

C2 Medium

Tess

Note Title

04/09/2026

Problema: di ricerca del minimo o massimo

EGMO 2018.4

($n \geq 3$)

In una tabella $n \times n$, alcuni domino ($2 \times 1, 1 \times 2$) sono disposti in modo che $\exists k \geq 1$ t.c. $\forall$ riga, $\forall$ colonna, la tal riga o colonna interseca esattamente k domino.

Determinare il minimo k (per ogni n)

Struttura generale di una buona soluzione:

Risposta

in qualche ordine • la realizzabilità della risposta (spesso c'è un esempio esplicito)
• l'ottimalità della risposta

Il meta è al contrario:

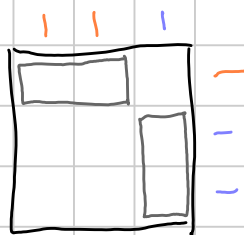
rafforzare una stima dal basso
e una stima dall'alto

qualcosa $\leq k$

$k \leq$ altro

Meta sol

$n=3$



Oss: fare un double counting $S = \{ (r/c, d) \text{ t.c. domino } d \text{ interseca } r/c \}$

$$3D = |S| = nk + nk = 2nk$$

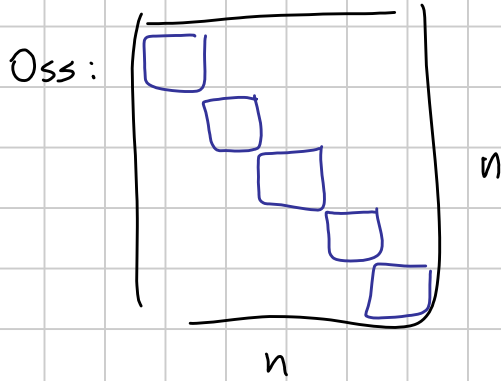
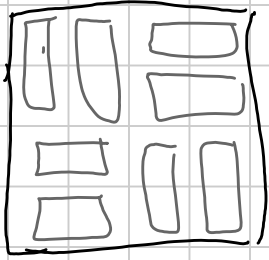
$$k = \frac{3D}{2n} \in \mathbb{N}$$

se $3 \nmid n$, allora $3 \mid k$ ($\Rightarrow k \geq 3$)
altrimenti: non so nulla ($\Rightarrow k \geq 1$)

Cosa succede $n=4$

$k \geq 3$, proviamo $k=3$

$$D = 2n = 8$$



se $3|n$,
posso costruire una diagonale di
bocchetti 3×3
aggiungo in sistema le 3 righe e le 3 colonne
con $k=1$

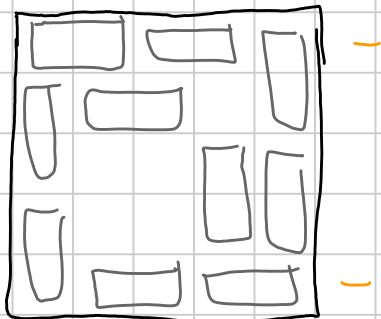


$$\begin{aligned} 1 \leq k \leq 1 & \quad \forall 3|n \\ 3 \leq k \leq 3 & \quad \forall n \equiv 4 \pmod{9} \\ & \quad n \equiv 1, 2, 5, \pmod{9} \\ & \quad 7, 8 \end{aligned}$$

Altra osservazione: se sappiamo fare $n = n_0$
e $n = n_1$ (con $k=3$)
sappiamo fare $\lambda n_0 + \mu n_1$

$$n=5$$

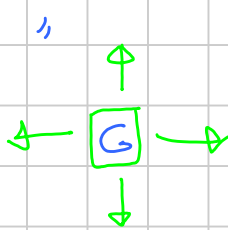
$$D = 2n = 10 \quad (5 \text{ } \square, 5 \text{ } \square), k=3$$



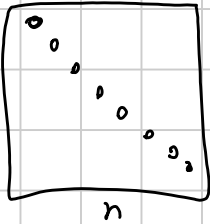
ITAMO 2024 S:

Fortezza con k guardie t.c. ogni casella è sorvegliata

- Determinare il minimo k t.c. ogni fortezza con perimetro ≤ 2024 è sorvegliata da k guardie



Sol:



n

n

h. perimetro $4n$
 $k \geq \frac{\text{perimetro}}{4}$

di sicuro mi bastano n guardie in questi caso
mi servono almeno n guardie
altrimenti almeno 1 riga e almeno 1 colonna
sono scoperte e l'intersezione non è sorvegliata

