

Senior A3 Medium

Titolo nota

06/09/2026

- Successioni definite per ricorrenza
 - ricorrente lineari. (ripasso)
 - termini non omogenei
 - ricorrenze un po' più strane
- Equazioni funzionali
 - Eq Cauchy su $\mathbb{Q}$ e su $\mathbb{R}$
 - Tecniche std per FE
 - Esercizi

Ricorrenze lineari

Def $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ successione ha regola di ricorrenza lineare se $\forall n \geq 0$

$$a_{n+m} = \alpha_0 a_n + \alpha_1 a_{n+1} + \dots + \alpha_{m-1} a_{n+m-1}$$

$$\begin{cases} a_0 \\ \vdots \\ a_{m-1} \end{cases}$$

IDEA PER TROVARE UNA FORMA CHIUSA:

GUESSO $\tilde{a}_n = \lambda^n$

$$\lambda^{n+m} = \alpha_0 \lambda^{n+m-1} + \dots + \alpha_{m-1} \lambda$$

$P(\lambda) = 0$ polinomio caratteristico

CASO 1

se P ha tutte radici (eventualmente complesse) distinte OK

$$\underline{a_n = \sum c_i \lambda_i^n}$$

Esempio

$$a_0 = 2026$$

$$a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n \quad a_1 = 67$$

$$\lambda^2 = 5\lambda - 6 \rightarrow \lambda_{1,2} = \begin{matrix} 2 \\ 3 \end{matrix}$$

$$a_n = \underline{c_1} 2^n + \underline{c_2} 3^n$$

$a_0 = 2026$ esistono c_i ?

$$a_1 = 67$$

$$a_0 = c_1 + c_2 = 2026$$

$$a_1 = c_1 \cdot 2 + c_2 \cdot 3 = 67$$

$$\downarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2026 \\ 67 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{m-1} & \lambda_2^{m-1} & \dots & \lambda_m^{m-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix} = \underline{\underline{b}}$$

Vandermonde

det

$$\det = \prod_{i>j} (\lambda_i - \lambda_j) \neq 0$$

$$X^{n+m} - \alpha_0 X^n - \dots - \alpha_{m-1} X^{n+m-1}$$

Criterio derivata se $P(x)$ ha l come radice di molt. $S \geq 1$ allora $P'(x)$ ha l come radice di molt. $S-1$

$$(n+m) X^{n+m} - n \alpha_0 X^n - \dots - (n+m-1) \alpha_{m-1} X^{n+m-1}$$

$$\tilde{a}_n = n \lambda^n$$

• termini non omogenei

$$a_{n+m} = \alpha_0 a_n + \dots + \alpha_{m-1} a_{n+m-1} + f(h)$$

- $a_n^{(om)}$ che risolve la parte omogenea

$\tilde{a}_n$ soluzione particolare al problema

$$a_n = \tilde{a}_n + a_n^{(om)}$$

Esempio $a_{n+1} = 2a_n + 3^n$

$$a_n^{(om)} = C \cdot 2^n$$

$$\tilde{a}_n = K \cdot 3^n$$

$$K \cdot 3^{n+1} = 2 \cdot 3^n + 3^n = 3^{n+1}$$

$$\underline{k=1}$$

Sol generale $a_n = 3^n + \underline{c} \cdot 2^n$

• Ricorrenze più strane

$$(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$$

$$\begin{cases} \underline{a_0 = 2} \\ \underline{a_{n+1} = 2a_n^2 - 1} \end{cases}$$

$$\cos(2\theta) = 2\cos^2\theta - 1$$

Data questa identità

Una successione che rispetta la ricorrenza (non necessariamente il termine iniziale) è $\cos(2^{(n)}\theta_0) = \tilde{a}_n$

