

TRASFORMAZIONI DEL PIANO

① ISOMETRIE: ROTAZIONI, RIFLESSIONI, TRASLAZIONI

② OMOTETIE

③ INVERSIONI CIRCOLARI

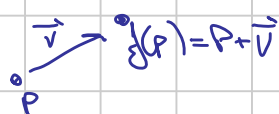
funzione $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ bigettiva
 $P \mapsto f(P)$

① ISOMETRIE

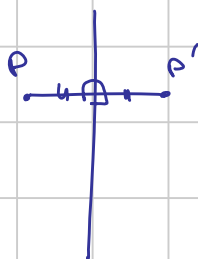
Def. Un'ISOMETRIA è una trsf. del piano che preserva le lunghezze:
 $\text{dist}(P, Q) = \text{dist}(f(P), f(Q))$

Nota che: preserva gli angoli, le aree, le rette, le circonferenze.

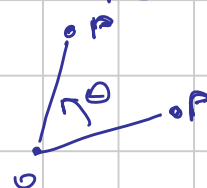
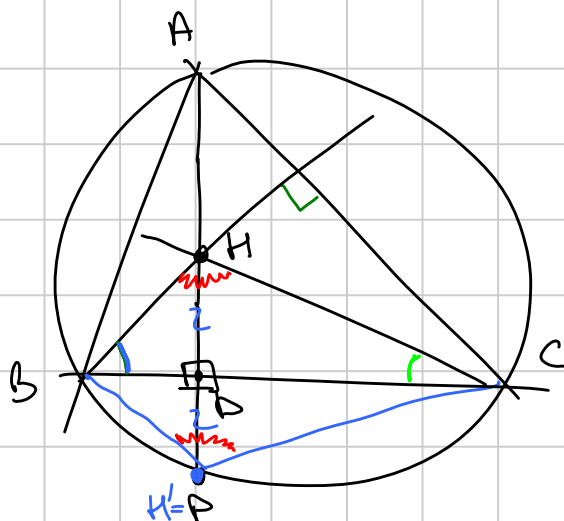
TRASLAZIONE



RIFLESSIONE



ROTAZIONE

FATTO

$P = AH \cap \odot ABC$

TESI: $HD = DP$

$\Leftrightarrow P$ è il simmetrico di H rispetto a BC

$$\widehat{CBH} = 90^\circ - \widehat{C}$$

$$\widehat{BCH} = 90^\circ - \widehat{B}$$

Il simmetrico dell'ortocentro rispetto a un lato giace sulla circonscritta

$$\begin{aligned} \widehat{BHC} &= 180^\circ - \widehat{CBH} - \widehat{BCH} \\ &= 180^\circ - (90^\circ - \widehat{B}) - (90^\circ - \widehat{C}) \\ &= \widehat{B} + \widehat{C} = 180^\circ - \widehat{A} \end{aligned}$$

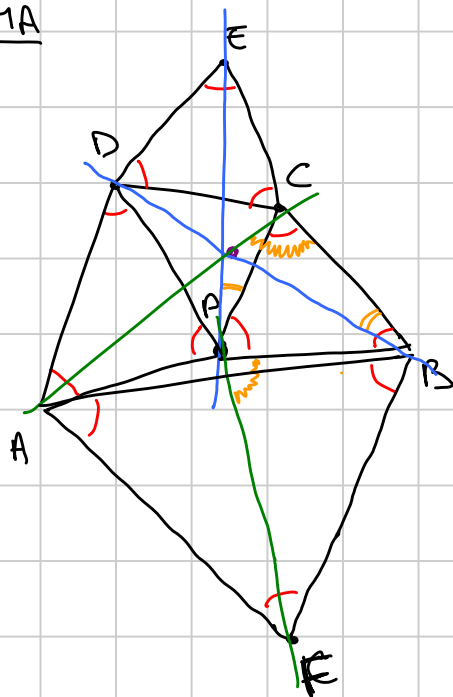
Il simmetrico H' di H rispetto alla retta BC :

$$\underline{H' \in AH} \quad \underline{B\widehat{H'}C = B\widehat{H}C = 180^\circ - \widehat{A}} \Rightarrow ABH'C \text{ è ciclico!}$$

$H' \in \odot ABC$

$$\Rightarrow P = H'$$

PROBLEMA



TESI: E, P, F sono allineati

• Ruoto di 60° attorno a C (in senso antiorario)

