

S26 MEDIUM MISCELLANEA (CN)

Titolo nota

06/09/2026

N1
$$n = \sum_{i=1}^m 2^{\alpha_i} 3^{\beta_i} \quad 2^{\alpha_i \beta_i} \nmid 2^{\alpha_j \beta_j} \quad i \neq j$$

oss n va bene, allora anche $2n$ e $3n$

Procediamo per induzione forte:

$n=1$ ✓

n è pari o multiplo di 3 ✓ (oss)

$\alpha(n, 6) = 1$, proviamo a sommare la potenza di 3 più grande

$$3^k \leq n < 3^{k+1} \quad \text{ci basta sottrarre } n - 3^k$$

$$\text{Notiamo } 2 \mid n - 3^k \Rightarrow n - 3^k = 2 \left(\sum_{i=1}^m 2^{\alpha_i} 3^{\beta_i} \right)$$

$$2^{\alpha_i+1} 3^{\beta_i} \nmid 3^k \quad \checkmark$$

Dobbiamo osservare che $3^k \nmid 2^{\alpha_i+1} 3^{\beta_i}$, cioè $k \neq \beta_i$

$$3^{\beta_i} \leq \frac{n-3^k}{2} < \frac{3^{k+1}-3^k}{2} = 3^k \quad \beta_i < k$$

Per ipotesi induttiva, abbiamo concluso.

N2 $a_{n+1} = a_n + P(a_n) \quad \exists n \quad a_n / P(a_n) = 2026$

$$b_n = a_n / P(a_n) \quad P(a_n) = r_n \quad a_n = b_n \cdot r_n$$

CLAIM | ogni intero positivo appare ∞ volte in (b_n)

$$a_{n+1} = a_n + r_n = r_n (1 + b_n)$$

$$r_n \mid a_{n+1} \quad r_n \mid r_{n+1} \quad b_{n+1} = \frac{b_n + 1}{r_{n+1}/r_n}$$

$$\Rightarrow b_{n+1} \leq b_n + 1$$

b_n continua a volte di 1 finché $r_{n+1}/r_n = 1$

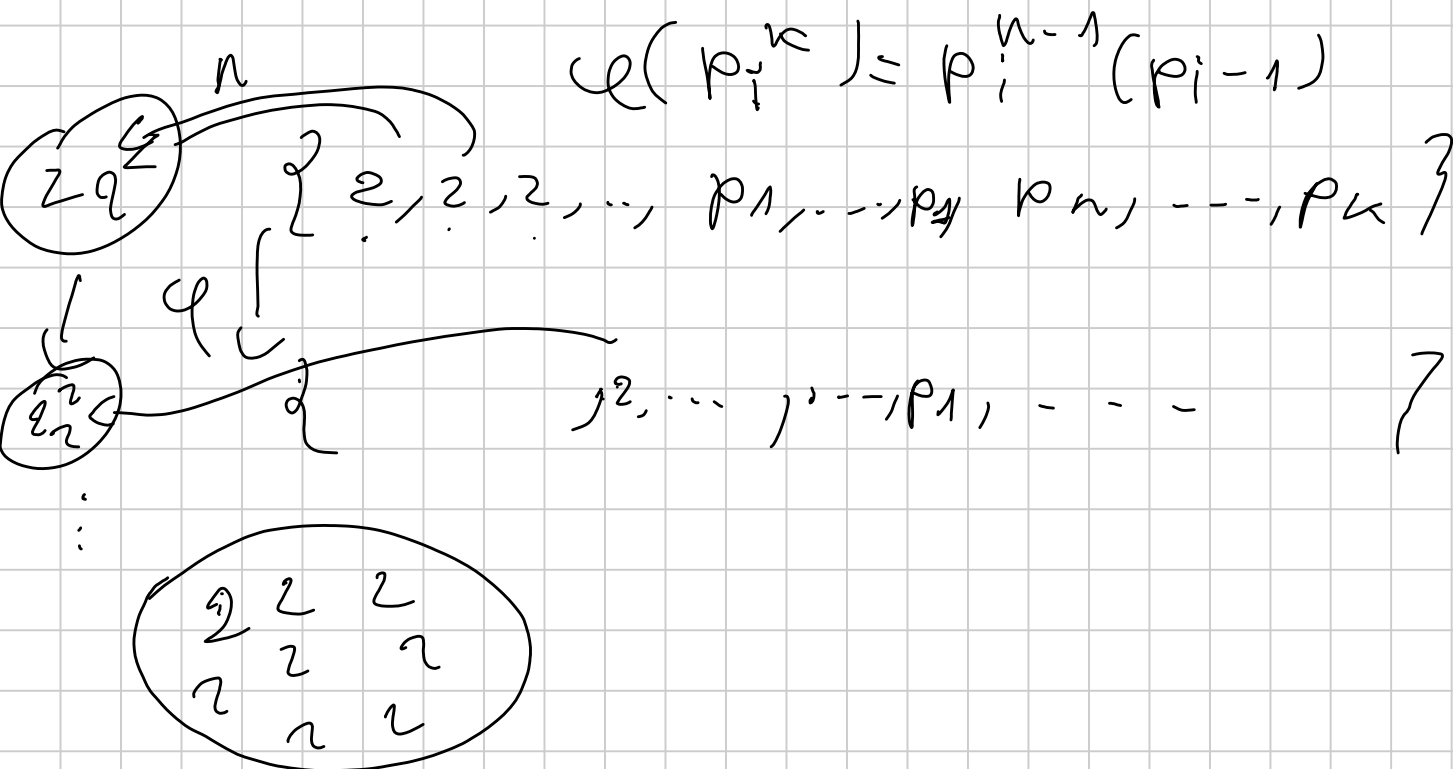
Se continuiamo a crescere b_n fino a $b_{n+k} = b_n + k - 1$