PROBLEMA

θ_0 reale

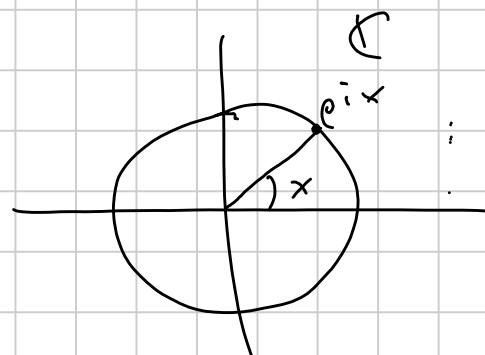
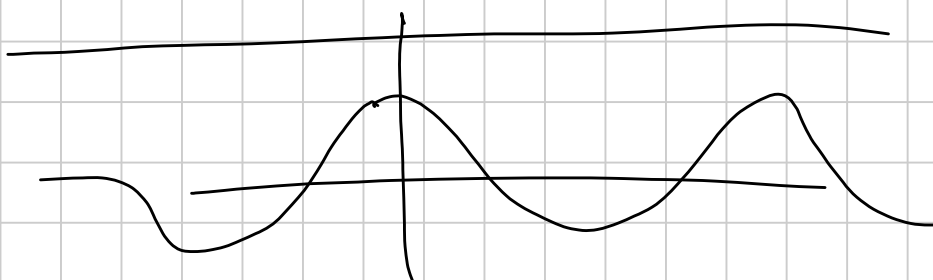
non ci lava mai

$\cos(\theta_0) = 2$ però complesso sì

$$\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

$$\cos(\theta_0) = \frac{e^{i\theta_0} + e^{-i\theta_0}}{2} = 2$$

$$e^{i\theta_0} + e^{-i\theta_0} = 4 \leadsto e^{2i\theta_0} - 4e^{i\theta_0} + 1 = 0$$



$$e^{ix} := \cos x + i \sin x$$

$$e^{i\theta_0} = \begin{cases} \frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} \\ 2-\sqrt{3} \end{cases} \quad e^{-i\theta_0} = \frac{1}{2+\sqrt{3}} = 2-\sqrt{3}$$

$$\cos(2^n \theta_0) = \frac{e^{2^n i \theta_0} + e^{-2^n i \theta_0}}{2} = \frac{(e^{i\theta_0})^{2^n} + (e^{-i\theta_0})^{2^n}}{2}$$

$$= \frac{(2+\sqrt{3})^{2^n} + (2-\sqrt{3})^{2^n}}{2}$$

$$1. a_0 = 2 \quad a_{n+1} = \frac{2a_n}{1-a_n^2}$$

$$2. a_0 = 2 \quad a_{n+2} = 2a_{n+1}(1-2a_n^2)$$

IDE E per farli:

1. $\tan(2^n \theta_0)$ risolve la regola

$$2. \sin(4\theta) = 2 \sin(2\theta) \underbrace{\cos(2\theta)}_{(1-2\sin^2\theta)}$$

$$a_{n+1} = C_{11}a_n + C_{12}b_n \quad \text{di solito si cerca}$$

$$b_{n+1} = C_{21}a_n + C_{22}b_n \quad \text{di prendere una certa}$$

combinazione lineare di a_n e b_n $\gamma_n = \lambda_1 a_n + \lambda_2 b_n$

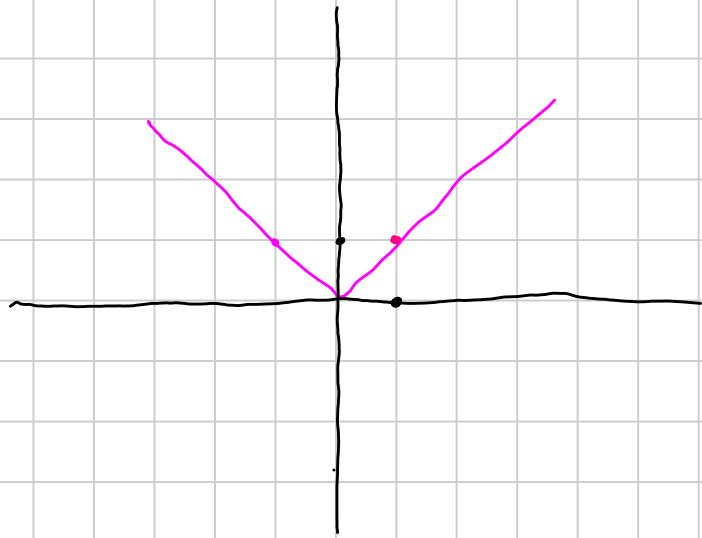
e si spera che questo disaccoppi la ricorrenza

$$\underline{z_n = (1+i)^n} \quad z_n = a_n + i b_n$$

$$a_{n+1} = \operatorname{Re}(z_{n+1}) = \operatorname{Re}(z_n(1+i)) = a_n - b_n$$

$$b_{n+1} = a_n + b_n$$

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$$



$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$$

$$\lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$$

$$\underbrace{\left[\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right]}_{A - \lambda I} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$$

$$\det \begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} = 0 \leadsto (1-\lambda)^2 + 1 = 0$$