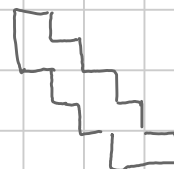
Prendiamo una riga e una colonna i cui 4 muri non erano sorvegliati
da una guardia, allora l'intersezione non era sorvegliata

quindi: il numero di guardie minimo $\leq \left\lceil \frac{\text{perimetro}}{4} \right\rceil$

Per quanto riguarda le aree abbiamo

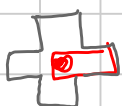
$$\frac{A}{c} \leq k \leq A$$

se ogni guardia non
può sorvegliare più di c caselle



$$\frac{A}{3} \leq k$$

Osserviamo che $A=2$ serve $k=1$



Osserviamo che una guardia sorveglia le 4 vicine (se esistono)

Le adiacenze suggeriscono di guardare la scacchiera

Osserviamo che

$$k \leq \frac{A}{2} \quad (\text{ponendo le guardie sulle branche})$$



EGMO 2023.3: C'è un dizionario $\mathbb{D}$ di stringhe binarie lunghe n con k parole.

Voglio costruire un quadrato $n \times n$ in cui tutte le righe e tutte le colonne sono stringhe in $\mathbb{D}$

Determinare il minimo k t.c. riesco sempre (indipendentemente da quali parole ho in $\mathbb{D}$)

Sol: se $00 \dots 0 \in \mathbb{D}$ è banalmente risolto
 $11 \dots 1 \in \mathbb{D}$ „

Di sicuro riesco se $k \geq 2^n - 1$

$$\leq \min k \leq 2^n - 1$$

$n=2$

00
01
10
11

←

} $\mathbb{D}$

01
10

←

$$\min k \leq 2^n - 2 \quad (n \geq 2)?$$

Osserviamo che per un bound dal basso vorrei un vincolo che non dipenda dall'ordine delle stringhe in $\mathbb{D}$

la cosa più semplice è vincolare una cifra es: la prima

se la prima cifra deve essere 0 $\Rightarrow$ la prima colonna è $00 \dots 0$

Se $\mathbb{D} = \{ \text{stringhe che iniziano per 0} \} \setminus \{ 00 \dots 0 \}$

$$|\mathbb{D}| = 2^{n-1} - 1$$

$$2^{n-1} \leq \min k \leq 2^n - 1$$

$$\text{se } n \geq 2 \quad 2^{n-1} \leq \min k \leq 2^n - 2$$

$n=3$

$$4 \leq \min k \leq 6$$

001 → 110
010 → 101
100 → 011

101
010
101

001
001
110

ora so che $\text{mak} = 4$ ($n=3$)

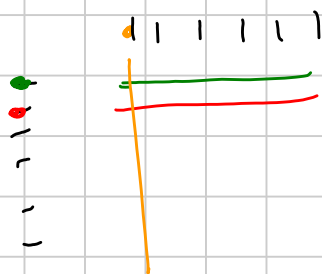
Oss: se ho 2 stringhe una opposta all'altra,
posso costruire un quadrato usando solo queste due

$(a_1, a_2, \dots, a_n)$ (con $a_n = 0$)

in posto (i, j) metto $a_i + a_j \pmod{2}$

È una matrice di rango 1 usando $n-1$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} a_i \\ \vdots \\ a_j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_i \\ \vdots \\ a_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_i a_i \\ \vdots \\ a_j a_j \end{pmatrix}$$



IMO 2014 2

In una tabella $n \times n$ ci sono delle torri t.c.
2 torri non si affacciano a vicenda e non posso
aggiungere altre torri

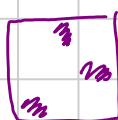
Quanto è grande, al minimo, il più grande quadrato $k \times k$
senza torri?

Questa configurazione è un modo di rappresentare una permutazione dentro una
tabella

basta indicare con a_i l'indice nella i -esima riga dove sta la torre



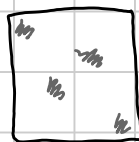
$(1, 2, 3)$



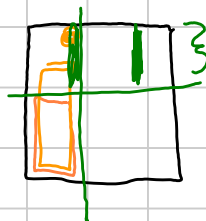
$(2, 3, 1)$

Sol: $1 \leq k \leq \frac{n}{2}$

Quando n serve $k \geq 2$? $n=4$



$n=5$



Nella prima riga devo avere una torre
se prendo la sua colonna e un po' di colonne vicine



Prendo altre h colonne
 h torri in un $(n-1) \times (h+1)$
quanti: $(h+1) \times (h+1)$ ho?

