

A2 Medium - MaxF

Note Title

03/09/2026

Determinare, al variare di $x, y, z \geq 0$ con $x+2y+3z=1$, il massimo di $x^5 y^2 z$.

Parte I - Disuguaglianze classiche

AM-GM: Se $x_1, \dots, x_n \geq 0$ allora $\frac{x_1 + \dots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \dots x_n}$ con uguaglianza $\Leftrightarrow x_1 = \dots = x_n$

AM-GM "pesata": $\omega_1, \dots, \omega_n \geq 0$ razionali con somma 1, allora $\sum_{i=1}^n \omega_i x_i \geq \prod_{i=1}^n x_i^{\omega_i}$.

Trovo N intero tale che $\omega_i = \frac{k_i}{N}$ con $k_i \in \mathbb{N}$ e faccio AM-GM su $(x_1, \dots, x_n)$ dove x_i compare k_i volte.

$$AM = \frac{\sum k_i x_i}{N} = \sum \omega_i x_i.$$

$$GM = \sqrt[N]{\prod x_i^{k_i}} = \prod x_i^{\omega_i}$$

AM-GM pesata generale: la disuguaglianza vale anche se gli ω_i sono supposti reali.

Esercizio: il caso di uguaglianza rimane lo stesso.

IMO 2020/2.

Siano $a, b, c, d > 0$ con $a \geq b \geq c \geq d$, $a+b+c+d=1$.

Tesi: $(a+2b+3c+4d)a^a b^b c^c d^d < 1$.

Idea: provo a ottenere $a^a b^b c^c d^d$ come media geometrica pesata.

AM-GM su (a, b, c, d) con pesi (a, b, c, d) unità:

$$a^2 b^2 c^2 d^2 \leq a^2 + b^2 + c^2 + d^2.$$

Hope: $(a+2b+3c+4d)(a^2+b^2+c^2+d^2) \leq 1.$

$$(1, 0, 0, 0) \quad 1 \cdot 1 = 1$$

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0\right) \quad \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$$

$$\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0\right) \quad 2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

$$\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right) \quad \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{5}{8}$$

$$a = 1 - \varepsilon \quad \text{avrei} \quad a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \sim 1 - 2\varepsilon$$

$$a + 2b + 3c + 4d \approx 1 - \varepsilon + 2 \cdot \frac{\varepsilon}{3} + 3 \cdot \frac{\varepsilon}{3} + 4 \cdot \frac{\varepsilon}{3} = 1 + 2\varepsilon.$$

Idea: $a + 2b + 3c + 4d \leq a + 3b + 3c + 3d = a + 3(1-a) = 3 - 2a$

$$\Rightarrow \text{LHS} \leq (3 - 2a)(a^2 + b^2 + c^2 + d^2).$$

Idea: dato a fissato, trovare $\max\{b^2 + c^2 + d^2\}$ in funzione di a .

• Disug. di Young: Se $x, y \geq 0$, $p, q > 1$ con $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

Allora: $xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}$. È esattamente AM-GM su (x^p, y^q) con $(\frac{1}{p}, \frac{1}{q})$.

• Hölder: $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Allora

$$\sum_{i=1}^n x_i y_i \leq \left(\sum_{i=1}^n x_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n y_i^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Disomogeneità: $\sum x_i^p = 1, \sum y_i^q = 1.$

$$\sum_{i=1}^n x_i y_i \leq \sum_{i=1}^n \frac{x_i^p}{p} + \frac{y_i^q}{q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

USAMO 2004/5.

Siano $a, b, c \geq 0$. Dimostrare che

$$(a^5 - a^2 + 3)(b^5 - b^2 + 3)(c^5 - c^2 + 3) \geq (a+b+c)^3.$$

Sostituisco (x, x, x) e ho uguaglianza solo per $x=1$.

