B}|^2 - 6\vec{A} \cdot \vec{B}$$

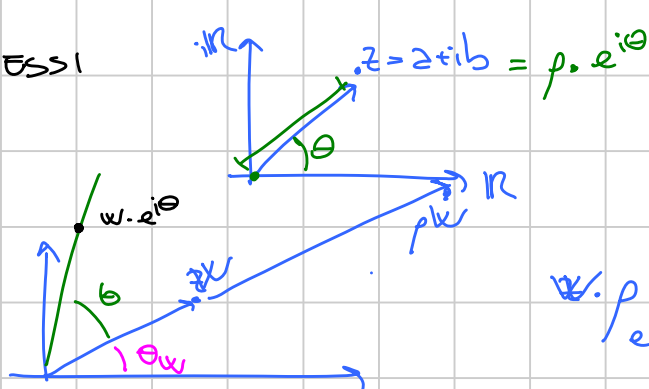
$$\leadsto 8\vec{A} \cdot \vec{A} - 8\vec{A} \cdot \vec{B} = 0$$

$$\leadsto 8(\vec{A} \cdot (\vec{A} - \vec{B})) = 0$$

$$\begin{aligned} \vec{A} = 0 &\rightarrow A = 0 \\ \vec{A} - \vec{B} = 0 &\Rightarrow A = B \end{aligned} \left. \begin{array}{l} \text{il triangolo} \\ \text{degenera!} \end{array} \right\}$$

oppure $\vec{BA} \perp \vec{AC}$ che è la tesi!

3) COMPLESSI



$w \cdot p$ è sulla retta OW
e ha lunghezza $p|w|$.

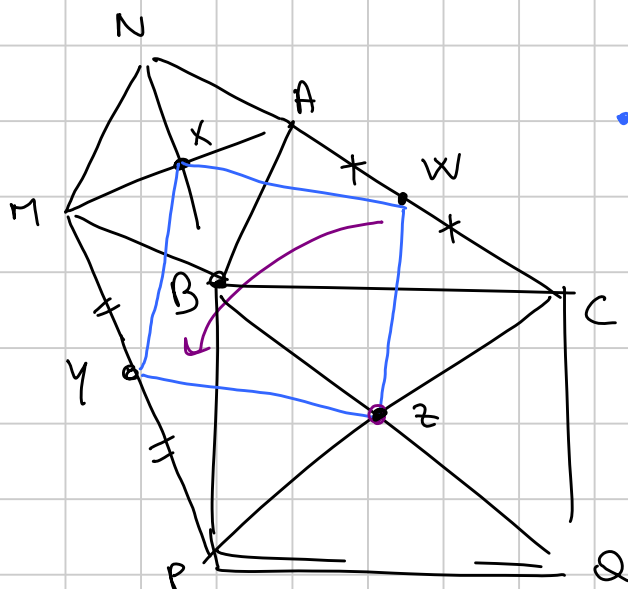
simmetria
di centro O
e fattore p

$$w \cdot e^{i\phi} \cdot e^{i\theta} = p w e^{i(\phi + \theta)}$$

rotazione di
centro O
e angolo θ

→ In generale moltiplicare per un numero complesso
è una rotazione (simmetria + rotazione!)