$C \mapsto C$

(R1)

$E \mapsto D$

$P \mapsto B$

retta EP $\mapsto$ retta DB

Oss. l'angolo fra le due rette è 60°

• Ruoto di 60° attorno a B

(R2)

$C \mapsto P$ $A \mapsto F$

retta CA $\mapsto$ retta PF

TESI $\Leftrightarrow \angle EPF = 180^\circ = \angle EPC + \angle CPB + \angle BPF$

ricorda mandato da R2 in $\angle BPA$

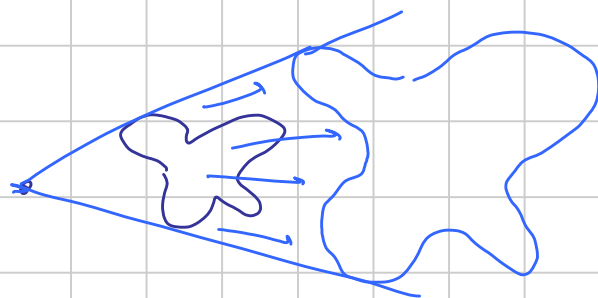
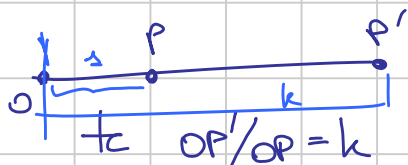
$\hookrightarrow$ da R1 manda $\angle EPC$ in $\angle DBC$

$\Leftrightarrow$ AC e BD formano un angolo di 60°

Ruoto attorno a P! $B \mapsto C$ $D \mapsto A$ retta BD $\mapsto$ CA.

[2] OTOTETIE

Omografia di centro O e fattore k reale non-nullo

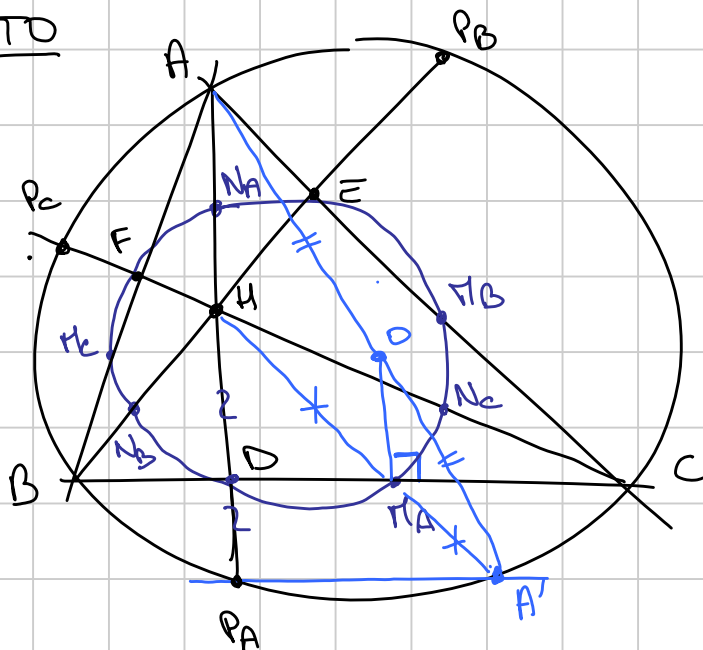


Un'omotetia non preserva le lunghezze!