Ho: $t^5 - t^2 + 3 \geq f(t)$ con $\deg f < 5$.

$$f(1) = 3, f'(1) = 3$$

Se $\deg f < 3$, non potrei avere $f(a)f(1)^2 \geq (a+2)^3$.

Un polinomio che soddisfa è $f(t) = t^3 + 2$.

$$\text{Ho } t^5 - t^2 + 3 \geq t^3 + 2 \Leftrightarrow t^5 - t^3 - t^2 + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (t^3 - 1)(t^2 - 1) \geq 0.$$

Resta da dire che

$$(a^3 + 2)(b^3 + 2)(c^3 + 2) \geq (a+b+c)^3.$$

(i) Dimostrare che se $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 1$, allora

$$xy^z \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q} + \frac{z^r}{r}$$

$$(ii) \sum_{i=1}^n x_i y_i z_i \leq \left(\sum x_i^p \right)^{1/p} \left(\sum y_i^q \right)^{1/q} \left(\sum z_i^r \right)^{1/r}$$

(iii) Concludere

(i) AM-GM su (x^p, y^q, z^r) con pesi $(\frac{1}{p}, \frac{1}{q}, \frac{1}{r})$.

(ii) Come Hölder

(iii) Hölder generalizzato con $(a, 1, 1), (1, b, 1), (1, 1, c)$
e $p=q=r=3$.

Esercizio per casa: usare Hölder per dimostrare disuguaglianza tra medie p -esime pesate.

Punto (a): per $x_1, \dots, x_n \geq 0$ definisco

$$M_p = \left(\frac{1}{n} \sum x_i^p \right)^{1/p}. \text{ Allora } M_p \text{ crescente in } p.$$

Punto (b): stessa cosa $M_p = (\sum w_i x_i^p)^{1/p}$.

Hint: per $M_p \geq M_q$ ($p \geq q$) ricorressi al caso in cui $p=1$ o $q=1$.

PARTE 2

Es. di riscaldamento: se $a, b, c \geq 0$ soddisfano $a+b+c=1$, allora

$$\sqrt{1-a^2} + \sqrt{1-b^2} + \sqrt{1-c^2} \leq 2\sqrt{2}$$

Soluzione: Jensen. (Se non la sapete, guardatevi A2 basic).

Questione: ho $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ dove I intervallo. Studio min/max di $f(a_1) + \dots + f(a_n)$ dove $\sum a_i = 1$.

Jensen: se f è convessa, il minimo è per $a_1 = \dots = a_n$
" concava, il massimo " "

Se $\sum \lambda_i = 1$ con $\lambda_i \geq 0$ allora

$$\sum \lambda_i f(a_i) \geq f(\sum \lambda_i a_i) \quad (f \text{ convessa})$$

Esempio di applicazione: AM-QM.

$f(x) = x^2$ è convessa. $\Rightarrow$

$$f(a_1) + \dots + f(a_n) \geq n f\left(\frac{a_1 + \dots + a_n}{n}\right)$$

$$\Rightarrow \sum a_i^2 = \frac{(\sum a_i)^2}{n} \Rightarrow QM \geq AM$$

Fatto utile: se f è derivabile due volte, allora per vedere se è convessa, controllo che $f''(x) \geq 0$ nell'intervallo.

Osservazioni:

(1) Non tutte le funzioni convesse sono derivabili.

Per esempio: $f(x) = |x|$.

(2) Se f è convessa in $[0, 1]$ e in $[1, 2]$, è convessa in

$[0, 2]$?

No:



1 Mo 2001/2.

$a, b, c > 0$.

Tesi: $\sum_{cyc} \frac{a}{\sqrt{a^2 + 8bc}} \geq 1$.

Suppongo $a+b+c=1$. $f(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$ è convessa.

