

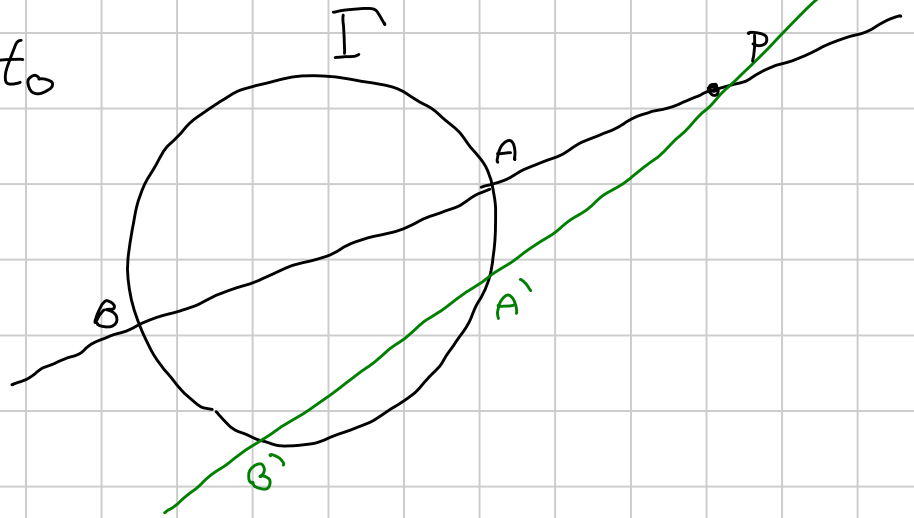
G3 - basic

Note Title

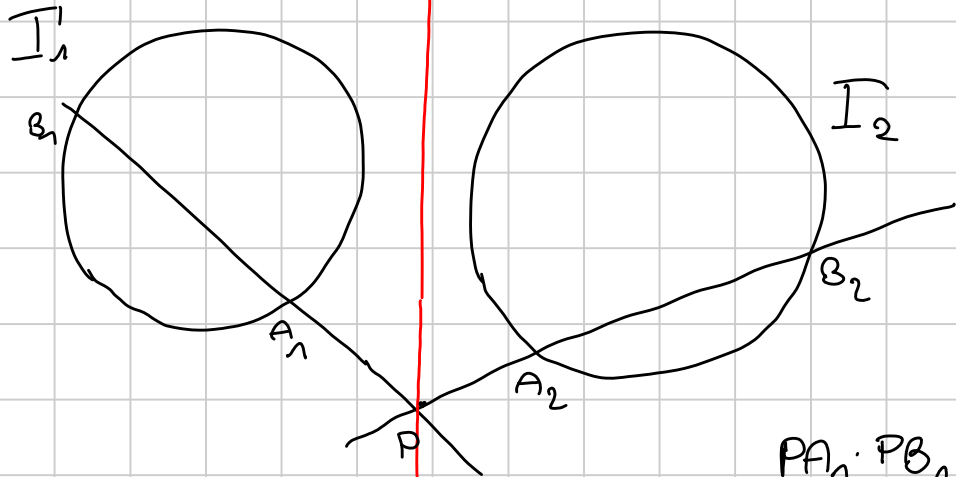
05/09/2026

Potenza di un punto

$$Pow_I P = PA \cdot PB = PA' \cdot PB'$$



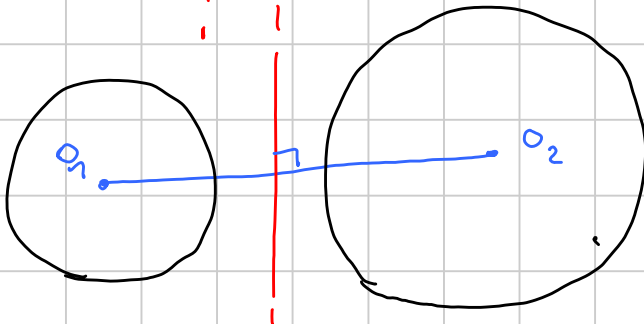
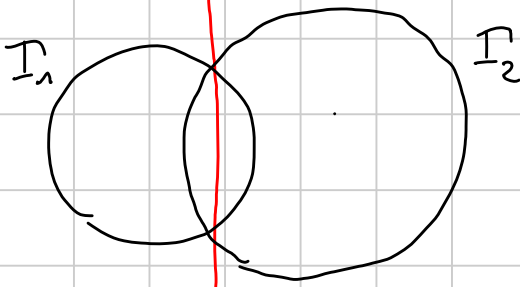
Asse radicale = il luogo dei punti P t.c. $Pow_{I_1} P = Pow_{I_2} P$