$$\lambda = 1 \pm i$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (1 \pm i) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \cancel{x} - y = \cancel{(1+i)}x & xi = -y \\ x + \cancel{y} = \cancel{(1+i)}y & x = iy \end{cases} \leadsto \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix}$$

$$\underline{\gamma_n = a_n - ib_n}$$

$$\left. \begin{array}{l} a_n - b_n = a_{n+1} \\ -i(a_n + b_n) = -ib_{n+1} \end{array} \right\} \Rightarrow a_n - ib_n = \cancel{a_n - b_n} - i\cancel{a_n + b_n} = \gamma_n$$

$$\gamma_{n+1} = \gamma_n(1-i) \leadsto (a_n - ib_n) = (1-i)^n$$

$$\underline{a_n + ib_n = z_n = (1+i)^n}$$

Equazioni funzionali:

• Equazione di Cauchy.

Def $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ rispetta l'eq. di Cauchy se

$$\underline{f(x+y) = f(x) + f(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}}$$

$$x = y = 0$$

$$f(0) = 2f(0) \Rightarrow f(0) = 0$$

$$x = y = 1$$

$$f(2) = 2f(1)$$

$$x = 2 \quad y = 1$$

$$f(3) = \underbrace{f(2) + f(1)}_{2f(1)} = 3f(1)$$

$$x = n \quad y = 1$$

$$f(n) = n f(1) \quad f(n+1) = \underbrace{f(n)}_{n f(1)} + f(1) = (n+1)f(1)$$

$$\underbrace{f(1-1)}_0 = f(1) + f(-1)$$

$$\circ \quad f(-1) = -f(1)$$

Novamente per induzione $f(-n-1) = \underbrace{f(-n)}_{-nf(1)} + f(-1)$

$$= -nf(1) - f(1) = -(n+1)f(1)$$

$$f\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k}\right) = 2 f\left(\frac{1}{k}\right)$$

— $f\left(\frac{m}{k}\right) = m f\left(\frac{1}{k}\right)$ sia per positivi che neg.

$$m=k \quad f(1) = k f\left(\frac{1}{k}\right) \quad f\left(\frac{1}{k}\right) = \frac{f(1)}{k}$$

$$f\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{f(p)}{q} = \frac{p}{q} f(1) \quad \text{Quindi l'abbiamo risolta nei razionali}$$

Saremmo tentati a dire $f(x) = x \underbrace{f(1)}_c = cx \quad \forall x \in \mathbb{R}$
 ma questo non è necessariamente vero

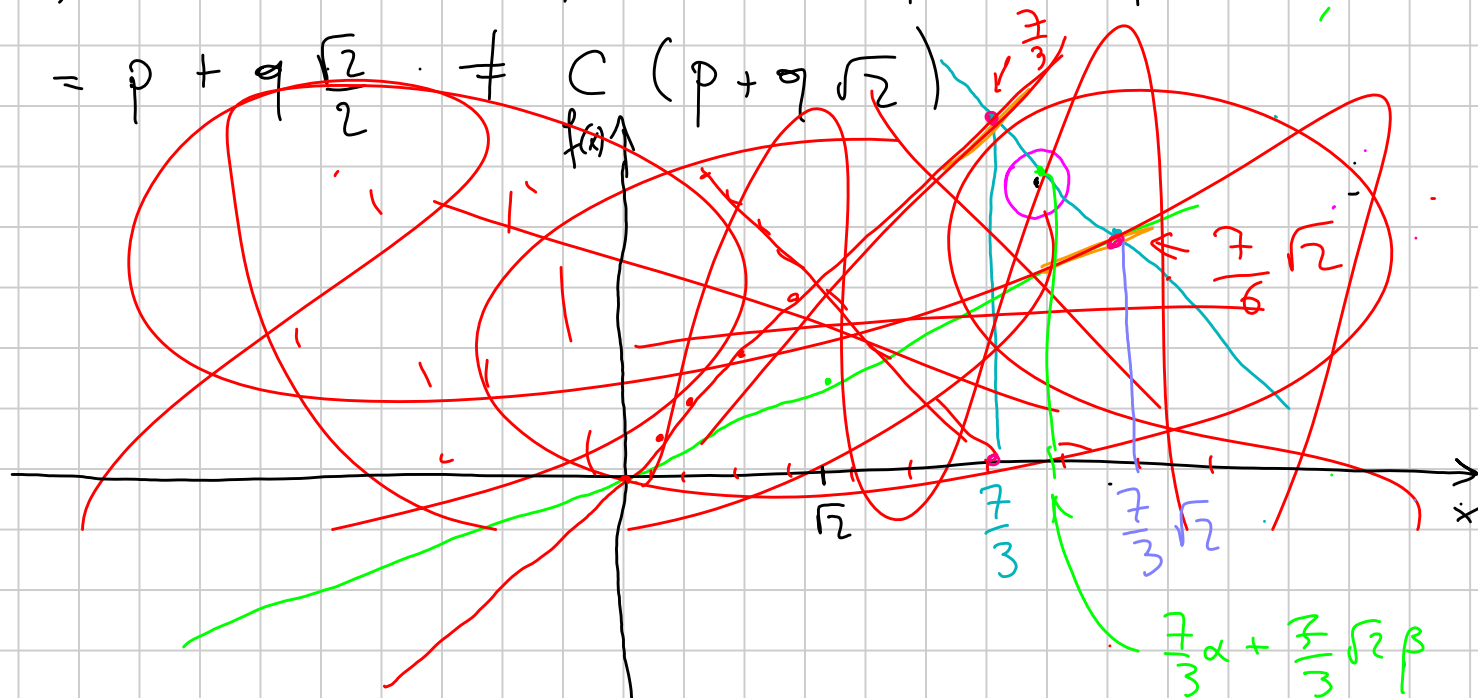
Esempio: Consideriamo tutti i numeri reali della forma $\{p + q\sqrt{2} \mid p, q \in \mathbb{Q}\} = S$