PROBLEMA



Tesi) $XYZW$ è un quadrato

- $b = 0$ origine del piano complesso
- z, w due punti nel piano

$$w = \frac{a+c}{2}$$

$$m = ai, \quad n = a+m, \quad x = \frac{a+m}{2} = \frac{a+ai}{2}$$

$$p = -ci, \quad z = \frac{c+p}{2} = \frac{c(1-i)}{2}$$

$$y = \frac{m+p}{2} = \frac{ai-ci}{2} = \frac{(a-c)i}{2} = y$$

Devo dire che Y è immagine di W tramite una rotazione di 90° in Z

$$(w-z) \cdot i = y-z \iff wi - y + z(1-i) = 0$$

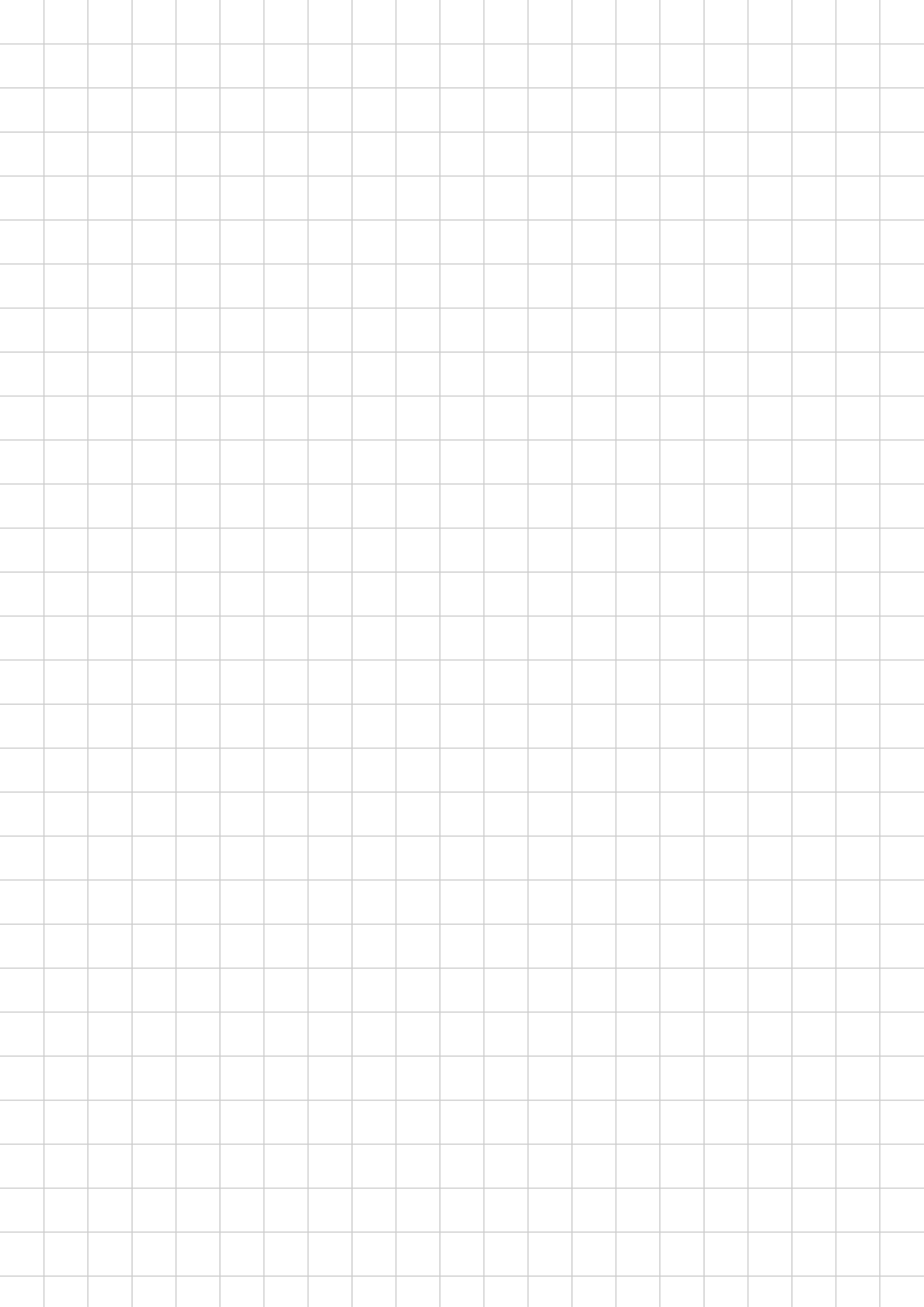
$$(1-i)^2 = 1 - 2i + i^2 = -2i$$



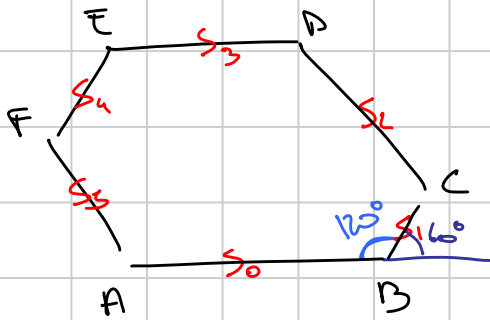
$$\left(\frac{a+c}{2}\right)i - \frac{(a-c)i}{2} + \frac{c(1-i)}{2}(1-i) =$$