Pero preserva: ANGOLI, RAPPORTI FRA LUNGHEZZE,

RETTE, CIRCONFERENZE, PARALLLELE E TANGENZE

FATTO



Omotezia di centro H
e fattore 2

$D \mapsto A$ $E \mapsto B$ $F \mapsto C$

$\odot DEF \mapsto \odot ABC$

$N_A \mapsto A$ $N_B \mapsto B$ $N_C \mapsto C$

il pt. medio
di AH

$\odot M_A \mapsto A'$

il pt. medio
di AB

è il pt. di inv. rispetto
ad A sulla $\odot ABC$

• $PA' \parallel BC$ per Talete (o per omotezia) $\Rightarrow APA'$ è retto

$\Rightarrow AA'$ è diametro

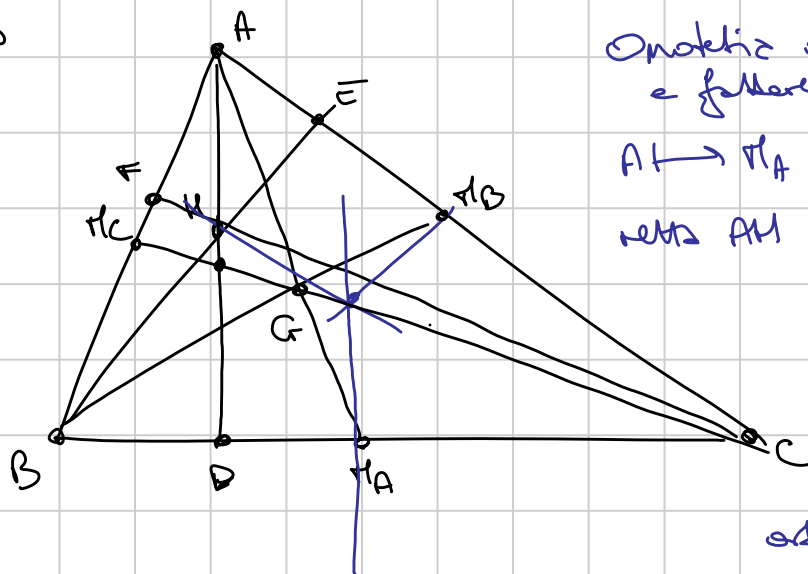
• L'omotezia di centro A' e fattore due: $O \mapsto A$ e $HA' \mapsto H$

$OH_A \parallel AH$

FATTO

C'è una circonferenza che passa per M_A, M_B, M_C ,
 D, E, F , N_A, N_B, N_C . (Circonferenza di Feuerbach)

FATTO



Omotezia di centro G
e fattore $-1/2$

$A \mapsto M_A$ $B \mapsto M_B$ $C \mapsto M_C$

retta AH $\mapsto$ retta parallela
ad AH e M_A
= assi di BC

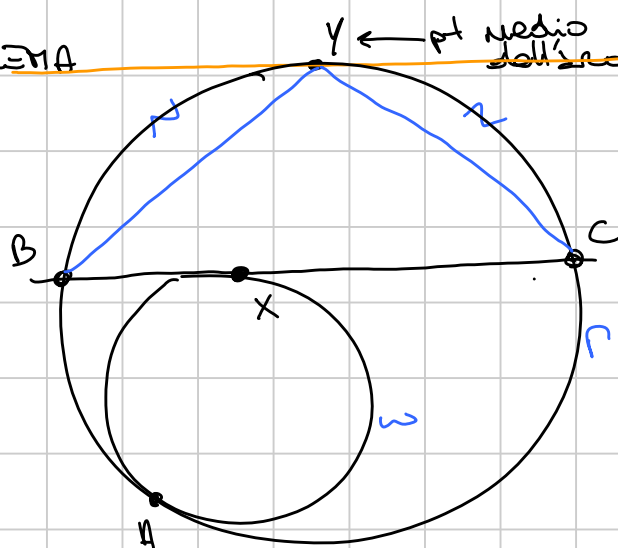
altezze $\mapsto$ assi dei lati

$H \mapsto O$
ortocentro circocentro

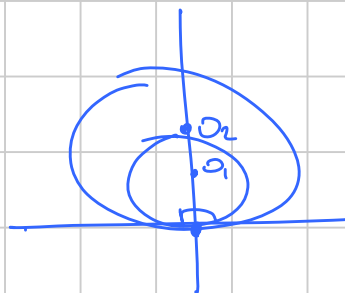
$\Rightarrow H, G, O$ allineati!

$H \quad G \quad O$ retta di Eulero!

