

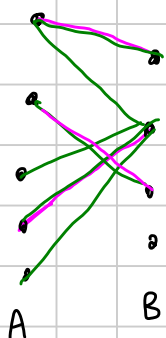
C1 MEDIUM

Note Title

03/09/2026

LEMMA DEI MATRIMONI / LEMMA DI HALL

GRAFO BIPARTITO: GRAFO G TALE CHE I VERTICI SI POSSONO PARTIZIONARE IN DUE SOTTOINSIEMI TALI CHE OGNI ARCO CONNEGA VERTICI DI PARTI DIVERSE



$$V = A \cup B$$

MATCHING: INSIEME DI ARCHI DEL GRAFO TALE CHE OGNI VERTICE È ADIACENTE A AL PIÙ UN ARCO

ESEMPIO: ARCHI ROSA.

LEMMA DEI MATRIMONI: PER OGNI SOTTOINSIEME $S \subseteq A$, $|N(S)| = \left\{ v \in B \mid \exists w \in A \text{ t.c. } (w,v) \text{ arco} \right\}$
SUPPONIAMO CHE, PER OGNI $S \subseteq A$, $|N(S)| \geq |S|$. ALLORA ESISTE UN MATCHING TALE CHE OGNI VERTICE DI A È ADIACENTE A UN ARCO.

OSS: LA CONDIZIONE È NECESSARIA: SE CI FOSSE $S \subseteq A$ CON $|N(S)| < |S|$, ALLORA NON POTREMMO AVERE UN MATCHING CHE SIA ADIACENTE A TUTTI I VERTICI DI S (CI SONO TROPPI POCCHI ELEMENTI DI B CONNECATI A VERTICI DI S)

OSS: LA CONDIZIONE IMPLICA, GUARDANDO $S = \{v\} \subseteq A$, CHE ESISTE ALMENO UN ARCO PER v . GUARDANDO $S = A$, $|B| \geq |N(A)| \geq |A| \Rightarrow |B| \geq |A|$.

(SPESSO NEUE APPLICAZIONI $|A| = |B|$, MA NON È SEMPRE VERO).

DIP DEL LEMMA: INDUZIONE SU $|A|$. $|A| = 1 \Rightarrow$ ESISTE ALMENO UN ARCO, OK.

SE ESISTE $S \subseteq A$, NON VUOTO, CON $|N(S)| = |S|$, TROVIAMO UN MATCHING PARZIALE TRA S E $N(S)$, PER IPOTESI INDUTTIVA (IL SOTTOGRAFO OTTENUTO PRELEVANDO I VERTICI DI S E $N(S)$ SODDISFA LE IPOTESI DEL LEMMA, E $|S| < |A|$)

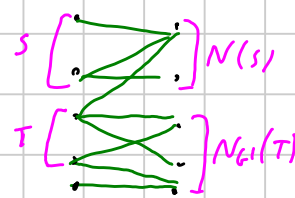
CI RIMANE DA COSTRUIRE IL MATCHING TRA $A \setminus S$ E $B \setminus N(S)$. FACCIAMO VEDERE CHE ANCHE IL SOTTOGRAFO G' OTTENUTO PRELEVANDO QUESTI SODDISFA LE IPOTESI.

SE $T \subseteq A \setminus S$, $N_{G'}(T) = N_G(S) \cup N_{G'}(T)$, E L'UNIONE

È DISGIUNTA $\Rightarrow |N_G(S) \cup N_{G'}(T)| = |N_G(T \cup S)| \geq |T \cup S| = |T| + |S|$

$\Rightarrow |N_{G'}(T)| \geq |T| \Rightarrow$ ANCHE G' SODDISFA LE IPOTESI.

L'UNIONE DEI DUE MATCHING È QUELLO CHE CI SERVE.



SE INVECE NON ESISTESSE UN TALE S , AVREMO CHE PER $S \subseteq A$ NON VUOTO
 $|N(S)| \geq |S| + 1 \Rightarrow$ PRENDIAMO VEA QUALSIASI, E UN ARCO USCENTE DA V , DICIAMO (V, W) .
 FACCIAMO VEDERE CHE IL SOTTOGRAFO G'' INDOTTO DA $A \setminus V$ E $B \setminus W$ SODDISFA ANCORA LE
 IPOTESI: SE $T \subseteq A \setminus V$, $N_{G''}(T) = \begin{cases} N_G(T) & \text{SE } W \notin N_G(T) \\ N_G(T) \setminus W & \text{SE } W \in N_G(T) \end{cases}$
 $\Rightarrow |N_{G''}(T)| \geq |N_G(T)| - 1 \geq |T| + 1 - 1 = |T| \Rightarrow$ PER IPOTESI INDUTTIVA TROVIAMO UN
 MATCHING SU $A \setminus V$ IN $B \setminus W$, AGGIUNGUENDO (V, W) OTTENIAMO QUELLO CHE VOLEVAMO.