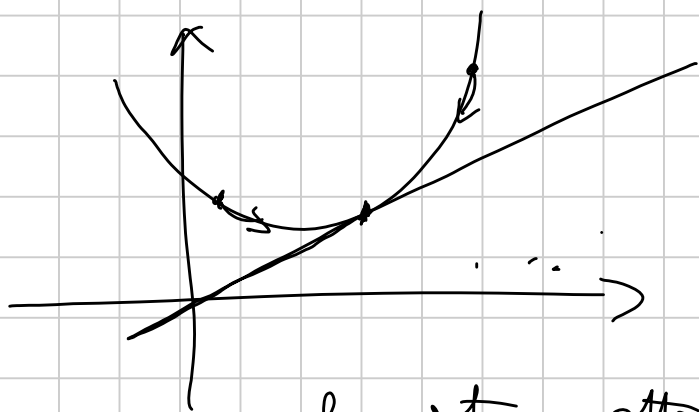
$$a f(a^2 + 8bc) + b f(b^2 + 8ca) + c f(c^2 + 8ab) \geq 1$$

$$a f(a^2 + 8bc) + b f(b^2 + 8ca) + c f(c^2 + 8ab) \geq$$

$$\geq f(a^3 + b^3 + c^3 + 24abc).$$

$$\frac{1}{\sqrt{a^3 + b^3 + c^3 + 24abc}} \geq 1 \Leftrightarrow a^3 + b^3 + c^3 + 24abc \leq (a+b+c)^3$$

Vera perché semplifico $a^3, b^3, c^3 + AM-GM$ (e bunching).



a, b, c con $a+b+c=3M$.

f convessa $\Rightarrow$

$$f(a) + f(b) + f(c) \geq 3f(M)$$

f convessa $\Rightarrow$ c'è una retta passante per il punto $(M, f(M))$ che sta sotto la funzione.

Retta di eq. $y = mx + q$

$$f(a) + f(b) + f(c) \geq am + q + bm + q + cm + q =$$

$$= 3\left(\frac{a+b+c}{3}m + q\right) = 3(Mm + q) = 3f(M).$$



Tangent line trick: Se $f(x) \geq ux+q$ con $y=ux+q$ tangente al grafico di f in $x = \frac{\sum a_i}{n}$ ha la tesi di Jensen.

Se $a, b, c > 0$ con $a+b+c=3$ allora
 $18 \sum_{a,b,c} \frac{1}{(3-a)(4-a)} + 2(ab+bc+ca) \geq 15$

$$\text{Scrivo } 2(ab+bc+ca) \leq (a+b+c)^2 - (a^2+b^2+c^2) = 9 - (a^2+b^2+c^2)$$

$$\sum_{a,b,c} \left(\frac{18}{(3-a)(4-a)} - a^2 \right) \geq 6 \quad f(x) = \frac{18}{(3-x)(4-x)} - x^2.$$

Vorrei $f(a)+f(b)+f(c) \geq 6$ per $a+b+c=3$.

Hope: C'è una retta tangente al grafico di f in $(1, 2)$ tale che $f(x) \geq ux+q$.

Step 1. Calcolare $f'(x)$ e in particolare $f'(1)$.

Step 2. Scrivere l'equazione $y = f'(1)(x-1) + f(1)$

Step 3. Dimostrare che $f(x) \geq f'(1)(x-1) + f(1)$ per $0 \leq x \leq 3$.

Esercizio per casa: fatelo.

• Karamata

Se f è convessa e $(x_1, \dots, x_n) \succ (y_1, \dots, y_n)$ con $\sum x_i = \sum y_i$
 allora $\sum_{i=1}^n f(x_i) \geq \sum_{i=1}^n f(y_i)$ $y_1 \geq \dots \geq y_n$

$(x_1, \dots, x_n) \prec_k (y_1, \dots, y_n)$ significa
 $\sum_{i=1}^k x_i \geq \sum_{i=1}^k y_i$

Dim. Per induzione. $n=1$ ovvio. Se $x_1 = y_1$ tolgo e sono a posto.

(Assumiamo di aver fatto $n=2$).