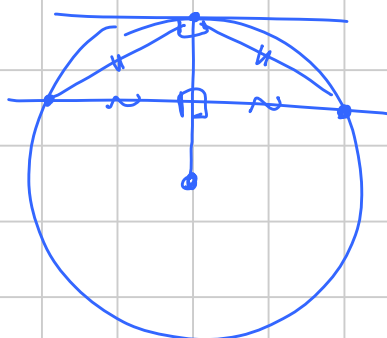
PROBLEMA



- Quotale centrato in A che interseca in Γ (esiste)



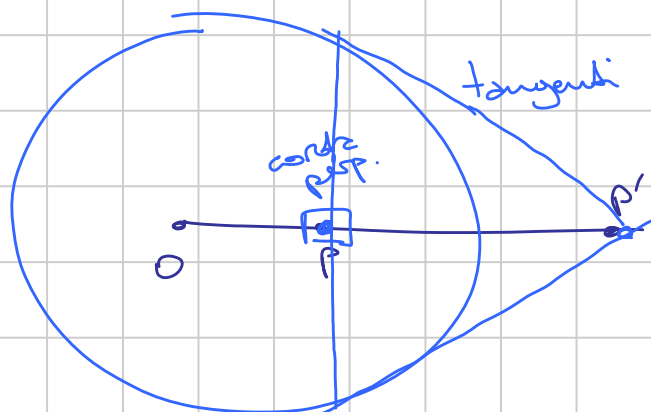
- $A \mapsto A$ retta BC $\mapsto \Gamma$
retta tangente a Γ e parallela a BC



- $X \mapsto r \cap \Gamma$ punto di tangenza
(vogliamo dimostrare che Γ è Y)
e infatti il raggio al punto di tangenza
è $\perp$ a BC.

[3] INVERSIONE CIRCOLARE

rispetto a un centro O e di raggio R



L'inverso P' è quel punto sulla retta OP per cui

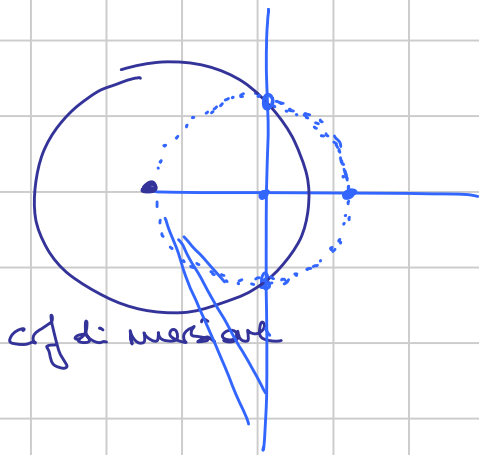
$$OP \cdot OP' = R^2$$

OSS è un'inversione!

$$P'' = P \quad OP'' = R^2 = OP \cdot OP'$$

L'inversione NON preserva le distanze, rette, circonferenze

però preserva gli angoli (e quindi i parallelismi e le tangenze)

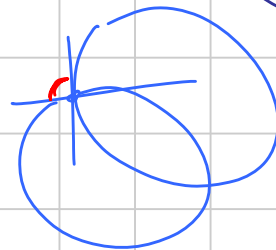
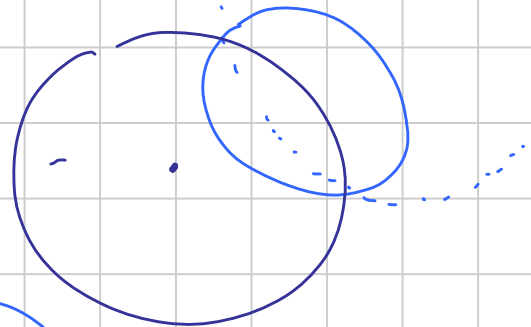


$$OP' = \frac{R^2}{OP}$$

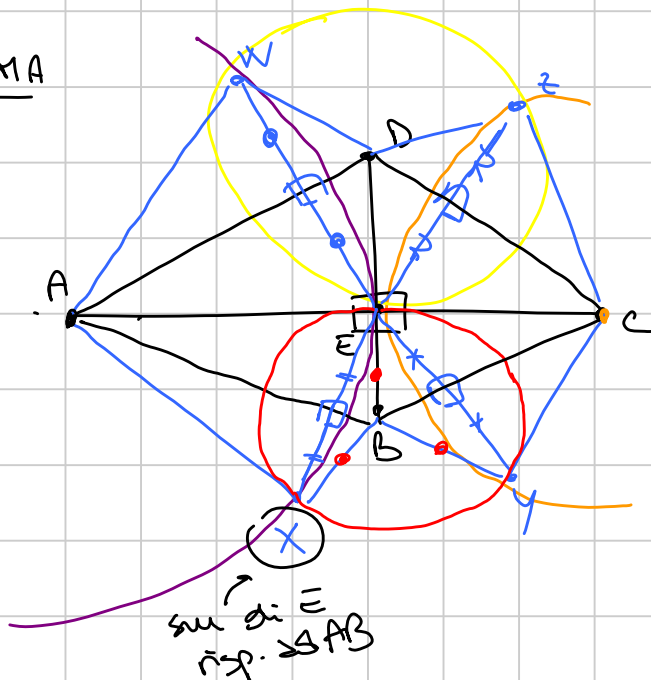
Le rette che non passano per il centro vanno in circonferenze per il centro! (e viceversa)