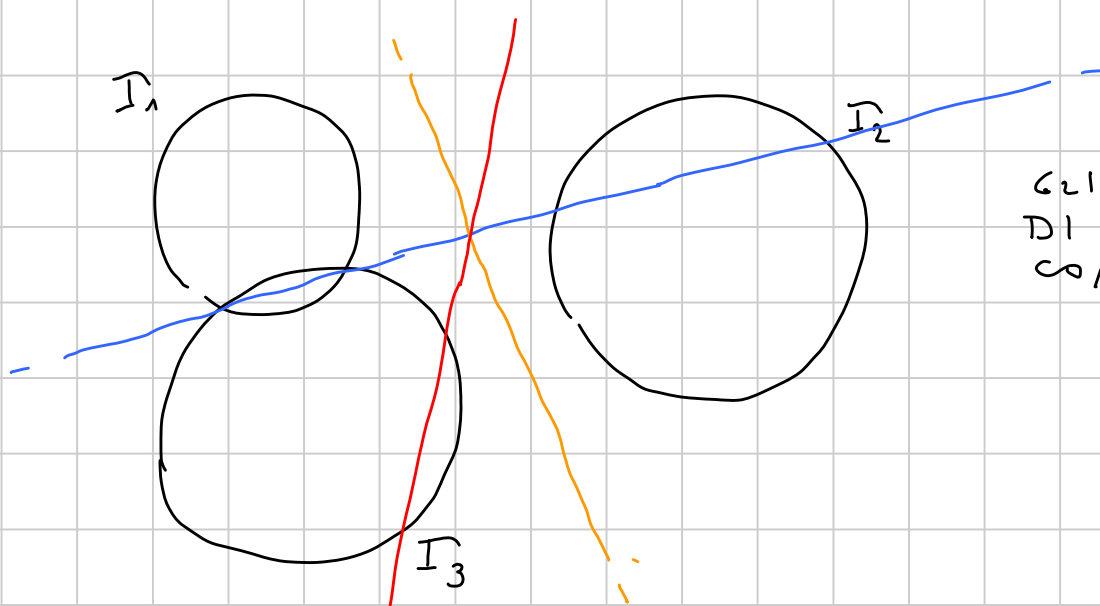


• RETTA

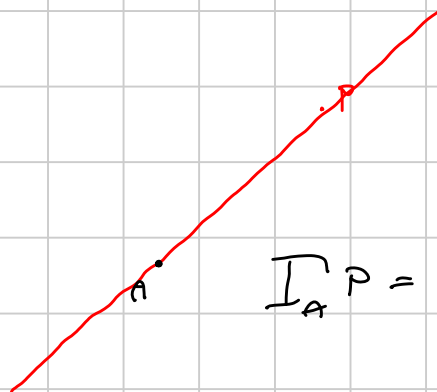
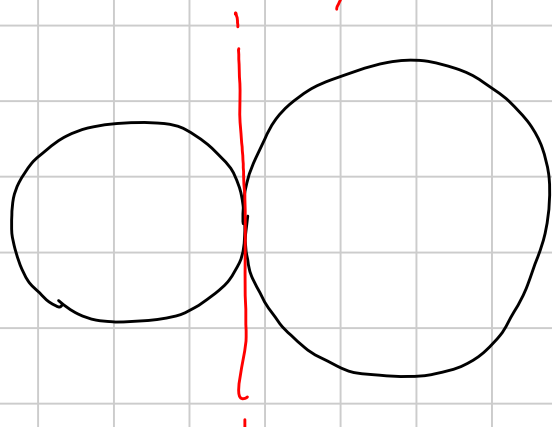
$$PA_1 \cdot PB_1 = PA_2 \cdot PB_2$$

← ASSE RADICALE



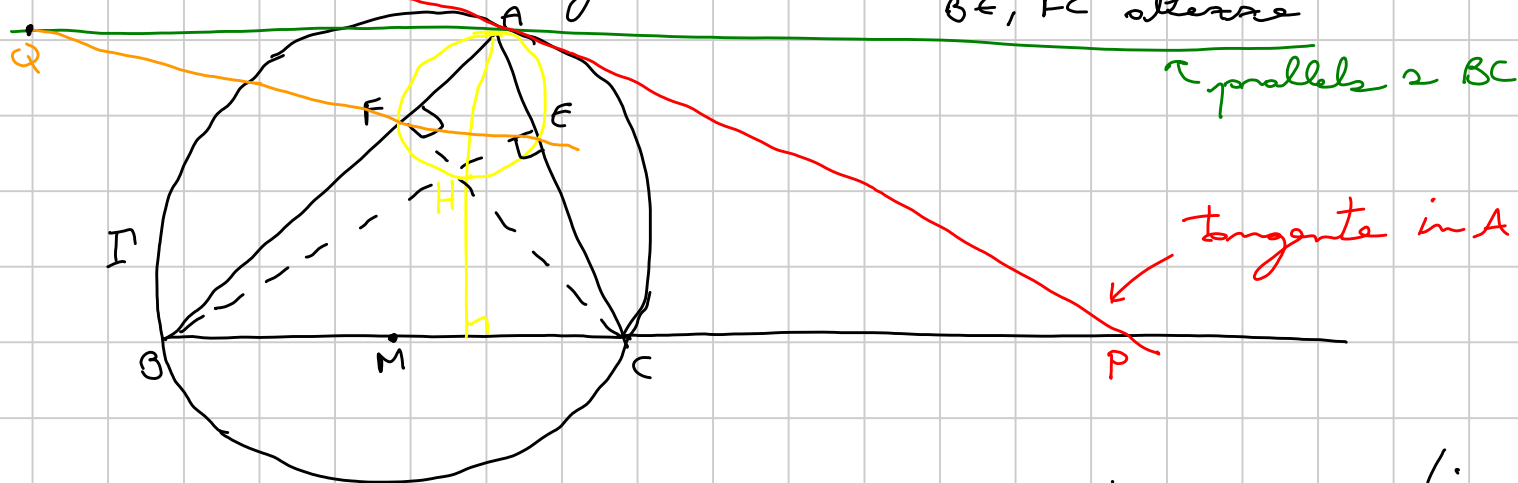


GLI ASSI RADICALI
DI 3 CIRCONFERENZE
CONCORRONO



$$I_A P = PA^2$$

PROBLEMA $\triangle ABC$ acutangolo, $AB \neq AC$, I circonscritta ad $\triangle ABC$
BE, FC altezze