$$\cancel{\frac{a}{2} + ci} - \cancel{\frac{a}{2} - ci} + \cancel{c} \cancel{(1-i)} = 0$$

e cidi de!



PROBLEMA



• Tutti gli angoli interni sono uguali!

$$\text{Th) } |AB - DE| = |BC - EF| = |CD - FA|$$

il vettore unitario
con angolo 60°
è una radice sesta dell'unità
 $\omega^6 = 1$
 $\omega = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

$$\begin{aligned} AB &= s_0 \\ BC &= s_1 \cdot \omega \\ CD &= s_2 \cdot \omega^2 \\ DE &= s_3 \cdot \omega^3 \\ EF &= s_4 \cdot \omega^4 \\ FA &= s_5 \cdot \omega^5 \end{aligned}$$

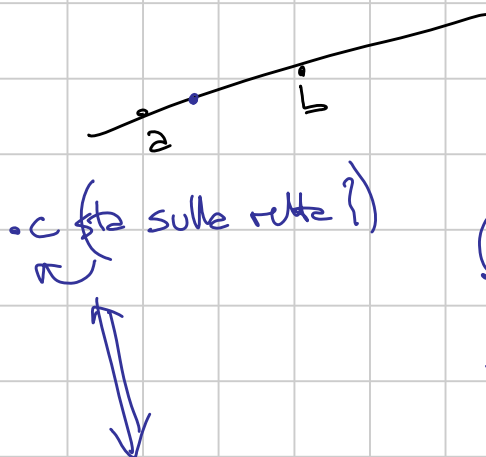
So che $s_0 + s_1 \omega + s_2 \omega^2 + s_3 \omega^3 + s_4 \omega^4 + s_5 \omega^5 = 0$

$$0 = s_0 + s_1 \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}i}{2} \right) + s_2 \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}i}{2} \right) + s_3 (-1) + s_4 \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}i}{2} \right) + s_5 \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}i}{2} \right)$$

parte imm. $\frac{\sqrt{3}i}{2} (s_1 + s_2 - s_4 - s_5) = 0 \leadsto s_2 - s_5 = s_4 - s_1$

parte reale $(s_0 + \frac{1}{2}s_1 - \frac{1}{2}s_2 - s_3 - \frac{1}{2}s_4 + \frac{1}{2}s_5) = 0$

$$s_0 - s_3 = \frac{1}{2} (-s_1 + s_2 + s_4 - s_5) = \frac{1}{2} (s_4 - s_1 + s_4 - s_1) = s_4 - s_1$$



RETTE PER ab:

$ta + (1-t)b$ per un valore t reale

$$\begin{aligned} c &= ta + (1-t)b \\ c - b &= t(a - b) \\ t &= \frac{c - b}{a - b} \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$t \in \mathbb{R} \iff t = \bar{t} \iff$$

$$\boxed{\frac{\bar{c} - \bar{b}}{\bar{a} - \bar{b}} = \frac{c - b}{a - b}}$$



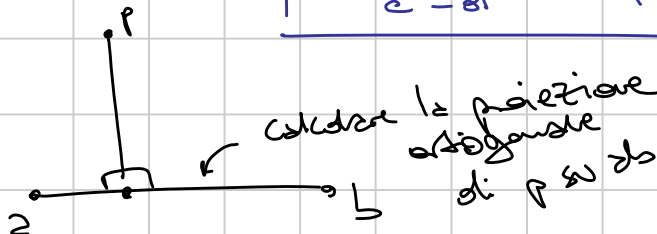
$$ab \perp cd \iff$$

$$(b-a) = (c-d) \cdot ri$$

$$\iff \frac{b-a}{c-d} \in i\mathbb{R}$$

$$\iff \left| \frac{b-\bar{a}}{c-\bar{d}} = - \left(\frac{b-a}{c-d} \right) \right|$$