ESEMPIO: TABELLA $n \times n$, COLIAMO UN SOTTOINSIEME DELLE CASELLE, TALE CHE IN OGNI
 RIGA E COLONNA ESATTAMENTE k SIANO COLORATE. ALLORA POSSIAMO SCEGLIERE n CASELLE
 COLORATE, IN MODO CHE SIANO TUTTE IN RIGHE E COLONNE DISTINTE

SOL: GRAFO BIPARTITO: $A = \text{RIGHE}$, $B = \text{COLONNE}$, (r, c) ARCO SE LA LORO
 INTERSEZIONE È COLORATA. VERIFICHIAMO LE IPOTESI: S UN INSIEME DI m RIGHE,
 VOGLIAMO DIRE CHE LE CASELLE COLORATE SULLE RIGHE DI S STANNO SU ALMENO m COLONNE
 DIVERSE. SULLE RIGHE DI S CI SONO mk CASELLE COLORATE, E OGNI COLONNA NE PRENDE
 AL PIÙ $k \Rightarrow$ CI SONO $\geq m$ COLONNE CHE NE CONTENGONO ALMENO UNA.

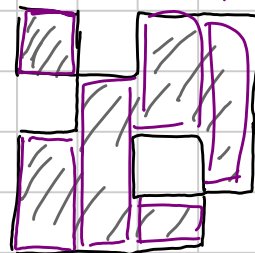
PER CASA: PRENDERE UN MUZZO DI CARTE (FRANCESI), DIVIDERLO IN 13 MOZZETTI DA
 4 CARTE CIASCUNO A CASO, PRENDERE UNA CARTE PER MOZZETTO IN MODO DA PRENDERE
 UN 2, UN 3, ... UN 5, UN 6, UN 7, UN 8, UN 9, UN 10, UN 11, UN 12, UN 13.

RMM 2017/5. UN SETACCIO È UNA TABELLA $n \times n$
 DA CUI SONO STATE RIMOSE n CASELLE, CHE SI TROVANO
 IN RIGHE E COLONNE DISTINTE

UN BASTONE È UN RETTANGOLO $1 \times k$ O $k \times 1$.

PER UN SETACCIO S , $m(S)$ = MINIMO NUMERO DI BASTONI CHE SERVONO PER
 TASSELLARE S . QUANTO PUÒ VALERE, AL VARIARE DEI SETACCI, $m(S)$?

SE PRENDIAMO SOLO
 BASTONI VERTICALI, NE USIAMO 6.



SOL: SE TASSELLIAMO USANDO SOLTANTO BASTONI VERTICALI, NE USIAMO $2n-2$
 POSSIAMO FARE $2n-2$ USANDO SOLO BASTONI ORIZZONTALI.

SPERIMENTANDO, SEMBRA CHE $2n-2$ SIA SEMPRE IL MINIMO,

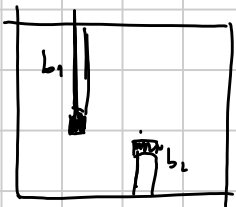
SE RIUSCIAMO A TROVARE $2n-2$ CASELLE, CHE DUE A DUE NON POSSONO STARE IN
 UNO STESSO BASTONE, DIMOSTRIAMO $m(S) \geq 2n-2$. QUESTO INSIEME DI CASELLE
 INTERSECA OGNI BASTONE DELLA TASSELLAZIONE VERTICALE IN ESATTAMENTE UNA CASELLA,
 BEN PER QUELLA ORIZZONTALE

SE CONSIDERIAMO IL GRAFO BIPARTITO CON A = BASTONI DELLA TASSELZIONE VERTICALE, B = BASTONI DELLA TASSELZIONE ORIZZONTALE (UN 1×1 , COME NEL DI SEGNO SOPRA, POTREBBE COMPARIRE DA ENTRAMBE LE PARTI).

UN ANLO COLLEGA IVE BASTONI CHE SI INTERSECANO. L'INSIEME DI TASSELE CHE CECUNIANO È UN MATCHING CON $2n-2$ ALCHI IN QUESTO GRAFO: VERIFICHIAMO CHE SODDISFA LE IPOTESI DEL LEMMA DI HALL.

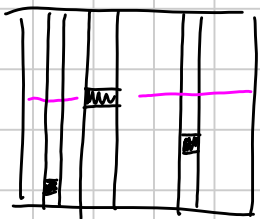
$T \subseteq A$. SE T CONTIENE UN BASTONE LUNGO $\geq |T|$, SIAMO A POSTO. QUESTO NON SUCCED E SEMPRE, MA SUCCED E UNA COSA SIMILE.