τ parallela a BC

tangente in A

M punto medio di BC

SOLUZIONE

CONSIDERIAMO LE CIRCONFERENZE AEF, BCE, A

passa per F, ha centro M

Asse radicale per AEF, BCE $\rightarrow$ EF

per AEF, A $\rightarrow$ tangente in A alla circonferenza AEF

AH diametro della circ. AEF

Th $PQ \perp$ mediana
in A
di $\triangle ABC$

$$AH \perp BC$$

$\int \Rightarrow AQ$ tangente
di AEF

Asse radicale per AEF, $A \rightarrow AQ$

$\Rightarrow Q$ CENTRO RADICALE di AEF, BCE, A

$$\Rightarrow \text{Pow}_{BCE} Q = \text{Pow}_A Q = AQ^2$$

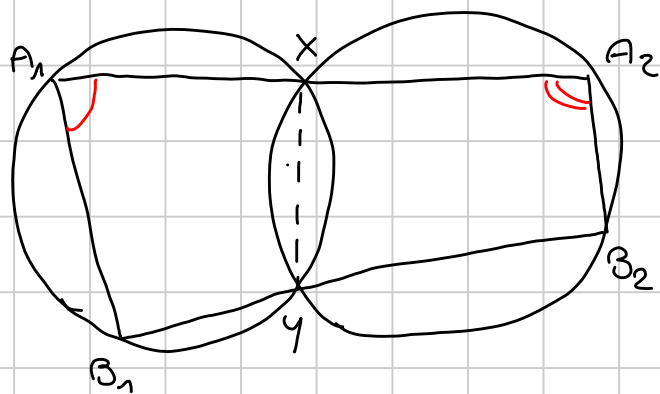
$$\text{Pow}_{BCE} P = \text{Pow}_A P = \text{Pow}_A P$$

$\Rightarrow PQ$ asse radicale di BCEF, A

$\Rightarrow PQ \perp$ retta che congiunge i centri: MA

$\Rightarrow PQ \perp MA$

Teorema di Reim



A_1B_1XY ciclico

A_2B_2XY ciclico

A_1X, A_2 allineati

B_1, B_2 allineati

Th: $A_1B_1 \parallel A_2B_2$

$$\text{DIM} \quad \angle XA_1B_1 = 180^\circ - \angle B_1YX = \angle XYB_2 = 180^\circ - \angle B_2A_2X \Rightarrow A_1B_1 \parallel A_2B_2$$

INVERSO 1 A_1B_1XY ciclico

A_1X, A_2, B_1, B_2 allineati

$A_1B_1 \parallel A_2B_2$

$\Rightarrow A_2B_2XY$ ciclico

INVERSO 2 A_1B_1XY, A_2B_2XY ciclici

A_1X, A_2 allineati

$A_1B_1 \parallel A_2B_2$

$\Rightarrow B_1, Y, B_2$ allineati

ESERCIZIO PER CASA: DIMOSTRARE GLI INVERSI

IMO 2022 - B1

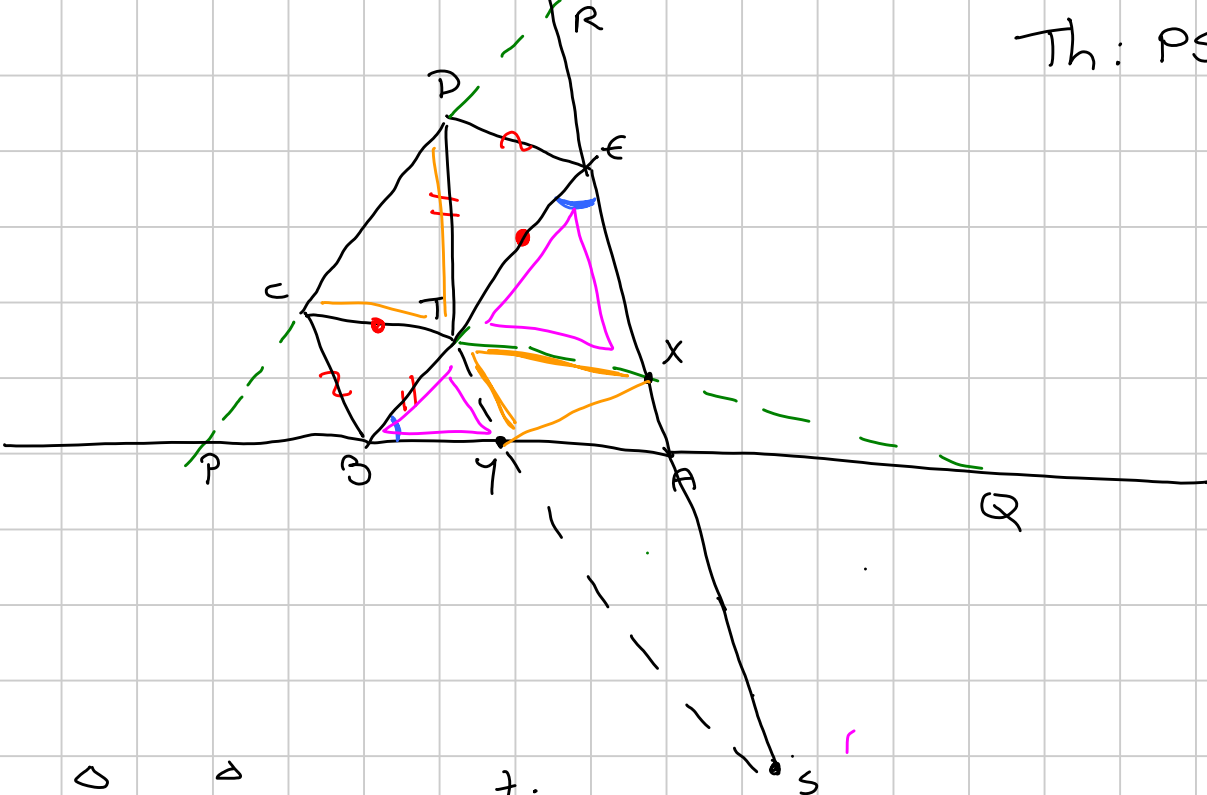
ABCDE convesso, $BC = DE$

$TB = TD, TC = TE, \angle ABT = \angle TEA$

PBAQ in questo online

REAS in questo online

Th: PSQR ciclico



$\triangle TBC, \triangle TDE$ congruenti

$X = AE \cap CT, Y = AB \cap DT$

$$\begin{aligned} \angle XQY &= \angle TQB = 180^\circ - \angle QTB - \angle TBQ = \angle BTC - \angle TBQ = \\ &= \angle DTE - \angle XET = 180^\circ - \angle ETS - \angle SET = \angle TSE = \angle YSX \end{aligned}$$