Le circonferenze che non passano per il centro, vanno in cf che ~

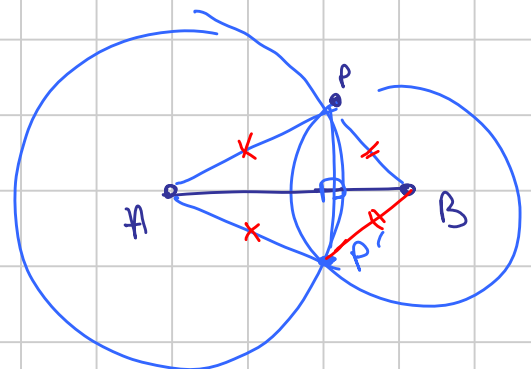
Il centro non va nel centro!!



PROBLEMA



TESI X, Y, Z, W = ciclico



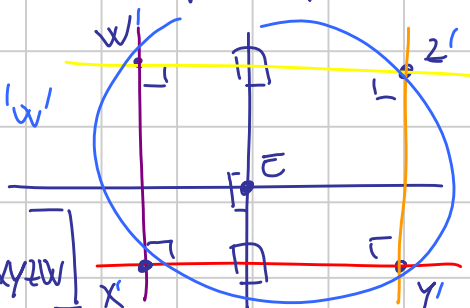
Il XYE di centro B
è tangente ad AC

Inserito in E di raggio qualunque

$X, Y, Z, W \rightarrow$ rettangolo $x'y'z'w'$

il rettangolo $x'y'z'w'$
è ciclico

Il $x'y'z'w'$ | misurare $\rightarrow$ il X,Y,Z,W



va in una retta
parallela ad AC
(perp a BD)

FATTO

The diagram illustrates the geometric construction for finding the intersection points of two circles, ω_B and ω_C , which are tangent at point A . The centers are B and C , lying on a horizontal line. A point D is located below the line BC . Lines AD , BD , and CD are drawn. A blue arc ω_B passing through A intersects AD at point X . Another blue arc ω_C passing through A intersects AD at point Y . Red tick marks on segments AX and AY indicate that $AX = AY$.

TESE BAN = CAM SIMILITUDINA

$$\bullet \text{TES1} \leftrightarrow (A1 \vdash A2)$$
$$B \vdash \frac{\frac{p \vdash B' \hookrightarrow AB}{\vdash AB' \cdot A/B} = \cancel{AB} \cdot AC}{\vdash p \vdash B'' \hookrightarrow AC} \quad \text{where } B'' = AC$$

retta $BD \mapsto \left[\begin{array}{l} \text{cfr passi per A} \\ \text{e B e tangente a BC} \end{array} \right] = w_D$

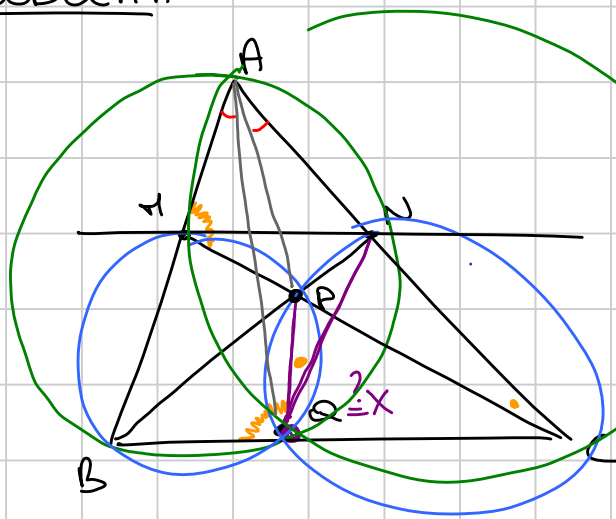
$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{\quad} & C \\ C & \xrightarrow{\quad} & B \end{array}$$
$$\text{rel} \subseteq \text{CD} \mapsto \text{WC}$$
$$D = BD \cap CD \quad \vdash \quad \omega_B \cap \omega_C = X$$