BASTONI ALTI = SONO ADIACENTI AL LATO SUPERIORE DELLA TABELLA, BASSO SE È ADIACENTE AL LATO INFERIORE. I BASTONI ALI SONO $n-1$ E SONO LUNGI $1, \dots, n-1$, IDEN PER QUELLI BASSI. DATO UN $T \subseteq A$, SE IL BASTONE ALTO IN T PIÙ LUNGO È B_1 , LUNGO b_1 , E QUELO BASSO PIÙ LUNGO È B_2 , LUNGO b_2 , T CONTIENE AL PIÙ b_1 ALTI E b_2 BASSI $\Rightarrow b_1 + b_2 \geq |T|$. SE $|T| \leq n$. SE $b_1 + b_2 \leq n$, CI SONO ALMENO $b_1 + b_2$ ALCHI CHE INTERSECANO UNA TRA $B_1, B_2 \Rightarrow N(T) \geq b_1 + b_2 \geq |T|$. SE INVECE $b_1 + b_2 > n$, BECHIAMO TUTTE LE RIGHE, QUINDI ALMENO n BASTONI ORIZZONTALI $\Rightarrow |N(T)| \geq n \geq |T|$.



SE INVECE $|T| > n$, CI SONO ALMENO $|T| - n + 2$ COLONNE IN CUI ABBIAMO PRESO TUTTI I BASTONI: CI SONO DUE COLONNE CON UN SOLO BASTONE, $n-2$ CON DUE BASTONI.

SE CI SONO k COLONNE IN CUI ABBIAMO PRESO TUTTI I BASTONI, IL NUMERO DI BASTONI È $\leq 2k + (n-2-k) \Rightarrow |T| - n + 2 \leq k$



CLAIM:
SE PRENDIAMO ENTRAMBI I BASTONI DI l COLONNE, INTERSECHIAMO ALMENO $l + n - 2$ BASTONI ORIZZONTALI

QUESTO CI BASTA: SAPPIAMO CHE NEL NOSTRO CASO $l \geq |T| - n + 2$

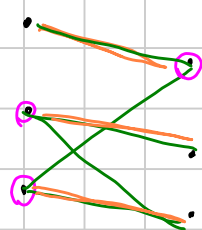
$\Rightarrow |N(T)| \geq l + n - 2 \geq |T|$.

DIN CLAIM: INDUZIONE SU l . $l=1$ OK. $l \geq 2$: LE PRIME $l-1$ COLONNE DA SINISTRA INTERSECANO ALMENO $(l-1) + n - 2$ BASTONI ORIZZONTALI (I POSSI INDURMA) E'È ALMENO UN BASTONE CHE INTERSECA UN BASTONE VERTICALE DELL'ULTIMA COLONNA MA NESSUNA DI QUELLE PRIME: QUELO A DESTRA DEL BULO DELLA PENULTIMA COLONNA $\Rightarrow$ NE INTERSECA $(l-1) + n - 2 + 1 = l + n - 2$

VERSIONE FORTE DEL LEMMA DEI MATRIMONI: GRAFO BIPARTITO G CON $V = A \cup B$, SE PER UN m FISSATO, $\forall S \subseteq A$ SI HA $|N(S)| \geq |S| - m \Rightarrow$ ESISTE UN MATCHING CON $|A| - m$ ARCHI.

DIMOSTRAZIONE: FORMIAMO UN GRAFO G' , AGGIUNGENDO m NUOVI VERTICI IN B , CHE SIANO COLLEGATI A TUTTI I VERTICI DI A . PER $S \subseteq A$, $|N_{G'}(S)| = |N_G(S)| + m$, CHE È ALMENO $|S| \Rightarrow G'$ SODDISFA LE IPOTESI DEL LEMMA DEI MATRIMONI, QUINDI HA UN MATCHING CON $|A|$ ARCHI. RIMUOVENDO GLI ARCHI ADIACENTI AI VERTICI CHE ABBIAMO AGGIUNTO, NE STIAMO RIMUOVENDO AL PIÙ $m \Rightarrow$ OTTENIAMO UN MATCHING IN G CON ALMENO $|A| - m$ ARCHI.

COVERING ("RICOPRIMENTO"): INSIEME C DI VERTICI DI G TALE CHE, PER OGNI ARCO DI G , ALMENO UNO DEI DUE ESTREMI STA IN C .



1 VERTICI ROSA SONO UN COVERING

SE M MATCHING IN G , C COVERING, SI HA $|M| \leq |C|$, DATO CHE OGNI VERTICE DI C È ADIACENTE A AL PIÙ UN ARCO DI M .