$\Rightarrow XYSQ$ ciclico

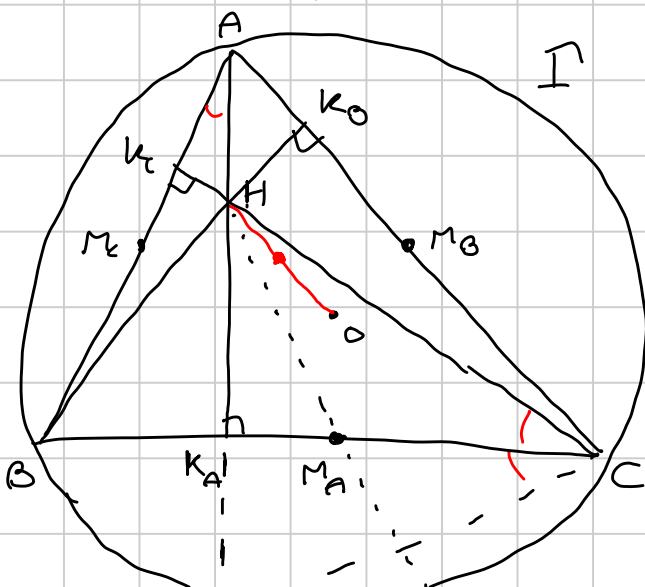
Vogliamo $XY \parallel PR$ (+ Reim $\Rightarrow$ TESI)

$$\angle BTS = 180^\circ - \angle BTD = 180^\circ - \angle CTE = \angle XTE, \angle XET = \angle YBT \Rightarrow$$

$$\triangle XTE \sim \triangle YTB \quad \triangle TBC \sim \triangle TDE$$

$$\frac{TX}{TY} = \frac{TE}{TB} = \frac{TD}{TC} \Rightarrow XY \parallel PR$$

CIRCONFERENZA DI FEUERBACH

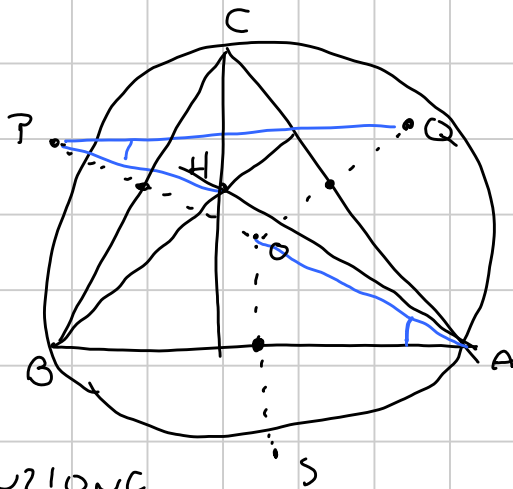


- H ortocentro di $\triangle ABC$
- I circoscritta
- simmetrico di H rispetto a BC sta su I

- simmetrico di H rispetto a MA sta su I

- $K_A, K_B, K_C, M_A, M_B, M_C$ stanno su una circonferenza
punti medi di AH, BH, CH
- ha raggio $\frac{1}{2}$ di I , ha centro il punto medio di OH

TEST DI AMMISSIONE



$$\hat{BAC} = 40^\circ, \hat{ABC} = 75^\circ, \hat{BCA} = 65^\circ$$

O circocentro

P, Q simmetrici di O rispetto a BC e CA

H ortocentro

Calcolare $\hat{HPQ}$.

SOLUZIONE

S simmetrico di O rispetto ad AB.

$\triangle M_A M_B M_C$ simile ad $\triangle ABC$

omotetia di centro O, $M_A \rightarrow P$

$M_B \rightarrow Q$

$M_C \rightarrow S$

$\Rightarrow \triangle PQS$ congruente a $\triangle ABC$

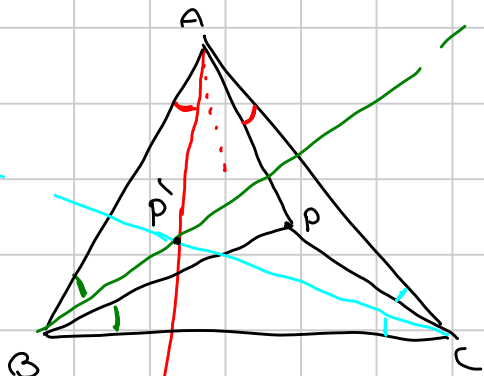
Teorema $\rightarrow$ circonscritta a $\triangle PQS$