Suppongo $x_1 \geq \dots \geq x_k \geq y_1 \geq x_{k+1}$.

Se trasformo $(x_1, x_{k+1}) \rightarrow (y_1, x_1 + x_{k+1} - y_1)$.

$x'_1 = y_1$, $x'_{k+1} = x_1 + x_{k+1} - y_1$ allora ho

$f(x_1) + f(x_{k+1}) \geq f(y_1) + f(x_1 + x_{k+1} - y_1)$ per il caso $n=2$.

Quindi, $(x'_1, \dots, x'_n) \geq (y_1, \dots, y_n)$. Ora $x'_1 = y_1$ e mi sono ridotto a $n-1$.

Per $n=2$ ho $x_1 \geq y_1 \geq y_2 \geq x_2$ con $x_1 + x_2 = y_1 + y_2$.

Vorrei dire $f(x_1) + f(x_2) \geq f(y_1) + f(y_2)$.

Scrivo $y_1 = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$ con $\lambda \in [0,1]$ e

$$y_2 = (1-\lambda)x_1 + \lambda x_2$$

$$f(y_1) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2), \quad f(y_2) \leq (1-\lambda)f(x_1) + \lambda f(x_2).$$

$\Rightarrow$ tesi.

• $n-1$ EV.

Supponiamo che $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ sia concava per $x \leq x_0$ e convessa per $x \geq x_0$. Allora per dimostrare che $f(x_1) + \dots + f(x_n) \geq n f(c)$ mi basta farlo per $x_1 = \dots = x_{n-1}$ (con $\sum x_i = c$).

Prendiamo $x_1, \dots, x_k \in [-\infty, x_0]$ e $x_{k+1}, \dots, x_n \in [x_0, +\infty]$.

Step 1. Sostituisco $(x_1, \dots, x_k)$ con $(x'_1, x_0, \dots, x_0)$ e diminuisco la sommatoria per Karamata.

Step 2. Ho $n-1$ valori che sono $\geq x_0$. Per Jensen, il minimo esiste ed è quando sono uguali.

Esempi di applicazioni:

$a, b, c \geq 0$. Se $a+b+c=1$ allora

$$9 \sum_{cyc} a^5 - 10 \sum_{cyc} a^3 \geq 1.$$

$f(x) = 3x^5 - 10x^3$. $f'(x) = 180x^3 - 60x$. $f'(x) = 0$
 ha una soluzione > 0 . Ho $f''(x) \leq 0$ per $x \in [0, \frac{1}{\sqrt{3}}]$,
 $f''(x) \geq 0$ per $x \in [\frac{1}{\sqrt{3}}, +\infty)$.

Posso applicare n-1 EV e mi basta dimostrare
 che $2f(t) + f(1-2t) \geq 1$ per $0 \leq t \leq \frac{1}{2}$.

Esercizio: risolvere IMO 2001/2 con questa
 tecnica.

$$\sum_{cyc} \frac{a}{\sqrt{a^2 + 8bc}} \geq 1.$$

$$\sum_{cyc} \frac{1}{\sqrt{1 + 8 \cdot \frac{bc}{a^2}}} \geq 1.$$

$$p = \frac{bc}{a^2}, q = \frac{ca}{b^2}, r = \frac{ab}{c^2}$$

$$pqr = 1$$

Vorrei $\sum_{cyc} \frac{1}{\sqrt{1 + 8p}} \geq 1$. $p = e^x, q = e^y, r = e^z$
 $x + y + z = 0$.

$$\sum_{cyc} \frac{1}{\sqrt{1 + 8e^x}} \geq 1. \quad f(t) = \frac{1}{\sqrt{1 + 8e^t}}, \text{ allora}$$

$\Rightarrow$ voglio $x=y$ e si tratta di dimostrare che

$$\frac{2}{\sqrt{1 + 8t}} + \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{8}{t^2}}} \geq 1 \text{ per } t > 0$$

PARTE 3. Esercizi.