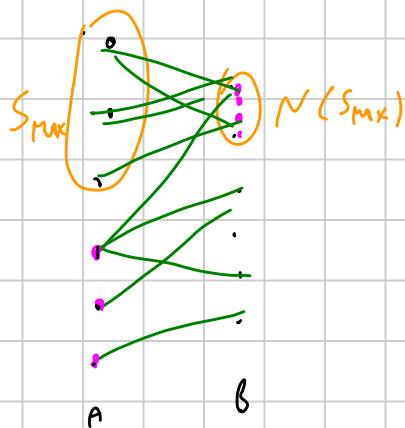
TEOREMA DI KÖNIG: ESISTONO UN COVERING C E UN MATCHING M CON $|C| = |M|$.

OSS: SE PRENDIAMO UN ALTRO COVERING C' , SI HA $|C'| \geq |M| = |C| \Rightarrow C$ HA CARDINALITÀ MINIMA TRA I COVERING, SE M' È UN ALTRO MATCHING, $|M'| \leq |C| = |M| \Rightarrow M$ HA CARDINALITÀ MASSIMA TRA I MATCHING. IL MATCHING PIÙ GROSSO È UGUALE QUANTO IL COVERING PIÙ PICCOLO.

PER ESEMPIO, SE G SODDISFA LE IPOTESI DEL LEMMA DEI MATRIMONI, IL MATCHING PIÙ GRANDE HA CARDINALITÀ $|A| \Rightarrow$ IL COVERING PIÙ PICCOLO (PER ESEMPIO, L'INSIEME A).

DIMOSTRAZIONE DI KÖNIG: AL VARIARE DI $S \subseteq A$, GUARDIAMO $|S| - |N(S)|$, E PRENDIAMO $S_{\max}$ T.C. $|S_{\max}| - |N(S_{\max})| = m$ MASSIMO. ($m \geq 0$, GUARDANDO $S = \emptyset$).

PER OGNI $S \subseteq A$, $|S| - |N(S)| \leq m \Rightarrow$ PER LA VERSIONE FORTE DEL LEMMA DEI MATRIMONI, ESISTE UN MATCHING CON $|A| - m$ ARCHI, LO PRENDIAMO COME M .



COME COVERING C , PRENDIAMO

$A \setminus S_{\max} \cup N(S_{\max})$. È UN COVERING PERCHÉ

SE UN ARCO HA UN VERICE IN $S_{\max}$ LO PRENDIAMO CON $N(S_{\max})$, ALTREMENTE CON $A \setminus S_{\max}$.

$$|C| = |A \setminus S_{\max}| + |N(S_{\max})| = |A| - |S_{\max}| + |N(S_{\max})| = |A| - m$$

$$\Rightarrow |M| = |C|$$

TEOREMI DI DILWORTH E MIRSKY.

RELAZIONE DI ORDINE PARZIALE SU UN INSIEME S :

È UN SOTTOINSIEME DI $S \times S$, DOVE SCRIVIAMO $x \leq y$ SE $(x, y) \in S$, DEVE SODDISFARE DUE PROPRIETÀ:

• TRANSITIVITÀ: $x \leq y, y \leq z \Rightarrow x \leq z$

• RIFLESSIVITÀ: $x \leq x$ PER OGNI $x \in S$

• ANTISIMMETRIA: $x \leq y, y \leq x \Rightarrow x = y$

SI CHIAMA PARZIALE PERCHÉ PER $x, y \in S$ NON È DETTO CHE VALGA UNA TRA $x \leq y$ E $y \leq x$.

ESEMPI DI RELAZIONI DI ORDINE PARZIALI: • $S = \mathbb{N}$, $m \leq n$ SE $m \leq n$ CON L'ORDINAMENTO SOLITO DEI NATURALI

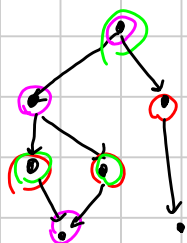
• $S = \mathcal{P}(A)$ (INSIEME DELLE PARTI DI A) CON LA RELAZIONE $T_1 \leq T_2$ SE $T_1 \subseteq T_2$

SE VALE ANCHE: $\forall x, y \in S, x \leq y$, OPPURE $y \leq x$, DICIAMO CHE È UNA RELAZIONE DI ORDINE TOTALE.

POSET = INSIEME DOTATO DI UNA RELAZIONE DI ORDINE PARZIALE.

(PARTIALLY ORDERED SET)

IN UN POSET $(S, \leq)$, UNA CATENA È UN SOTTOINSIEME $C \subseteq S$, TALE CHE $\forall x, y \in C, x \leq y$ O $y \leq x$



$y \leq x$ SE ESISTE UN PERCORSO ORIENTATO DA x A y .

I ROSA SONO UNA CATENA

I VERDI NO

OSS: SE L'ORDINE È TOTALE, TUTTI I SOTTOINSIEMI SONO CATENE

$A \subseteq S$ È UN'ANTICATENA SE $\forall x, y \in A, x \neq y \Rightarrow$ NON SI HA NÉ $x \leq y$, NÉ $y \leq x$
NEL DISEGNO, I ROSSI SONO UN'ANTICATENA (VERO) NO

OSS: SE L'ORDINE È TOTALE, LE ANTICATENE SONO IL VUOTO E I SIMBOLLETTI.