$$\left\lfloor \frac{n-1}{h+1} \right\rfloor$$

Funziona non appena $\left\lfloor \frac{n-1}{h+1} \right\rfloor > h$

Sia $m := \lfloor \sqrt{n-1} \rfloor$ allora $\left\lfloor \frac{n-1}{m} \right\rfloor > m-1$

$$n-1 \geq m^2 \quad \frac{n-1}{m} \geq m$$

Quindi sicuramente $\lfloor \sqrt{n-1} \rfloor \leq \min k \leq \frac{n}{2}$

$\uparrow$
è troppo largo, $n=4$

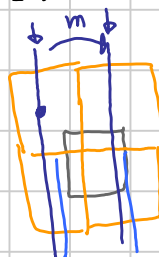
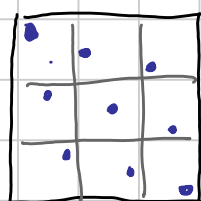
$\min k(n) \leq \min k(n+1)$ (buttando via righe e colonne)

Alla luce di ciò, proviamo $n = m^2 + 1$

anzi proviamo

$n = m^2$

In particolare $m=3$



IMO 2025. 6: In un quadrato $n^2 \times n^2$ c'è una tassellazione in rettangoli che non copre esattamente una permutazione

Determinare il minimo numero di rettangoli utilizzati

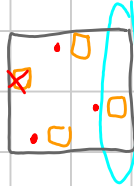
Sol:

$$n^2 - 1 \leq \min k \leq 2n^2 - 2$$

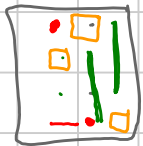
il quadratino 25×25 o un pilastro
è ricoperto da rettangoli:
ovvero:

ogni riga si fa
con 1 o 2 rettangoli $1 \times m$

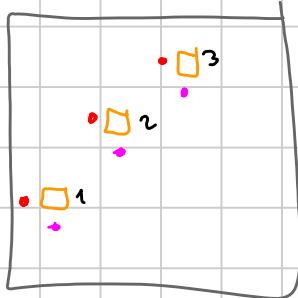
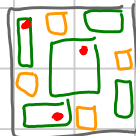
$n=2$ $3 \leq \min k \leq 6$
 $\uparrow$
 è largo



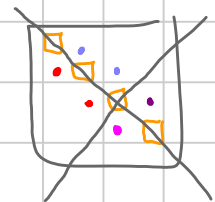
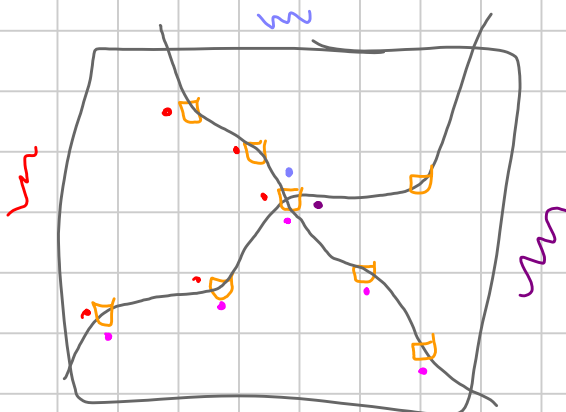
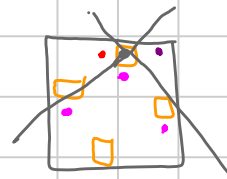
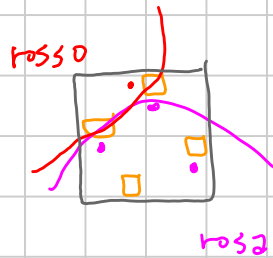
$$4 \leq \min k \leq 5$$



$$\min k = 5$$



$$1 < 2 < 3$$



Quindi, quanti spazi da ricoprire con different. rettangoli: h.o?

$$h.o \quad n^2 - 4 + \text{trasversale} \nearrow + \text{trasversale} \searrow + 1$$

Quanto sono lunghe le trasversali: in totale?

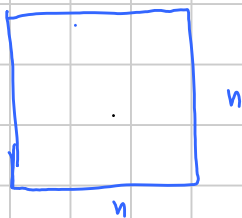
In una sequenza di $2b+1$ reali:

$\exists$ sottosequenza lunga $a+1$ di crescenti

o " " " $b+1$ di decrescenti.

(Erdos - Szekeres)

IMO 2022 6

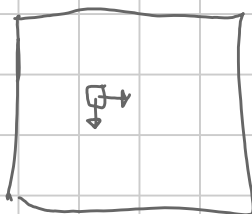
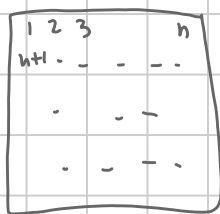


Ascending paths
si parte da un minimo locale
e ci si può muovere attraversando lat.
(vale anche 1 sola casella)

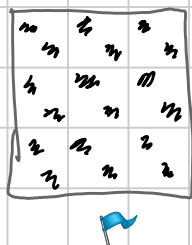
Quanti sono al minimo gli ascending paths differenti;

Sol:

$$n^2 \leq \min k \leq \sim \frac{5}{2} n^2$$



una crescita esponenziale!