centro di $\triangle PQS \rightarrow H$

H circocentro di $\triangle PQS$

$$\hat{HPQ} = \hat{OAB} = 90^\circ - \hat{ACB}$$

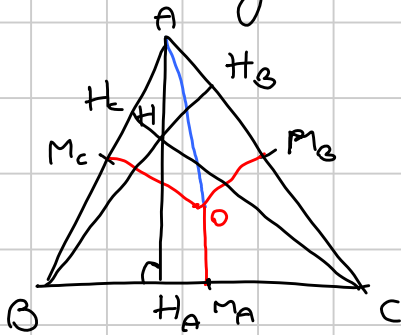
O, H coniugati isogonali



K simmetrico di AP rispetto alla bisettrice in A

Quante tre rette concorrono in un punto P'
 ↑
 CONIUGATO
 ISOGONALE

- O, H coniugati isogonali

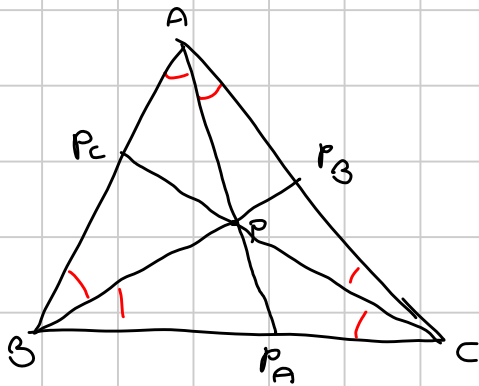


$$\angle BAH = \angle OAC$$

$$\angle BAH = 90^\circ - \angle ABC$$

$$\angle OAC = 90^\circ - \angle ABC = 90^\circ - \angle ABC$$

- DIMOSTRAZIONE CHE LE 3 RETTE CONCORRONO

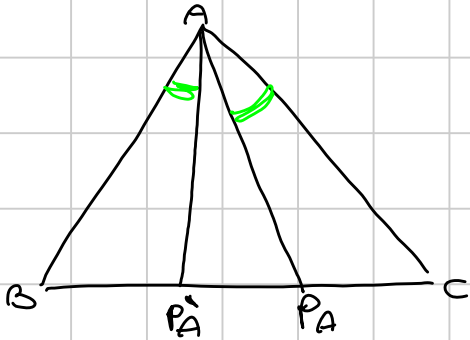


TEOREMA DI Ceva:

AP_a, BP_b, CP_c concorrono

$$\Leftrightarrow \frac{\sin \angle P_a A B}{\sin \angle P_a A C} \cdot \frac{\sin \angle P_b C A}{\sin \angle P_b C B} \cdot \frac{\sin \angle P_c B A}{\sin \angle P_c B C} = 1$$

Concorrono in P $\Rightarrow$ rapporto tra i seni = 1



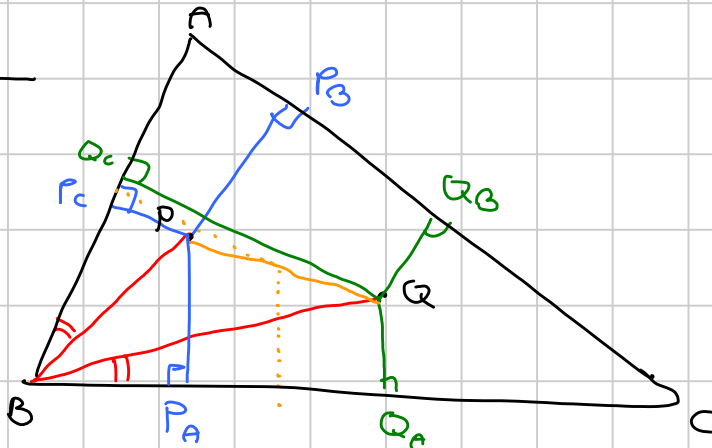
$$\angle P_a A B = \angle P_a A C$$

$$\angle P_a A C = \angle P_a A B$$

$\Rightarrow$ il rapporto rimane 1

$\Rightarrow$ concorrono in P'

LEMMA



P, Q coniugati isogonali

Th: le proiezioni di P, Q sui lati sono concicliche

NOTA: come controllo abbiamo le circonferenze di Feuerbach

DIMOSTRAZIONE

CLAIM : $BP_A \cdot BQ_A = BP_C \cdot BQ_C \Leftrightarrow P_C \hat{B} P_A \sim Q_C \hat{B} Q_A$

$$\frac{BP_A}{BP_C} = \frac{BQ_C}{BQ_A}$$

corrispondenti isogonali $\Rightarrow \hat{P}_A = \hat{Q}_C \Rightarrow P_C \hat{B} P_A \sim Q_C \hat{B} Q_A$

$$\frac{BP_C}{BP} = \frac{BQ_A}{BQ} \Rightarrow \frac{BP_C}{BQ_A} = \frac{BP}{BQ} = \frac{BP_A}{BQ_C}$$