(1) Dimostrare che, per $a, b, c > 0$ vale

$$\sum_{cyc} \frac{(b+c-a)^2}{a^2 + (b+c)^2} \geq \frac{3}{5}$$

(2) Se $a_1, \dots, a_n \in [1, 2^k]$ (con $k \in \mathbb{N}$) allora

$$\sum_{i=1}^n \frac{a_i}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_i^2}} \leq 4\sqrt{kn}$$

(3) Se $(a_1, \dots, a_n) \succ (b_1, \dots, b_n)$ e $\sum a_i = \sum b_i$, allora
 $\exists$ coeff. $\lambda(\sigma) \geq 0$ con $\sum \lambda(\sigma) = 1$ tali che

$$b_k = \sum \lambda(\sigma) a_{\sigma(k)}.$$

Dedurre σ bunching.

(4) Trovare la massima costante $k > 0$ tale
 che, per ogni $x, y, z \geq 0$, valga

$$x^3 + y^3 + z^3 + 24xyz \geq k(x^2y + x^2z + y^2x + y^2z + z^2x + z^2y)$$

(5) Dimostrare che, se $a, b, c > 0$ sono lati di un triangolo

$$\sum_{cyc} \sqrt{(a+b-c)^2} \leq a^{2/3} + b^{2/3} + c^{2/3}$$

(1) $a+b+c=1$ disom. e poi tangent line trick.

(5) Karamata

(4) Ci ricorda la disuguaglianza di Schur:

$$x^3 + y^3 + z^3 + 3xyz \geq x^2y + x^2z + y^2x + y^2z + z^2x + z^2y.$$

Si riscrive come $\sum_{cyc} x(x-y)(x-z) \geq 0$. Supponi
 $x \geq y \geq z$.

Sostituisci $(1, 1, 0)$: $2 \geq 2k$ da cui $k \leq 1$.

(3) Per caso.

$$(2) \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{\sqrt{a_1^2 + \dots + a_i^2}} \leq 4\sqrt{kn}.$$

Casi piccoli: $k=1$.

$$\sum_{i=1}^n \frac{a_i}{\sqrt{a_1^2 + \dots + a_i^2}} \leq \sum_{i=1}^n \frac{2}{\sqrt{i}} = \sum_{i=1}^n 4(\sqrt{i} - \sqrt{i-1}) = 4\sqrt{n}.$$

$$n=4, \text{ vale } \frac{a_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}} + \frac{a_4}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2}} \leq \frac{a_2}{\sqrt{a_1^2}} + \frac{a_4}{\sqrt{a_2^2 + a_3^2}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{i}} \leq 2(\sqrt{i} - \sqrt{i-1})$$

Idea 1: Mi interessa solo sapere, per un certo i , quanti $j < i$ hanno $a_j \geq \frac{a_i}{2}$.

Idea 2: Se partiziono $(a_1, \dots, a_n)$ in sottosuccessioni, allora ho $\leq$ della somma dei valori su quelle sottosuccessioni.

Siano n_j numeri di el. in $[2^{j-1}, 2^j]$ per $1 \leq j \leq k$.

Se $a_1^{(j)}, \dots, a_{n_j}^{(j)}$ sono i termini in questione, avrò che

$$\frac{a_1^{(j)}}{\sqrt{a_1^{(j)^2}} + \dots + a_{n_j}^{(j)}} + \frac{a_2^{(j)}}{\sqrt{a_1^{(j)^2} + a_2^{(j)^2}} + \dots + a_{n_j}^{(j)}} + \dots + \frac{a_{n_j}^{(j)}}{\sqrt{a_1^{(j)^2} + \dots + a_{n_j}^{(j)^2}}} \leq 4\sqrt{n_j}$$

$$\Rightarrow \text{LHS} \leq 4(\sqrt{n_1} + \sqrt{n_2} + \dots + \sqrt{n_k}) \leq 4\sqrt{kn}$$