ESERCIZIO



OSSERVAZIONE I problemi con una c.f. si scrivono bene, osservando che sia quella unitaria

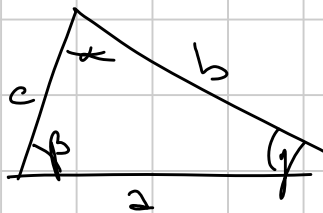
$$\left\{ \begin{array}{l} 2 \cdot \bar{z} \\ 2 \text{ sulla c.f. unitaria: } |z|^2 = 1 \\ \bar{z} = 1/z \end{array} \right.$$

[4] TRIGONOMETRIA

Teorema (dei seni)

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R$$

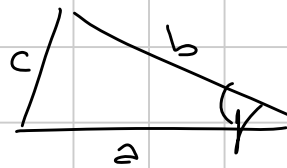
↑
raggio
circo scritto



Teorema (del coseno)

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

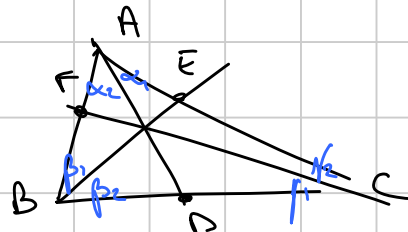
se $\gamma = \pi/2$
ho Pitagora



Teorema (Ceva trigonometrico)

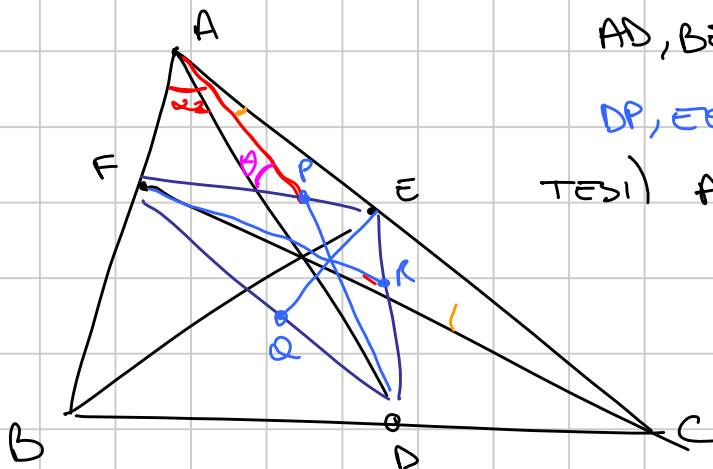
AD, CF, BE concorrenti

$$\iff \frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} \cdot \frac{\sin \beta_1}{\sin \beta_2} \cdot \frac{\sin \gamma_1}{\sin \gamma_2} = 1$$



(Dimostrare:
applicando teo dei seni
a teo ceva!)

PROBLEMA (Cevian nest)



AD, BE, CF concorrenti

DP, EQ, FR concorrenti

TESI) AP, BQ, CR concorrenti

Dobbiamo calcolare $\widehat{FAP}$, $\widehat{PAE}$

Applico il teo dei seni su $\triangle AFP$:

Applico il teo dei seni su $\triangle AEP$:

$$\frac{\sin \alpha_2}{FP} = \frac{\sin \theta}{AF}$$

$$\frac{\sin \alpha_1}{PE} = \frac{\sin(\pi - \theta)}{AE}$$

← $\sin \theta$

$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} \cdot \frac{FP}{EP} = \frac{\cancel{\sin(\pi - \theta)}}{\cancel{\sin \theta}} \cdot \frac{AF}{AE}$$

per simmetria!

$$\frac{\sin \beta_1}{\sin \beta_2} = \frac{BD}{BF} \cdot \frac{FQ}{DQ}$$

Ceva trigonometrico

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \frac{\alpha}{2}} = \frac{CE}{CD} \cdot \frac{DR}{ER}$$

$$\left(\frac{AF}{FE} \cdot \frac{BD}{DF} \cdot \frac{CE}{ED} \right) \left(\frac{EP}{FP} \cdot \frac{FQ}{DQ} \cdot \frac{DR}{ER} \right) = 1$$

$\downarrow$ per Ceva!
 $\downarrow$ per Ceva!