DATO UN POSET $(S, \leq)$, CON S FINITO, VOGLIAMO PARTIZIONARE GLI ELEMENTI DI S IN CATENE, OPPURE IN ANTICATENE, OPPURE CI INTERESSA TROVARE UNA CATENA O UN'ANTICATENA PIÙ GRANDE POSSIBILE

TEOREMA DI DILWORTH: $|ANTICATENA PIÙ GRANDE| = \# PARTI NELLA PARTIZIONE IN CATENE PIÙ PICCOLA$

$\leq$

↑ QUESTA DISUGUAGLIANZA È FACILE.

OSS: SE ABBIAMO UN'ANTICATENA A , CI SERVONO ALMENO $|A|$ CATENE PER PARTIZIONARE S (SE NE USASSIMO DI MENO, CI SAREBBE UNA CATENA CHE CONTIENE DUE ELEMENTI DI A).

TEOREMA DI MIRSKY: $|CATENA PIÙ GRANDE| = \# PARTI NELLA PARTIZIONE IN ANTICATENE PIÙ PICCOLA$.

OSS: UGUALE A PRIMA, LA DISUGUAGLIANZA $\leq$ È FACILE.

TEOREMA DI ERDOS-SZEKERES: UNA PERMUTAZIONE σ DI $1, \dots, m+1$ CONTIENE UNA SOTTOSEQUENZA CRESCENTE LUNGA ALMENO $m+1$ (CIOÈ $i_1 < i_2 < \dots < i_{m+1}$, CON $\sigma(i_1) < \sigma(i_2) < \dots < \sigma(i_{m+1})$), OPPURE UNA DECRESCENTE LUNGA ALMENO $n+1$.

DIMOSTRAZIONE: CONSIDERIAMO UN ORDINAMENTO PARZIALE SU $\{1, \dots, m+1\}$:
 $i \leq j$ SE $i \leq j$ E $\sigma(i) \leq \sigma(j)$. CON QUESTA RELAZIONE, LE SOTTOSEQUENZE CRESCENTI SONO CATENE, QUELLE DECRESCENTI ANTICATENE.

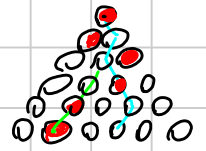
SUPPONIAMO CHE NON ESISTA UNA SOTTOSEQUENZA CRESCENTE LUNGA $\geq n+1$

$\Rightarrow$ LE CATENE SONO LUNGHE $\leq n \Rightarrow$ UNA PARTIZIONE IN CATENE NE USA $\geq \left\lceil \frac{m+1}{n} \right\rceil = m+1$

$\Rightarrow$ PER DILWORTH, ESISTE UN'ANTICATENA (= SOTTOSEQUENZA DECRESCENTE) CON

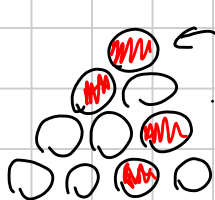
$\# PARTI NELLA PARTIZIONE IN CATENE MINIMA \geq m+1$

IMO 2023/5: È FISSATO UN TRIANGOLO JAPANESE È UN TRIANGOLO CON $1+2+\dots+n$ DISCHI, DI CUI ESATTAMENTE UNO PER RIGA È COLORATO. UN PERCORSO NINJA È UN PERCORSO CHE PARTE DAL DISCO PIÙ IN ALTO, E SI MUOVE OGNI VOLTA IN UNO DEI DUE DISCHI ADIACENTI SOTTO, FINO ALL'ULTIMA RIGA.



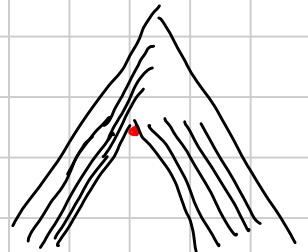
IN TERMINI DI n , TROVARE IL MASSIMO k T.C. ESISTA SEMPRE UN PERCORSO NINJA CHE ATTRAVERSA ALMENO k DISCHI COLORATI.

SOL: RELAZIONE D'ORDINE PARZIALE SUI DISCHI COLORATI. $D_1 \leq D_2$ SE DA D_2 POSSIAMO RAGGIUNGERE D_1 CON UN PEZZO DI PERCORSO NINJA. QUELLO CHE VOGLIAMO FARE È TROVARE UNA CATENA PIÙ GRANDE POSSIBILE PER MINSKY, EQUIVALE A TROVARE LA PARTIZIONE MINIMA IN ANTICATENE.