Quindi b è equivalente
a dimostrare che
 $X \in \mathcal{A}$

M sta sull'asse radicale
di w_B e w_C

$$\begin{aligned} \text{Pow}_{w_B}(\pi) &= \pi B^2 \\ \text{Pow}_{w_E}(\pi) &= \pi C^2 \end{aligned}$$

PROBLEMA



$$MN \parallel BC \quad Q = \odot BPM \cap \odot CPN$$

$$\text{TESI} \quad \widehat{BAQ} = \widehat{CAP}$$

INVERSIONE in A di raggio
rispetto alla bis $\widehat{A}$

$$R^2 = AC \cdot AM = AB \cdot AN$$

$$\left(\frac{AC}{AN} = \frac{AB}{AM} \right) \text{ che \u00e8 Talete}$$

$$B \longleftrightarrow N \quad C \longleftrightarrow M$$

$$BN \longleftrightarrow \odot ABN \quad CM \longleftrightarrow \odot ACM$$

$$P = BN \cap CM \longleftrightarrow X = \odot ABN \cap \odot ACN$$

$$\bullet \text{TESI} \longleftrightarrow [\text{retta AP} \longleftrightarrow \text{retta AQ}] \longleftrightarrow X \in \text{retta AQ}$$

$$\text{Claim: } X = Q$$

$$\boxed{Q \in \odot ABN}:$$

$$\widehat{BQN} = \widehat{BQP} + \widehat{PQN}$$

$$= \widehat{AMP} + \widehat{PCN}$$

$$= 180^\circ - \widehat{BAC}$$

ciclate blu

per angoli interni!

$$\bullet Q \in \odot ACN$$

PROBLEMI

(1) Sui lati del triangolo ABC costruiamo i quadrati ABDE e ACFA.
Dimostra che l'altezza di ABC in A è mediana di AGE.

(2) Siano I l'incentro del triangolo ABC, D il punto di tangenza tra BC e la c.f. inscritta, E il simm di D rispetto al punto medio di BC, T il simm di D rispetto a I. Dimostra che A, T, E sono allineati.

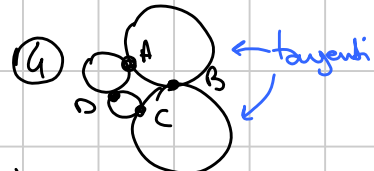
(3) Triangolo ABC. w_B la c.f. passante per B e tangente ad AC in A
 w_C per C w_A per A

Sia D il punto d'intersezione fra w_B e w_C

E il punto sulla retta AD, diverso da A, tale che $AD = DE$.

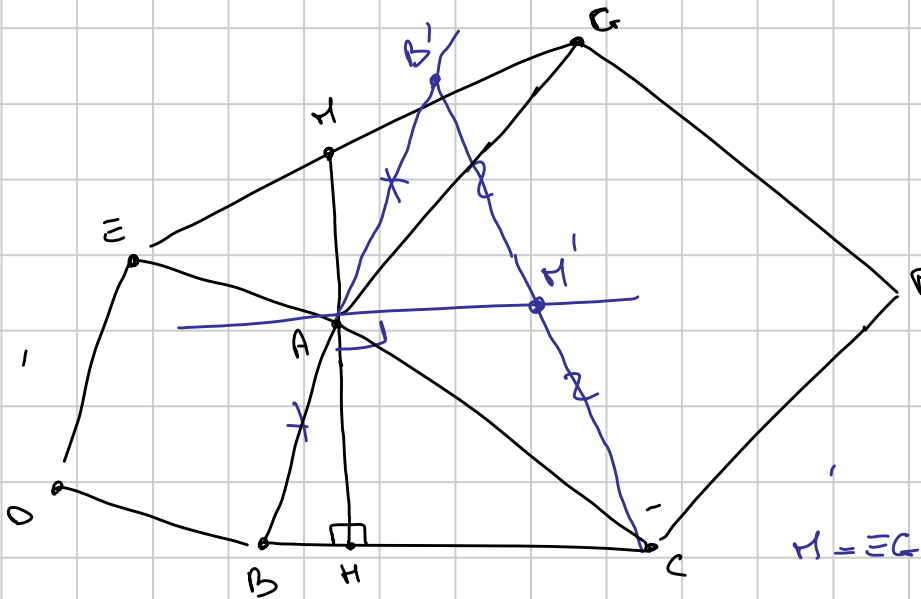
Dimostra che E giace sulla circonscritta ad ABC