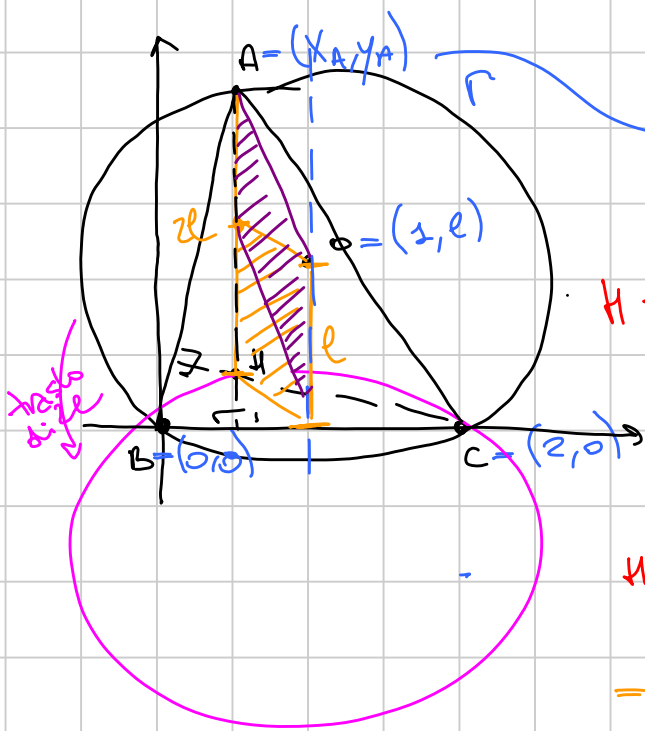
segue l=ksi!

PROBLEMI

Dal libretto: $\boxed{G1:12}$, $\boxed{G2:16}$
 (4) (3)

- ① Fissata una circonferenza Γ e due punti B, C su Γ
trovare le coordinate dell'ortocentro H di $\triangle ABC$
al variare di A su Γ .
- ② (Napoleone) Sui lati del triangolo $\triangle ABC$, costruiamo
esternamente dei triangoli equilateri $\triangle D_1, \triangle D_2, \triangle D_3$
I centri di $\triangle D_1, \triangle D_2, \triangle D_3$ formano un triangolo equilatero
- ⑤* Sono dati
 $\triangle ABC$ triangolo, P punto sulla circoscritta ad ABC .
 D, E, F sono le pr. ortogonali di P su AB, BC, CA .
Dimostrare che D, E, F sono allineati

- ① Fissata una circonferenza Γ e due punti B, C su Γ
trovare le coordinate dell'ortocentro H di $\triangle ABC$
al variare di A su Γ .