analogamente $P_A \hat{B} P_C \sim Q_A \hat{B} Q_C$

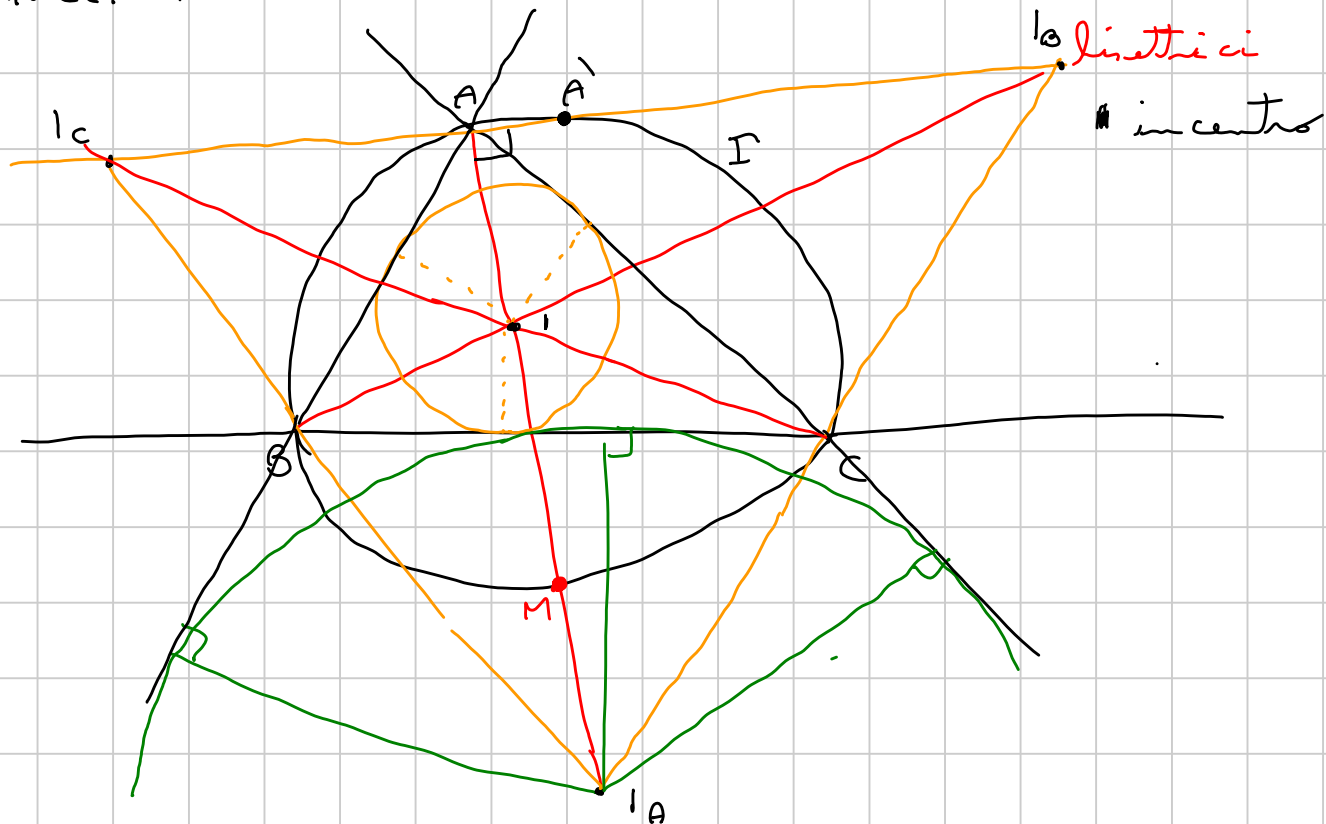
$$\Rightarrow BP_C \cdot BQ_C = BP_A \cdot BQ_A \Rightarrow P_A Q_A P_C Q_C \text{ ciclico}$$

analogamente $P_A Q_A P_B Q_B, P_B Q_B P_C Q_C$ ciclici

Il centro di $P_A Q_A P_C Q_C$ sarà l'intersezione degli assi di $P_A Q_A$ e $P_C Q_C$ che si intersecano nel punto medio di PQ .

$\Rightarrow$ HANNO TUTTE CENTRO IL PUNTO MEDIO DI PQ

INCENTRI ED EXCENTRI



linea interna in A, linee esterne in B, C concorrono in I_A
EXCENTRO

centri dei cerchi escircati

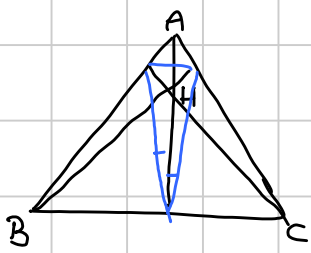
• M punto medio dell'arco BC

• $AI \perp BC \Rightarrow I_A A$ altezza del triangolo $I_A \hat{B} I_C$

I ortocentro di $I_A \hat{B} I_C$

• I (circoscritta ad $\hat{ABC}$) e Feuerbach per $I_A \hat{B} I_C$

• $A' = I \cap BC$ e punto medio di BC



H ortocentro
H e incentro del triangolo formato dai piedi delle altezze

Dimostrazione

incentro $\Rightarrow$ intersezione delle bisettrici

PER CASA: dimostrare questo con angle chasing

PROBLEMI

① $\hat{ABC}$ triangolo, I inscritta, $I \cap AB = T$

D punto simmetricamente opposto a T

$S = CD \cap AB$

Dimostrare che $AT = SB$

② $\hat{ABC}$, I incentro, I_A excentro opposto ad A

M punto medio di BC che non contiene A

Dimostrare che $I_B I_C$ ciclico con M centro.

③ $\hat{ABC}$ acutangolo, H ortocentro,

I_A circonferenza con centro il punto medio di BC , passante per H .

$I_A \cap BC = \{A_1, A_2\}$

Analogamente B_1, B_2, C_1, C_2

Dimostrare $A_1 A_2 B_1 B_2 C_1 C_2$ ciclico

④ $\hat{ABC}$, E, F piedi delle altezze da B, C

M punto medio di BC

X, Y punti medi di MF, ME

$T = \{\text{parallela a } BC \text{ passante per } A\} \cap XY$

Dimostrare che $TA^2 = TM^2$

⑤ IMO 2024 B1

$\triangle ABC$, $AB < AC < BC$, I incentro, ω inscritta

X su BC tale che $X \neq C$ e la retta per X parallela ad AC è tangente a ω .

Analogamente Y su BC , $Y \neq B$, retta per Y $\parallel AB$ è tangente a ω .