definiamo:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x & \text{se } x = q\sqrt{2} \quad q \in \mathbb{Q} \\ \underline{x} & \text{se } \underline{x} = p \quad q \in \mathbb{Q} \\ \dots & \dots \end{cases}$$

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$

$$f(p + q\sqrt{2}) = f(p) + f(q\sqrt{2}) = p f(1) + q f(\sqrt{2}) \\ = p + q \frac{\sqrt{2}}{2} \neq C(p + q\sqrt{2})$$



Se scegliamo $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}$ t.r. il punto

$$\left(\frac{7}{3}\alpha + \frac{7}{3}\sqrt{2}\beta, \frac{7}{3}\alpha + \frac{7}{6}\sqrt{2}\beta\right)$$

$$f\left(\frac{7}{3}\alpha + \frac{7}{3}\sqrt{2}\beta\right) = \alpha f\left(\frac{7}{3}\right) + \beta f\left(\frac{7}{3}\sqrt{2}\right) \\ = \frac{7}{3}\alpha + \frac{7}{6}\sqrt{2}\beta$$

Esercizio

$$1) f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x+y) = f(x) + f(y)$$

$$f(xy) = f(x)f(y)$$

$$\forall x, y \in \mathbb{R}$$

trovare tutte le f così

IMO 5/2013

$\mathbb{Q}_{>0}$ razionali positivi $f: \mathbb{Q}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}$
t.r.

- i) $\forall x, y \in \mathbb{Q}_{>0} \quad f(x)f(y) \geq f(xy)$
 ii) $\forall x, y \in \mathbb{Q}_{>0} \quad f(x+y) \geq f(x) + f(y)$
 iii) $\exists a \in \mathbb{Q}_{>0} \quad a > 1$ con $f(a) = a$
- } dimostrare che $f(x) = x$

Per chi si annoia

IMOsl Ah 2007 Trovare tutte le $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ l.r.

$$\underline{f(x + f(y)) = f(xy) + f(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^+}$$

1. Traslate della Cauchy

$$f(x+y) = f(x) + f(y) + 1$$

$$g(x) = f(x) + 1$$

$$\underbrace{f(x+y) + 1}_{g(x+y)} = \underbrace{f(x) + 1}_{g(x)} + \underbrace{f(y) + 1}_{g(y)}$$

$$g(x+y) = g(x) + g(y)$$

2. Funzionale "moltiplicativa" di Cauchy

$$f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+ \quad \underline{f(xy) = f(x)f(y)}$$