LUI DEVE STARE DA SOLO

OSS: IL DISCO NELLA RIGA m SI TROVA IN UN'ANTICATENA DI CARDINALITÀ AL PIÙ m (CI SONO $m-1$ DIAGONALI A DESTRA/SINISTRA DEL DISCO, E OGNI DIAGONALE CONTIENE AL PIÙ UN'ALTRO DISCO DELL'ANTICATENA)



CONSEQUENZA: LA CARDINALITÀ DI UN'ANTICATENA È LIMITATA DALLA POSIZIONE DEL SUO DISCO PIÙ IN ALTO

ORDINIAMO LE ANTICATENE IN BASE ALLA POSIZIONE DEL DISCO PIÙ ALTO. LA PRIMA CONTIENE SOLO IL DISCO IN ALTO. LA SECONDA QUELLO DALLA SECONDA RIGA E AL PIÙ UN ALTRO. LA TERZA INIZIA AL PIÙ TARDI ALLA QUARTA RIGA $\Rightarrow$ HA AL PIÙ 4 ELEMENTI, ...

CLAIM: LE PRIME c ANTICATENE COPRONO AL PIÙ $2^c - 1$ RIGHE.

DIM: INDUZIONE SU c . $c=1$ OK. $c \geq 2$: LA c -ESIMA ANTICATENA INIZIA AL PIÙ ALLA RIGA 2^{c-1} (PERCHÉ LE PRIME $c-1$ COPRONO AL PIÙ $2^{c-1}-1$ RIGHE) $\Rightarrow$ CONTIENE AL PIÙ 2^{c-1} DISCHI $\Rightarrow$ IN TOTALE AL PIÙ $2^{c-1}-1+2^{c-1}=2^c-1$

$\Rightarrow$ SE ABBIAMO UNA PARTIZIONE IN c ANTICATENE, $\forall$ QUALSIASI $2^c - 1 \geq n$, CIO È $c \geq \lceil \log_2(n+1) \rceil$
CATENA MASSIMA = MINIMA PARTIZIONE IN ANTICATENE $\geq \lceil \log_2(n+1) \rceil$
 $\Rightarrow k = \lceil \log_2(n+1) \rceil$ FUNZIONA.

PER CASA / PAUSA: TROVARE COSTRUZIONE CHE MOSTRA CHE È OTTIMALE.

METODI PROBABILISTICI

("DOUBLE COUNTING + PIGEONHOLE")

VARIABILE ALEATORIA = NUMERO/QUANTITÀ CHE DIPENDE DA UN EVENTO CASUALE

ES: RISULTATO DEL LANCIO DI UN DADO, NUMERO DI TESTE IN n LANCI DI MONETA.

DATA UNA VARIABILE ALEATORIA X , VALORE ATTESO $E[X] = \sum t \cdot P(X=t)$
(PER COME L'ABBIAMO DEFINITO, HA SENSO SOLO SE LA SOMMA È FINITA, CIOÈ
CI SONO FINITI VALORI CHE X ASSUME CON PROBABILITÀ > 0)

ES: X = RISULTATO DEL LANCIO DI UN DADO, $E[X] = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + \dots + 6 \cdot \frac{1}{6} = \frac{7}{2}$

IMO 1987/1: PER OGNI $n \leq 6$, $p_k(n) = \#$ PERMUTAZIONI DI $\{1, \dots, n\}$ CON ESATTAMENTE
 k PUNTI FISSI. DIMOSTRARE $\sum_{k=0}^n k \cdot p_k(n) = n!$

$n=3$

COLONNATO
1 PUNTI FISSI

1	2	3
1	3	2
2	1	3
2	3	1
3	1	2
3	2	1

$$\begin{aligned} \text{QUANTE RIGHE HANNO } k \text{ PUNTI FISSI} &\leftrightarrow p_k(n) \\ \sum k \cdot p_k(n) &= \sum_{\text{RIGHE}} \# \text{ COLONNATI} = \# \text{ COLONNATI NELLA TABELLA} = \\ &= \sum_{\text{COLONNE}} \# \text{ COLONNATI NELLA COLONNA} \end{aligned}$$

QUANTI COLORATI CI SONO NELLA COLONNA i ?
SONO LE PERMUTAZIONI σ CON $\sigma(i) = i$,

CHE SONO $(n-1)!$ $\Rightarrow \sum_{\text{COLONNE}} = n \cdot (n-1)! = n!$

VEDIAMO QUESTA COSA COME CALCOLO DI UN VALORE ATTESO: CONSIDERIAMO L'ESTRAZIONE
DI UNA PERMUTAZIONE A CASO UNIFORMEMENTE (IPÒ OGNI PERMUTAZIONE HA PROBABILITÀ $\frac{1}{n!}$)

VARIABILE ALEATORIA $X = \#$ PUNTI FISSI

$$E[X] = \sum_{k=0}^n k \cdot \frac{p_k(n)}{n!} \quad \text{IL PROBLEMA EQUIVALE A DIMOSTRARE } E[X] = 1$$