(5) Rispetto al triangolo ABC: I incentro, D, E, F piedi delle altezze. $\odot B \cap \odot ABC = P$. $\odot C \cap \odot ABC = Q$.
Dimostra che DEPR è ciclico.



tesi) ABCD ciclico

(1) Sui lati del triangolo ABC costruiamo i quadrati ABDE e ACFA.
Dimostra che l'altezza di ABC in A è mediana di AGE.



Rotazione di centro A
e di 90° in senso orario

$B \mapsto E$ $G \mapsto C$
 $E \mapsto B'$ è il simm di B
rispetto ad A

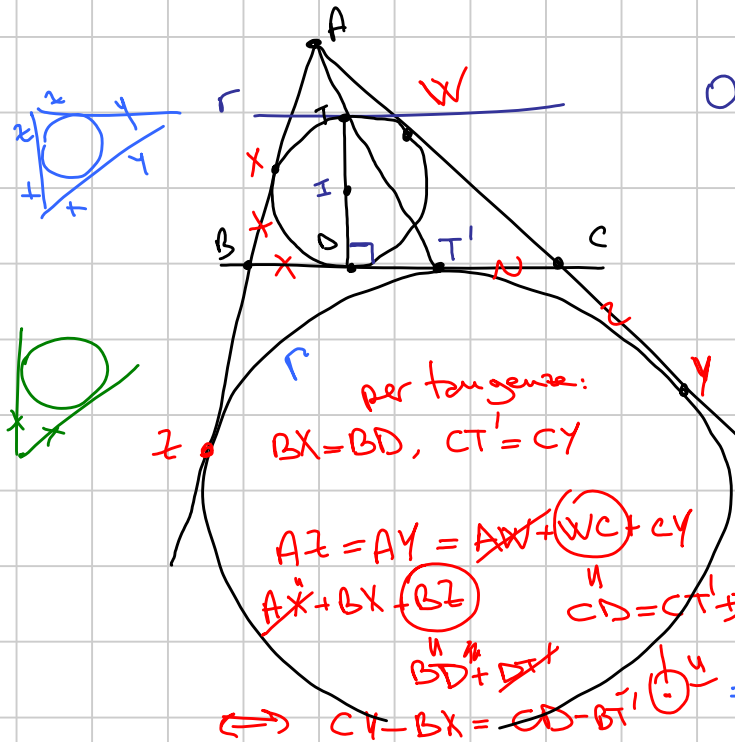
segmento $EG \mapsto B'C$

$M = EG \cap AH \mapsto M' = B'C \cap R(AH)$

$AH \mapsto A$ retta per
parallela a BC

per Talete M' è il pt. medio di $B'C$!
 $\Rightarrow$ tesi!

- ② Siano I l'incirco del triangolo ABC , D il punto di tangenza tra BC e la circ. inscritta, E il simm di D rispetto al punto medio di BC , T il simm di D rispetto a I . Dimostrare che A, T, E sono allineati.



Omotezia in A che manda

T su BC

$T \mapsto T' \in BC$

inscritta $\mapsto$ circ. tangente ad AB, AC e che passa per $T' = r$

$\hookrightarrow r$ retta tangente all'inscritta in T e $\parallel$ a BC .