$\mathbb{R}$ ha una struttura di $+$ $(\mathbb{R}, +) \leftarrow 0$

$\mathbb{R}^+$ ha una struttura di $\cdot$ $(\mathbb{R}^+, \cdot) \leftarrow 1$

$$\mathbb{R} \xrightarrow{f=e^x} \mathbb{R}^+ \quad x \mapsto e^x$$

$$\underline{x+y} \mapsto e^{x+y} = e^x \cdot e^y$$

$$\underline{f(x) \cdot f(y)}$$

$$f(xy) = f(x) f(y)$$

$$\ln(f(xy)) = \ln(f(x)) + \ln(f(y))$$

$$\ln(f(\underbrace{e^u \cdot e^v}_{e^{u+v}})) = \ln(f(e^u)) + \ln(f(e^v))$$

$$\ln x = u \quad e^{u+v}$$

$$\ln y = v \quad f(u) = \ln(f(e^u))$$

$$f(u+v) \stackrel{?}{=} f(u) + f(v) \leftarrow \begin{array}{l} \text{se } f \text{ ad esempio} \\ \text{è continua o monotona} \\ \text{o grafico non duto} \end{array}$$

$$\text{allora } f(u) = c \cdot u = \ln(f(e^u))$$

$$x = e^u \quad c \cdot \ln x = \ln(f(x)) =$$

$$\boxed{f(x) = x^c}$$

$$f(xy) = f(x) + f(y), \quad f(x+y) = f(x)f(y)$$

* Sol

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \dots f(x+y) = f(x) + f(y) \quad f(xy) = f(x)f(y)$$



$$\downarrow$$

$$f(x^2) = f(x)^2$$

$$\Rightarrow f(x) = cx$$

$$\boxed{f(x) = x}$$

Esercizio trovare tutte le $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ t.c.

$$2f\left(\frac{x+y}{2}\right) = f(x) + f(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{Q}.$$

(funzionale di Jensen)

Esercizio 1) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ t.c. $\forall x, y \in \mathbb{R} \quad f(x^2 - y^2) = x f(x) - y f(y)$

2) Balkan MO 2025/3 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x + y f(x) + y) = xy + f(x + y)$

3) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x^{15} + 2y + 2026) = f(x^7 + 3y) + f(x^6)$

4) $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ trovare tutte t.c. $f(x + y) \leq \frac{f(x)^2}{f(x) + y}$

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^+$$

5) IMO SL 2013 N4 $f: \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{Z}^+$ t.c. $a + f(b) \mid a^2 + b f(a)$

$$\forall a, b \in \mathbb{Z}^+ \quad \text{t.c.} \quad a + b > 2013$$

6) IMO S 2026 $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ t.c. $\sqrt{\frac{x^2 + f(y)^2}{2}} \geq \frac{f(x) + 1}{2} \geq \sqrt{x f(y)}$

$$a_0 = 2, \quad a_{n+1} = 2a_n^2 - 1$$

Se p è un
primo dispari, $p \mid a_n \Rightarrow p \equiv \pm 1 \pmod{2^{n+2}}$

Tecniche standard per risolvere eq. funzionali:

$$f(x + y f(x)) = \underbrace{x^3 + xy} + f(xy + f(x + y))$$

1. Iniettività / Suriettività di f .

$$f(x) = x^3 + f(f(x)) \quad a = f(x)$$

$$x = \sqrt[3]{a - f(a)}$$

$$\underline{f(x - f(y)) - f(y + f(x))} = \underline{x + f(y - f(x))}$$

$$f(\text{---}) = x + c$$

$$y = f(x)$$

$$\underline{f(x - f(f(x)) - f(2f(x)))} = x + f(0)$$

$$f(\text{---}) = x + f(0)$$

$\Rightarrow f$ deve essere iniettiva

$$\exists \lambda \text{ t.c. } f(\lambda) = 0 \text{ se pensiamo } y = \lambda$$

$$f(-f(\lambda + f(x))) = x + f(\lambda - f(x))$$

$$x = f(-f(\lambda + a)) - f(\lambda - a) \quad a = f(x)$$

$$\cancel{f(\text{---})} = \cancel{f(\text{---})}$$

2. Cancellare più termini possibili: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(\text{---}) = f(\text{---}) + f(\text{---}) + \text{---}$$

$$\underline{f(x^{15} + 2y + 2026)} = \underline{f(x^7 + 3y)} + \cancel{f(x^6)}$$

$$x^{15} + 2y + 226 = x^7 + 3y \quad y = \frac{x^{15} - x^7 + 226}{2}$$

$$\cancel{f(x)} = \cancel{f(x)} + \underline{f(x^6)} = 0$$

$$f(x) = 0 \quad \forall x \geq 0$$

$$x^{15} + 2y + 226 = x^6 \quad y = \frac{x^6 - x^{15} - 226}{2}$$

$$f\left(x^7 + \frac{3}{2}x^6 - \frac{3}{2}x^{15} - 3 \cdot 1013\right) = 0 \quad \checkmark$$