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{SE } \sigma(i) = i \\ 0 & \text{SE } \sigma(i) \neq i \end{cases} \quad X = X_1 + X_2 + \dots + X_n \quad (\text{NON SONO INDIPENDENTI})$$

FATTO: PER VARIABILI ALEATORIE $Y_1, \dots, Y_m$ QUALSIASI,

$$E[Y_1 + \dots + Y_m] = E[Y_1] + \dots + E[Y_m] \quad (\text{ANCHE SE NON SONO INDIPENDENTI!})$$

$$\Rightarrow E[X] = E[X_1] + \dots + E[X_n]$$

$$E[X_i] = 0 \cdot P(\sigma(i) \neq i) + 1 \cdot P(\sigma(i) = i) = 0 + \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}$$

$$\Rightarrow E[X] = \frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n} = 1$$

ESEMPIO: LANCIAMO UNA MONETA n VOLTE, $E[\# \text{ DI TRIPLE DI TESTE CONSECUTIVE}]$

TTT CTTTT CCCT 3 TRIPLE

L'EVENTO "I PRIMI 3 LANCI SONO 3 TESTE" E "2°, 3°, 4° SONO 3 TESTE", NON SONO INDIPENDENTI

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{SE I LANCI } i, i+1, i+2 \text{ SONO TTT} \\ 0 & \text{ALTRIMENTI} \end{cases} \quad X = X_1 + \dots + X_{n-2}$$

$$\Rightarrow E[X] = E[X_1] + \dots + E[X_{n-2}] = \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{8} = \frac{n-2}{8}$$

QUESTE COSE SONO SOSTANZIALMENTE DOUBLE COUNTING

RAZIONAMENTI TIPO PIGEONHOLE: $E[X] = k \Rightarrow P(X \geq k) > 0, P(X \leq k) > 0$

ESEMPIO: PRENDO A CASO UN CONCORRENTE A CSESNAFICO, $E[\# \text{ PROBLEMI RISOLTI}] = 2,2$

$\Rightarrow P(\# \text{ PROBLEMI RISOLTI} \geq 2,2) > 0 \Rightarrow$ ESISTE QUALCUNO CHE NE HA FATTI ≥ 3

$P(\# \text{ PROBLEMI RISOLTI} \leq 2,2) > 0 \Rightarrow$ QUALCUNO NE HA FATTI ≤ 2

ESEMPIO: UNA GARA HA 6 PROBLEMI E 200 PARTECIPANTI, E OGNI PROBLEMA È STATO RISOLTO DA ALMENO 120 CONCORRENTI $\Rightarrow$ ESISTONO DUE CONCORRENTI TALI CHE OGNI PROBLEMA È STATO RISOLTO DA ALMENO UNO DEI DUE.

SOL: SCEGLIAMO UNA COPPIA DI CONCORRENTI A CASO (UNIFORMEMENTE TRA LE $\binom{200}{2}$ COPPIE)

$X = \# \text{ PROBLEMI CHE NESSUNO DEI DUE HA RISOLTO}$. SE $E[X] < 1$ SAREMMO A POSTO

PERCHÉ (CON PROBABILITÀ POSITIVA (= ESISTE ALMENO UNA COPPIA CHE LO FA) CI SONO ZERO PROBLEMI NON RISOLTI DA ENTRAMBI).

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{SE ENTRAMBI NON HANNO RISOLTO IL PROBLEMA } i \\ 0 & \text{ALTRIMENTI} \end{cases} \quad X = X_1 + \dots + X_6$$

$$E[X] = E[X_1] + \dots + E[X_6]$$

$$E[X_i] = \frac{\# \text{ COPPIE CHE NON HANNO RISOLTO IL PROBLEMA } i}{\# \text{ COPPIE}} \leq \frac{\binom{80}{2}}{\binom{200}{2}}$$

$$\Rightarrow E[X] = 6 \cdot \frac{\binom{80}{2}}{\binom{200}{2}} = \frac{6 \cdot 80 \cdot 79}{200 \cdot 199} < \frac{5 \cdot 5 \cdot 80 \cdot 79}{2 \cdot 2 \cdot 200 \cdot 199} = \frac{5 \cdot 79}{2 \cdot 199} < 1$$

PENSATECI: IL PROBLEMA SI RISOLVE ANCHE CON UN DOUBLE COUNTING SUGLE COPPIE (PROBLEMA, {COPIA DI PERSONE CHE NON L'HANNO RISOLTO}), E POI PILEONHOLE

↳ GRAFO CON n VERTICI, E GRADI $d_1, \dots, d_n \Rightarrow$ ESISTE UN'ANTICUCCA CON ALMENO $\sum_{k=1}^n \frac{1}{d_k+1}$ VERTICI.