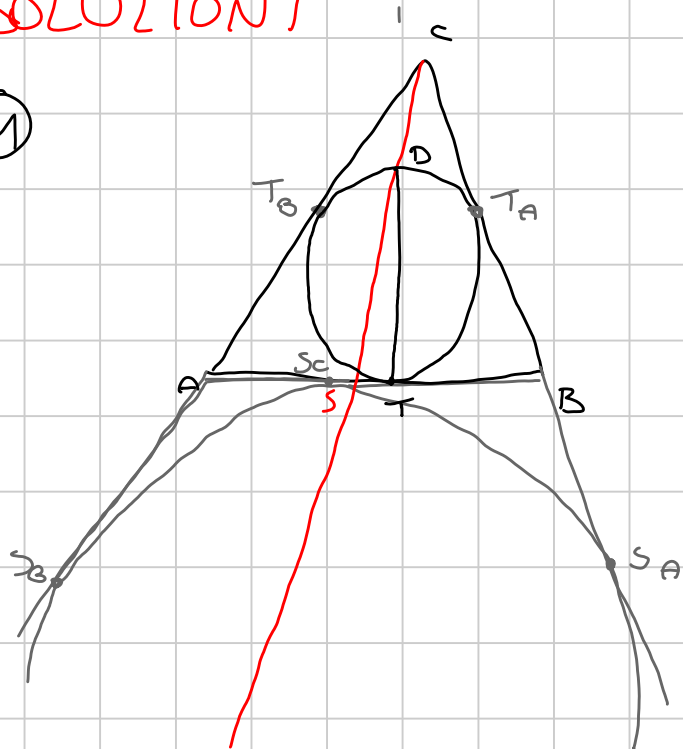
A il $\{ \text{circonscritta ad } \triangle ABC \} = \{ P, A \}$

K, L punti medi di AC, AB .