$$\Gamma: (x-1)^2 + (y-e)^2 = 1 + e^2$$

• con x_A e y_A che soddisfanno

$$(x_A-1)^2 + (y_A-e)^2 = 1 + e^2$$

$$\hookrightarrow x_A^2 - 2x_A + 1 + y_A^2 - 2y_A e + e^2 = 1 + e^2$$

• Altezza da A: $X = x_A$

• Retta cui: $y = \left(-\frac{x_A}{y_A}\right)x + \frac{2x_A}{y_A}$

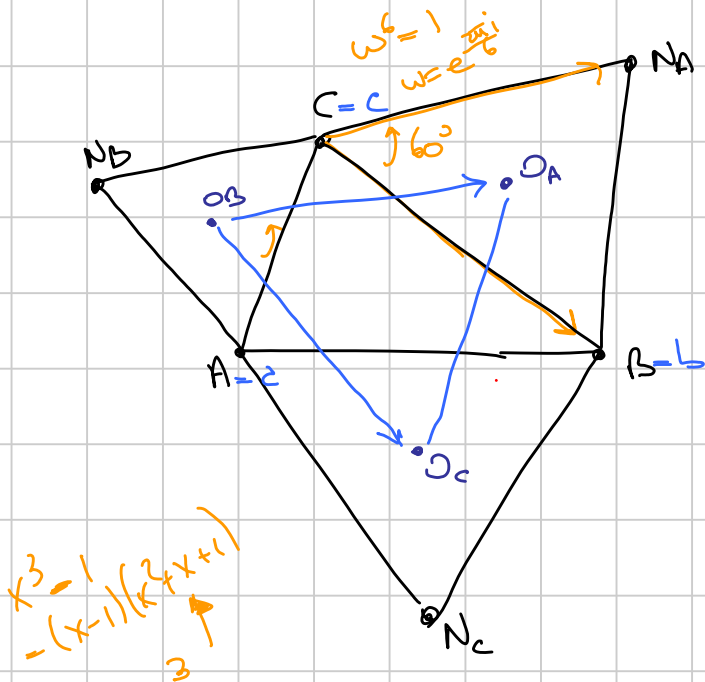
$$-\frac{1}{y_A} = -\frac{1}{y_A/x_A} = -\frac{x_A}{y_A}$$

$$H = \left(x_A, \frac{1}{y_A}(-x_A^2 + 2x_A)\right)$$

$$= \left(x_A, -\frac{1}{y_A}(x_A^2 - 2x_A)\right)$$

$$= \left(x_A, +\frac{1}{y_A}(y_A^2 - 2y_A e)\right) = (x_A, y_A - 2e)$$

- ② (Napoleone) Sui lati del triangolo $\triangle ABC$, costruiamo esternamente dei triangoli equilateri $\triangle_1, \triangle_2, \triangle_3$
I centri di $\triangle_1, \triangle_2, \triangle_3$ formano un triangolo equilatero



$$N_A = C = (b-c)\omega$$

$$\bullet N_A = (b-c)\omega + c$$

$$\bullet O_A = (b+c+N_A)\frac{1}{3}$$

$$= (b+c+(b-c)\omega+c)\frac{1}{3}$$

$$= \frac{1}{3}[b(1+\omega) + c(2-\omega)]$$

$$\sim O_B = \frac{1}{3}[c(1+\omega) + a(2-\omega)]$$

$$O_C = \frac{1}{3}[a(1+\omega) + b(2-\omega)]$$

$$O_A - O_B = \omega(O_C - O_B)$$

$$\hookrightarrow O_A + O_B(\omega-1) - O_C\omega = 0$$

$$\hookrightarrow \underbrace{b(1+\omega)} + \underbrace{c(2-\omega)} + \underbrace{c(1+\omega)(\omega-1)} + \underbrace{a(2-\omega)(\omega-1)} - \underbrace{a(1+\omega)\omega} - \underbrace{b(2-\omega)\omega} = 0$$

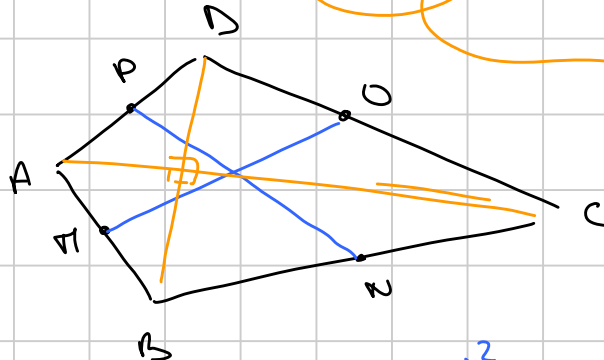
$$2-\omega+\omega^2-1$$

$$-\omega^2-\omega+1=0$$

$\omega^6 - 1 = 0$
 $0 = (\omega - 1)(\omega + 1)(\omega^2 - \omega + 1)(\omega^2 + \omega + 1)$
 $2\omega - 2 - \omega^2 + \omega^2 - \omega - \omega^2 = 1 + \omega - 2\omega + \omega^2 - \omega^2 - \omega + 1$
 $= -(1 + \omega + \omega^2)2 = 0$

③ ABCD quadrilatero, M, N, O, P punti medi di AB, BC, CD, AD.