Quanti ci sono $\frac{n^2}{2}$ a.p. lunghi 1 casella

ci sono $\sim 4 \frac{n^2}{2}$ a.p. lunghi 2 caselle

$n=1$

$\min k = 1$

$n=2$



6



5



5

$$4 \leq \min k \leq \sim 10$$

$5 \leq$

≤ 5

Possiamo osservare che se l'a.p. ha almeno 2 caselle,
allora posso costruirlo a ritroso partendo dalle ultime 2



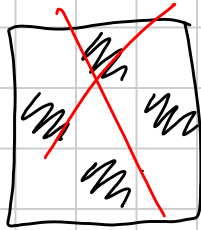
$$\rightarrow 2 \cdot n \cdot (n-1)$$

+ gli a.p. lunghi 1

$$\rightarrow ? \geq 1$$

$$2n^2 - 2n + 1 \leq \min k$$

(1 pt)

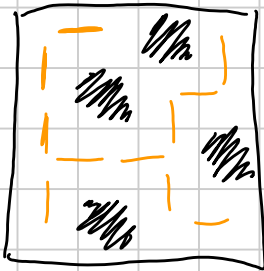


Osservazione: se posso garantire che non si scende in più di un modo da una casella verso un minimo locale, garantisco l'ottimalità del bound sugli 2. p. lunghi ≥ 2

$\Rightarrow$ mi serve non avere cicli

Osservazione: ogni comp. con. caselle ha almeno una sorgente

Vorrei: un solo albero per tutta la $n \times n$
 Vorrei: una costruzione che ha alcune caselle non adj fra loro e il complementare deve essere un albero



Per cosa: concludere

— esibendo una costruzione esplicita
 — involutivamente sui rettangoli $n \times m$

RMM 2017 3

Def: una famiglia di sottoinsiemi $A_1, \dots, A_k \subseteq \{1, \dots, n\}$

è "stretta" quando:

• $\bigcup A_i \neq \{1, \dots, n\}$

• ogni elemento $x \in \bigcup A_i$ è coperto da almeno 2 A_i

(escludiamo insiemi vuoti o l'insieme universo $\{1, \dots, n\}$)

Prendiamo una famiglia t.c. ogni sua sottofamiglia NON è stretta
 (ed almeno un insieme)

Determinare il massimo numero k di elementi dentro questa famiglia

Sol: se prendo i sottoinsiemi di $n-1$ elementi, va bene

$$n \leq \max k \leq ? \sim 2^{n-1}$$

==

$$n=2$$
$$\{1\} \quad \{2\}$$
$$\max k = 2$$
$$h = 3$$
 $\{1, 2\}$ $\{2, 3\} \quad \{1, 3\}$
$$\max k = 9$$
 $\{1\}$ $\{z\}$ $\{3\}$
$$n = 4$$

Prendo tutti gli insiemi da 3

$$6 \leq \max k \leq ?$$

e 2 singlets $\{1\}, \{2\}$

$$2n-2 \leq \max k < ?$$

Quando posso ricostruire una famiglia valida per un n più piccolo usando un n più grande?

Nel nostro caso

$$n=3$$

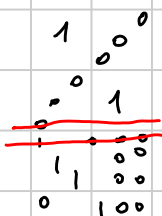
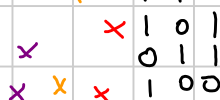
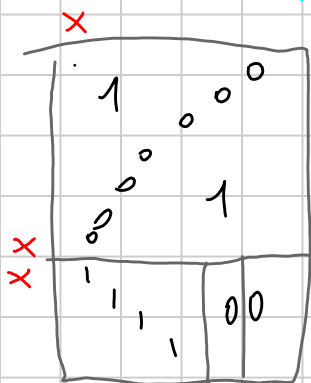
x

110

1

10	01
----	----

togliendo 1 colonna e 2 righe



Se avessi 2 colonne uguali, posso fondere i due elementi che non sono distinti da nessun insieme, e ricondurmi al caso $n-1$

Sia $\{1\}$ wLog 1 elemento non frequente
 e sia $\{2\}$ wLog il secondo elemento meno frequente.
 è vero che solo 2 insiemi li distinguono?

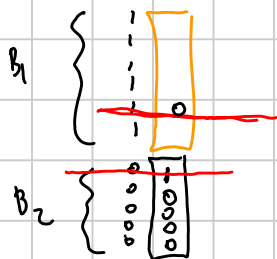
Siano B_i i sottosistemi che hanno 1

1	2
---	---

 B_2

“

non hanno 1



$$\boxed{7} \geq |B_1| - 1 = 1''$$

[