Dimostrare $\angle KIL + \angle YPX = 180^\circ$

SOLUZIONE 1

①



Th: $AT = SB$

$\Leftrightarrow S$ punto di tangenza dell'escritta

$$\begin{cases} CS_B = CSA \\ CT_B = CT_A \end{cases} \Rightarrow TBS_B = TASA$$

$$\Rightarrow T_B A + AS_B = T_A B + BS_A$$

$$\begin{matrix} TA + AS & TB + BS_C \\ \parallel & \parallel \end{matrix}$$

$$2AT - ST \quad 2BS_C - ST$$

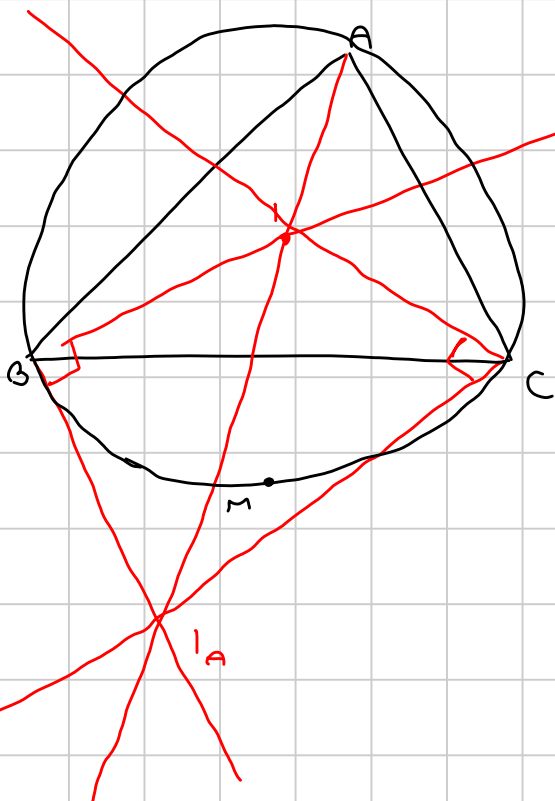
$$\Rightarrow AT = BS_C$$

OMOTETIA DI CENTRO C
 $D \rightarrow S$

retta tangente a $D \rightarrow AB$

circonf. inscritta $\rightarrow$ circonf. escritta

②



$AIM \perp A$ allineati

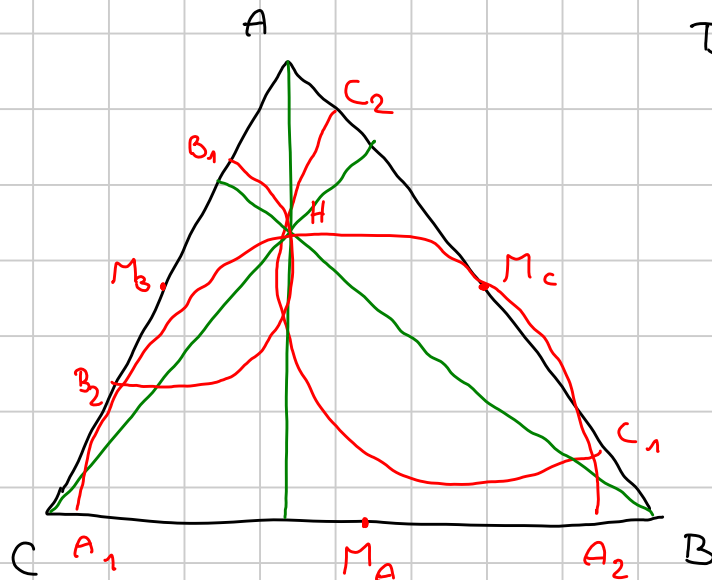
$$\angle BIA = \angle CIA = 90^\circ$$

$\Rightarrow ICA B$ ciclico

① ABC e Feuerbach di $l_a l_b l_c$
passa per M

$\Rightarrow M$ punto medio

③



Dimostrare che $B_1B_2C_1C_2$ è ciclico

$\Leftrightarrow A \in$ asse radicale

$H \in$ asse radicale

Vogliamo AH asse radicale

Sopprimere asse radicale $\perp M_B M_C$

$M_B M_C \parallel BC \perp AH$

$\Rightarrow AH$ asse radicale

$\Rightarrow B_1B_2C_1C_2$ ciclico

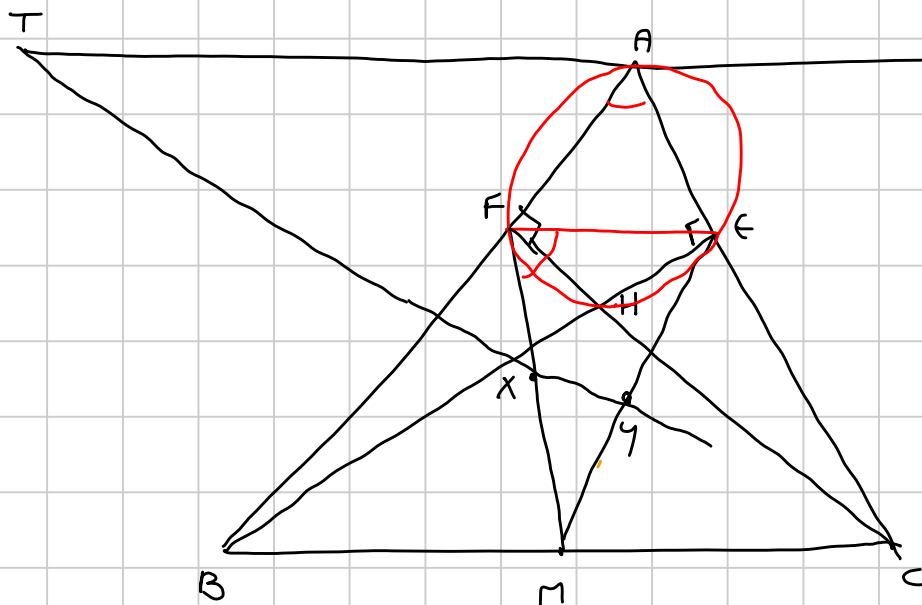
Centro di $B_1B_2C_1C_2$ sta sugli assi di B_1B_2 e C_1C_2

sono gli assi di AB e AC

$\Rightarrow$ il centro è il circocentro di $\triangle ABC$

Vale anche per $A_1A_2B_1B_2$ e conclude.

④



$$FX = XM \quad EY = YM$$

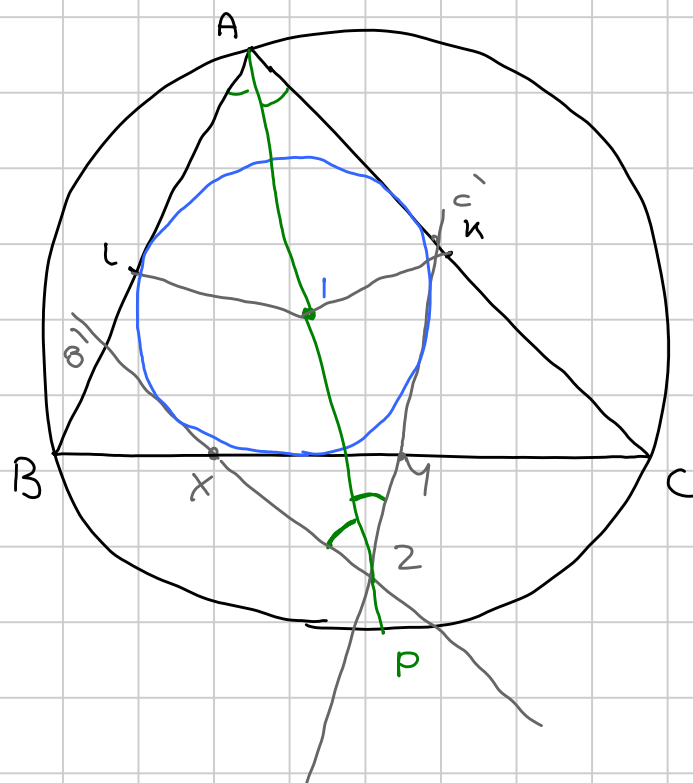
$$AT \parallel BC$$

$$Th: TA^2 = TM^2$$

Consideriamo la
circonferenza M ,
e AFF .

Se $T \in$ asse radicale
e TA tangente $\odot AFF$
 $\Rightarrow Th$

- TA tangente a $\odot AFE$?
 $H \in \odot AFE$, il centro sta su AH , $AH \perp BC \parallel TA \checkmark$
- TE asse nodale
 Se MF e ME tangenti a $\odot AFE$
 $\Rightarrow Pow_{AFE} X = FX^2 = XM^2 = Pow_M X \Rightarrow XY$ asse nodale
 $\triangle FBC$ ciclico con M centro
 $\angle FEM = 90^\circ - \frac{\angle EMF}{2} = 90^\circ - \angle BFM = \angle ABF$
 $\Rightarrow FM$ tangente
 Analogamente EM tangente



$$Th: \angle KIL + \angle XPY = 180^\circ$$

- P punto medio BC
- LX, KY, AI concorrenti in Z

$\underline{DIM} Z = B'X \cap C'Y$
 $AB'ZC'$ parallelogramma
 circoscritto ad una circonferenza.
 $\Rightarrow$ rombo
 $\Rightarrow AIZ$ allineati

- $BXZP$ e $CYZP$ ciclici

$$\widehat{DPM} \times \widehat{ZP} = 180^\circ - \widehat{AZX} = 180^\circ - \widehat{PAC} = 180^\circ - \widehat{PBC} \quad \checkmark$$

- $\widehat{XPY} = \widehat{XPZ} + \widehat{ZPY} = \widehat{XBZ} + \widehat{ZCB} = \widehat{CBZ}$ rambo
↓

omnitetiz olí centro A che monob $L \rightarrow B, K \rightarrow C, I \rightarrow Z$

$\Rightarrow$

$$\widehat{KIL} = \widehat{BZC}$$

$$\widehat{KIL} + \widehat{YPX} = \widehat{BZC} + \widehat{CBZ} + \widehat{ZCB} = 180^\circ$$

↑
nel triangolo $\triangle CBZ$