$$f(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

3. Simmetria tra x e y

$$f(x + y f(x)) = f(x + y) + xy$$

espressione simmetrica
in x e y

$$f(y + x f(y)) = f(x + y f(x))$$

4. Commenti e consigli generali

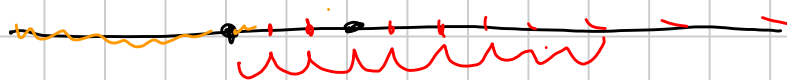
$$f(x^2 - y^2) = x f(x) - y f(y) \leftarrow \underline{f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}}$$

$$\textcircled{f(x) = 0}, f(x) = x, \dots$$

Risultati parziali

1) Puntuali: che si parlano di un set limitato di punti
ad esempio $f(0) = 0, f(1) = 0$, se $f(a) = f(b)$ allora

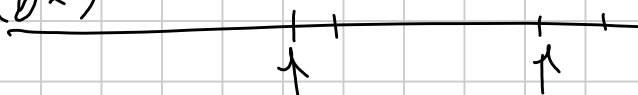
$$\underline{f(a+1) = f(b+1)}$$



2) Intermedi: risultati che coinvolgono tutti i punti (o quasi) però che li mettano in relazione con solo un numero finito di altri punti

tipo la periodicità $f(x+1) = f(x)$

$$f(a) = f(b) \Rightarrow f(ax) = f(bx)$$



- Generali conoscere la f in anche solo in un intervallo
Esempio f è definitivamente costante $\Rightarrow f$ costante.

Un'altra cosa molto importante è riconoscere la struttura del dominio e codominio su cui si lavora

$$\mathbb{R}, \mathbb{R}^+, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{N}$$

$\mathbb{R}$ è equipaggiato principalmente con 3 strutture

i) Additiva (Cauchy)

ii) Moltiplicativa

$$\begin{aligned} f(x) + f(y) &= f(x+y) \\ f(x)f(y) &= f(xy) \end{aligned}$$

$$\begin{cases} f(x) + f(y) = f(x+y) \\ \underline{f(f(x)) = x} \end{cases}$$

Comunque ci sono soluzioni patologiche

iii) D'ordine (i numeri reali sono ordinati)

La particolarità di $\mathbb{R}^+$ è che la struttura d'ordine è automaticamente derivata in causa

Il $\mathbb{R}$ comunque se la struttura moltiplicativa è derivata in causa allora volendo anche la struttura d'ordine emerge perde $x^2 \geq 0$

(Balkan MO 2025/3)

I risultati della categoria "general" appaiono soprattutto quando la struttura d'ordine emerge quindi soprattutto per $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$

$\mathbb{Q}$, $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$ una particolarità che loro hanno ma $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}^+$ ovviamente è il concetto di divisibilità che porta con se i primi etc.

MO 1/2019 $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ t.c. $f(2a) + 2f(b) = f(f(a+b))$

2) Balkan MO 2025/3 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x + y f(x)) + y = xy + f(x+y)$$

3) $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ $f(x+y) \leq \frac{f(x)^2}{f(x)+y} \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^+$

4) IMO 5/2026 $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$

$$\sqrt{\frac{x^2 + f(y)^2}{2}} \geq \frac{f(x) + y}{2} \geq \sqrt{xf(y)} \quad x, y \in \mathbb{R}^+$$

5) IMO sl 2019 N4 $f: \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{Z}^+$

$$a + f(b) \mid a^2 + b f(a) \quad \forall a, b \in \mathbb{Z}^+ \text{ con } a+b > 2019$$

6) IMO 3/2011 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x+y) \leq y f(x) + f(f(x)) \quad \forall x, y \quad \text{dimostrare}$$

che $f(x) = 0 \quad \forall x \leq 0$

7) Balkan MO 2024/4 $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+ \quad \forall x > y > 0$

$$f(f(x) + P(y)) = f(x - y) + 2y \quad \text{con } P \text{ polinomio}$$

a coeff $\geq 0 \quad P(0) = 0$

8) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x^2 - y^2) = x f(x) - y f(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}_-$$

9) trovare forma chiusa per

$$\begin{cases} a_{n+1} = 2a_n - b_n \\ b_{n+1} = -a_n + 2b_n \end{cases} \quad a_0, b_0 \text{ a piacere.}$$