$r \perp$ tangente $\rightarrow BC$

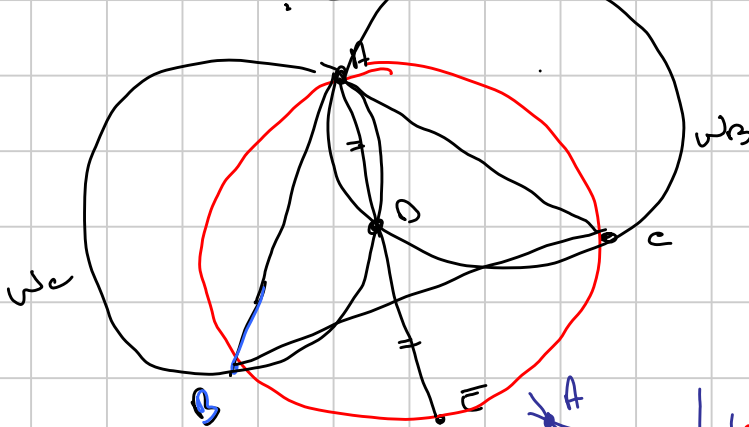
$\Rightarrow r$ è la circonferenza es-critta risp. ad A

- ③ Triangolo ABC . w_B la circ. passante per B e tangente ad AC in A , w_C la circ. passante per C e tangente ad AB in A .

Sia D il punto d'intersezione fra w_B e w_C

E il punto sulla retta AD , diverso da A , tale che $AD=DE$.

Dimostrare che E giace sulla circonferenza circoscritta ad ABC



INTERNO IN A DI RAGGIO $|R|=AD$

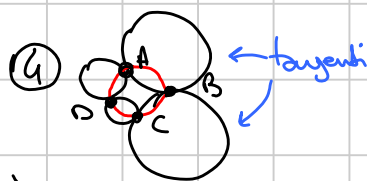
$w_C \leftrightarrow$ retta parallela ad AC passante per B'

$w_B \leftrightarrow$ retta parallela ad AB passante per C'

$$AE \cdot AE' = \frac{AD^2}{AE} = \frac{AD^2}{2AD} = \frac{AD}{2}$$

tesi $\leftrightarrow$ le distanze di un punto si misurano nel suo pt medio!

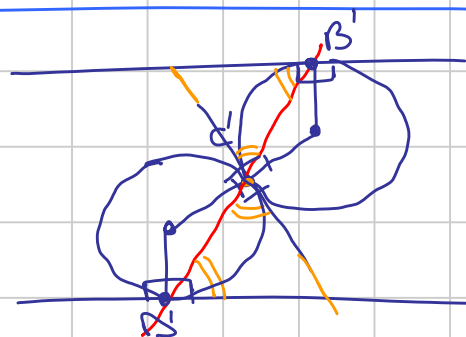
$\odot ABC \leftrightarrow$



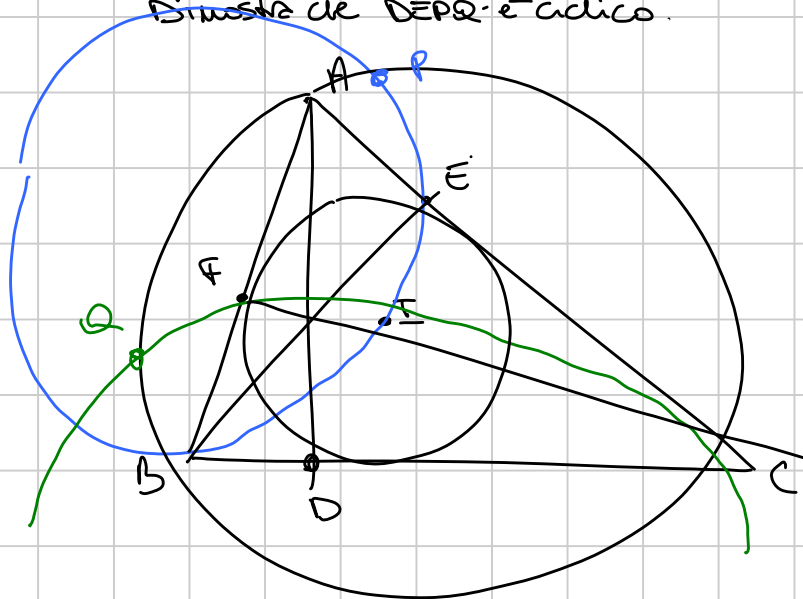
TESI) $ABCD$ ciclico

$\Leftrightarrow B', C', D'$ sono allineati

Inverso in A



⑤ Rispetto al triangolo ABC : I incanto, D, E, F piedi delle altezze. $\odot_{BE} \cap \odot_{AC} = P$. $\odot_{CF} \cap \odot_{AB} = Q$.
 Dimostrare che $DEPQ$ è ciclico.



• Inverte nella circonferenza inscritta!