CUCCA = SOTTOINSIEME DEI VERTICI TALE CHE OGNI COPPIA DEI SUOI ELEMENTI È (CONNESSA DA UN ARCO $\Leftrightarrow$) SOTTOGRAFO COMPLETO

ANTICUCCA = SOTTOINSIEME DEI VERTICI CHE NON HANNO ARCHI TRA DI LORO
INSIEME INDIPENDENTE

 NON È NÉ UNA CUCCA, NÉ UN'ANTICUCCA

BIIEZIONE VERTICI $\rightarrow \{1, \dots, n\}$

ESTRAZIONE DI UN'ETICHETTATURA $\forall$ A CASO DEI VERTICI (SONO $n!$)

A OGNI ETICHETTATURA σ , ASSOCIAMO UN'ANTICUCCA $A(\sigma) = \left\{ v_i \mid \begin{array}{l} \sigma(v_i) < \sigma(v_j) \text{ PER} \\ \text{OGNI } v_j \text{ ADIACENTE A } v_i \end{array} \right\}$

È UN'ANTICUCCA: SE v_i, v_j SONO ADIACENTI, O $\sigma(v_i) < \sigma(v_j)$

$\Rightarrow v_j \notin A(\sigma)$, OPPURE $\sigma(v_i) > \sigma(v_j) \Rightarrow v_i \notin A(\sigma)$.

$$X = |A(\sigma)| \quad X = \sum_{\text{VERTICI}} X_{v_i} \quad X_{v_i} = \begin{cases} 1 & \text{SE } v_i \in A(\sigma) \\ 0 & \text{ALTRIMENTI} \end{cases}$$

$E[X_{v_i}] = P(\sigma(v_i) < \sigma(v_j) \mid v_j \text{ VICINO})$ $X_{v_i} = 1 \Leftrightarrow \sigma(v_i)$ È IL MINIMO TRA I d_i+1 VALORI ASSEGNATI A v_i E I VICINI $\Rightarrow$ HA PROBABILITÀ $\frac{1}{d_i+1}$

$\Rightarrow E[X] = \sum_i \frac{1}{d_i+1} \Rightarrow$ ESISTE UN'ANTICUCCA CON ALMENO ALTERNATIVI VERTICI

ESERCIZIO: d = GRADO MEDIO, ESISTE UN'ANTICUCCA CON $\geq \frac{n}{d+1}$ VERTICI
(HINT: TENSEN + QUELLO CHE ABBIAMO APPENA DIMOSTRATO)

APPROCCIO DIVERSO: PRENDIAMO OGNI VERTICE CON PROBABILITÀ p

#ARCHI DI G È $\frac{dn}{2}$. ARCO ATTIVO = ARCO DI CUI PRENDIAMO ENTRAMBI I VERTICI

CI BASTA AVERE $E[\# \text{ARCHI ATTIVI}] < 1$

$$\frac{dn}{2} \cdot p^2 \Rightarrow p < \sqrt{\frac{2}{dn}}$$

$$\mathbb{E}[\text{VERTICI PRESI}] = n \sqrt{\frac{2}{\ln 2}} = \sqrt{\frac{2n}{\ln 2}} \quad / \text{FA SCHIFO.}$$

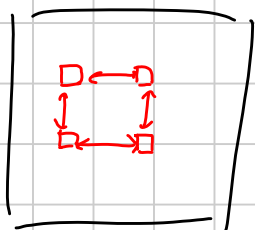
QUELLO CHE POSSIAMO FARE È - UNA VOLTA ESTRATTO IL SOTTOINSIEME, TOGLIAMO UN VERTICE PER OGNI ARCO LATTO

$$\mathbb{E}[\text{VERTICI TOLTI}] \leq \mathbb{E}[\# \text{ARCO LATTO}] = \frac{dn}{2} p^2$$

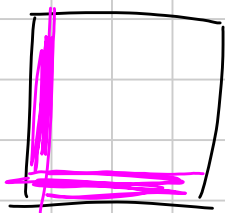
$$\mathbb{E}[\text{VERTICI RIMASTI}] = \mathbb{E}[\text{VERTICI PRESI}] - \mathbb{E}[\text{VERTICI TOLTI}] = np - \frac{dn}{2} p^2$$

$$p = \frac{1}{2} \Rightarrow np - \frac{dn}{2} p^2 = \frac{n}{2} \quad \text{UN PO' PEGGIO DI PRIMA, MA DI UN FATTORE 2}$$

PER WSA: TABELLA $n \times n$, DIMOSTRARE CHE POSSIAMO PRENDERE $\frac{1}{2026} n^{4/3}$ CASES TALI CHE NON CE NE SIANO QUATTRO CHE SONO I VERTICI DI UN RETTANGOLO



ES:



NE HA SOLO $2n-1$

ARTICOLO DI EVAN WEN "EXPECTED USES OF PROBABILITY"