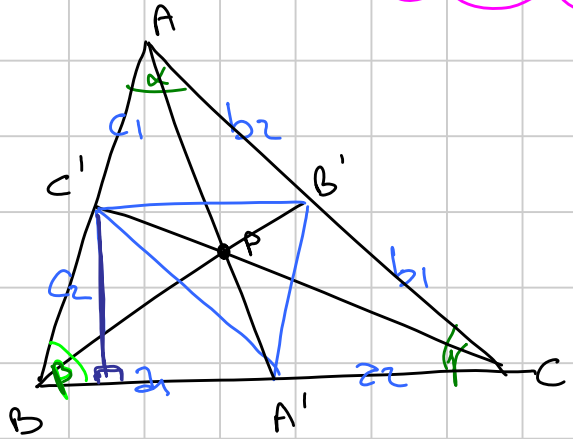
mostrare che $AC \perp BD \iff MN = OP$



$(\vec{C} - \vec{A}) \cdot (\vec{D} - \vec{B}) = 0$
 $\iff \vec{CD} - \vec{CB} - \vec{A} \cdot \vec{D} + \vec{A} \cdot \vec{B} = 0$
 $M = \frac{\vec{A} + \vec{B}}{2}$ etc

$\vec{OM} \cdot \vec{ON} = (\vec{A} + \vec{B} - \vec{C} - \vec{D})^2 = A^2 + B^2 + C^2 + D^2 + 2AB - 2AC - 2AD - 2BC - 2BD + 2CD$
 $\vec{PN} \cdot \vec{PO} = (B + C - A - D)^2 = \dots + 2BC - 2BA - 2BD - 2AC - 2DC + 2AD$
 $\iff AB - AD - BC + CD = 0$

④



Tesi: $2R \cdot [A'B'C'] = AB' \cdot B'C' \cdot CA'$
 (with arrows pointing to $2R$ as "raggio circ" and the product as "area")

$[A'B'C'] = [ABC] - [BA'C'] - [CA'B'] - [AC'B']$
 $\frac{1}{2} a_1 c_2 \sin \beta = \frac{a_1}{2} [BCC'] = \frac{a_1}{2} \cdot \frac{c_2}{c} [ABC]$
 $\frac{a_1}{2} \cdot \frac{1}{2} (2) \cdot c_2 \sin \beta$

$\frac{1}{2} ab \sin \gamma = \frac{1}{4} \frac{abc}{R}$
 $\sin \gamma = \frac{c}{2R}$

$= [ABC] \left(1 - \frac{a_1 c_2}{2c} - \frac{b_1 a_2}{b_2} - \frac{c_1 b_2}{c b} \right)$
 $= [ABC] \frac{(abc - a_1 b c_2 - a_2 b_1 c - a b_2 c_1)}{abc}$

$= \frac{1}{4} \frac{abc}{R} \cdot \left(\dots \right)$

$$\begin{aligned}
 & (a_1 + a_2)(b_1 + b_2)(c_1 + c_2) \\
 & - (a_1)(b_1 + b_2)(c_2) \\
 & - (a_2)(b_1)(c_1 + c_2) \\
 & - (a_1 + a_2)(b_2)(c_1)
 \end{aligned}$$

$$= 2b_1c_1 + 2b_2c_2 \quad \text{Ceva!}$$

$$[A'B'C'] = \frac{1}{4R} (2b_1c_1 + 2b_2c_2) = \frac{1}{2R} \cdot 2b_2c_2$$

- ⑤ Sono dati
 ABC triangolo, P punto sulla circonscritta ad ABC.
 D, E, F sono le pr. ortogonali di P su AB, BC, CF.
 Dimostrare che D, E, F sono allineati