$$e p | r_{n+k} / r_{n+k-1} \Rightarrow b_{n+k} \leq \frac{b_{n+k}}{p} \leq \frac{b_{n+p-1}}{p} \leq 1 + \frac{b_{n-1}}{p} \leq 1 + \frac{b_{n-1}}{2} \leq b_n \quad (< x b_n > 1)$$

$\Rightarrow$ Prima o poi avremo che $b_n = 1$.

1) ora in poi b_n continuerà a salire fino a $p-1$ dove p è il più piccolo primo che non divide r_n , e poi scenderà di nuovo a 1.
 Uguale a 0 primi prenderemo tutti gli interi positivi o volti

$$Q^k(n) = 1 \quad \kappa(n) := \min k \text{ tale che } 3^k > n$$



$$Q(n)$$

$\hat{\kappa}(n) = \text{"D' fattori 2 che compaiono quando itero } Q \text{"}$

$$\kappa(n) = \begin{cases} \hat{\kappa}(n) & \text{se } 2 | n \\ 1 + \hat{\kappa}(n) & \text{altrimenti} \end{cases}$$

n e $m < n$, supponiamo la tesi

In particolare, se $p \mid n$, vale la tesi per $p-1$

• p dispari, $p \mid n$

$$\hat{h}(p) = h(p-1) = \hat{h}(p-1) > \ln_3(p-1) \\ \geq \ln_3(p)$$

~~*~~ $\hat{h}(p) \geq \ln_3(p)$

$$\hat{h}(mn) = \hat{h}(m) + \hat{h}(n)$$

$$\hat{h}(n) = e^{\sum \alpha_i} \prod p_i^{\alpha_i} \\ \hat{h}(n) = e + \sum \alpha_i \hat{h}(p_i) =$$

$$= e + \sum \alpha_i \ln_3(p_i) =$$

$$= e + \ln_3(n/e) = \ln_3(n) + e(1 - \ln_3(2))$$

Se n è pari, $e \geq 1$, $h(n) = \hat{h}(n)$, e si ha la tesi.

Se n è dispari

$$a(n) = 1 + \hat{h}(n) \geq 1 + \ln_3(n)$$

□

k

N

$p \mid N$

$(p^k - \frac{1}{p})N$

Es n hari t.c.

e m auto para 2026 | U

$$2026 = 2 \cdot 1013$$

$$r \mid p^{n+1} - 1 = (p-1)(\dots)$$

$$n+1 = \phi(1013) = 1012$$

$$p \equiv 1 \pmod{1013}$$

$$p^{n+1} - 1$$

$$n+1 = q^{1013}$$

$$r \mid p^q - 1$$

$$r \mid p - 1$$

$$r \nmid p - 1$$

$$r \mid p^q - 1 \Rightarrow$$

$$\text{ord}_r(p) = q$$

$$q \mid r-1$$

$$r \equiv 1 \pmod{q}$$

$$r < p$$

... o lha jura, i p# 1(1013) jura, e obeliscos vira.

$$\boxed{n = q^h - 1} \quad n+1 = q^h$$

$$r \mid p^{q^h} - 1$$

$$r \mid p - 1$$

$$q \mid \text{ord}_r(p) \mid r-1 \Rightarrow r \equiv 1 \pmod{q}$$

