

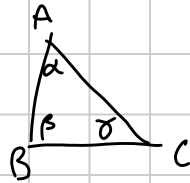
G1 MEDIUM

Note Title

02/09/2026

"CONTI DI SEGMENTI"

TEOREMA DEL SENO:

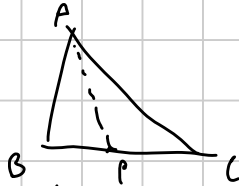


$$\frac{BC}{\sin \alpha} = \frac{AC}{\sin \beta} = \frac{AB}{\sin \gamma} = 2R$$

DOVE R È IL RAGGIO DELLA CIRCOSCRITTA AD ABC.

$$\frac{AB}{AC} = \frac{\sin \gamma}{\sin \beta}, \dots$$

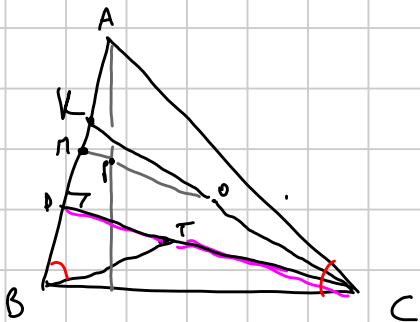
"RANKO LEMMA"



$$\frac{PB}{PC} = \frac{AB}{AC} \cdot \frac{\sin \angle PAB}{\sin \angle PAC}$$

$$\text{DIN: } \frac{PB}{PC} = \frac{PB}{AB} \cdot \frac{AB}{AC} \cdot \frac{AC}{PC} = \frac{\sin \angle PAB}{\sin \angle BPA} \cdot \frac{AB}{AC} \cdot \frac{\sin \angle APC}{\sin \angle CAP} = \frac{AB \sin \angle PAB}{AC \sin \angle CAP}$$

ES:



(AC > AB, beta > gamma)

T È ALTEZZA DA C, TALE CHE $\angle ABT = \gamma$

O CIRCOCENTRO, K = COM AB

TESI: ASSE DI AB, ALTEZZA DA A, KT CONCORRONO

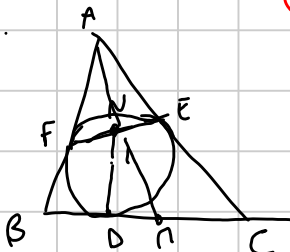
DIN: M PUNTO MEDIO DI AB $\Rightarrow OM \parallel CT$, D PIEDE DI C

SE P = OM $\cap$ ALTEZZA DA A. PER DIRE K, P, T ALLINEATI, CI BASTA DIMOSTRARE

$$\frac{PM}{PO} = \frac{TD}{TC} \quad \text{LO GUARDIAMO DA B: } \frac{DT}{TC} = \frac{BD \sin \angle DBT}{BC \sin \angle TBC} = \frac{\cos \beta \sin \gamma}{\sin(\beta - \gamma)}$$

$$\frac{MP}{PO} \quad \text{GUARDIAMO DA A: } \frac{MP}{PO} = \frac{AM \sin \angle PAM}{AO \sin \angle OAP} = \frac{\sin \gamma \cos \beta}{\sin(\beta - \gamma)} \quad \left(\begin{aligned} \angle OAP &= \angle OAB - \angle BAP \\ &= 90 - \gamma - (90 - \beta) = \beta - \gamma \end{aligned} \right)$$

ESERCIZIO:



INSCRITA TANGENTE IN D, E, F

N = DI $\cap$ EF, M = AN $\cap$ BC

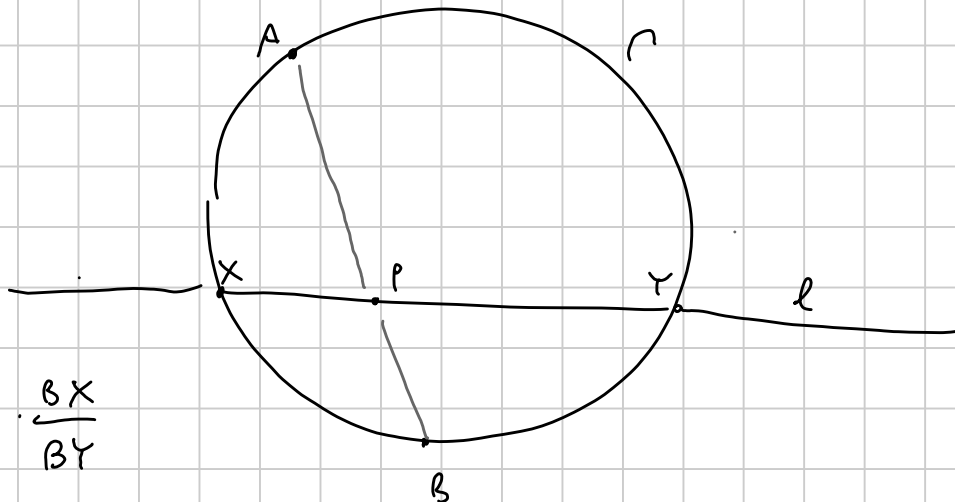
DIMOSTRARE M PUNTO MEDIO DI BC

"RATIO LEMMA 2"

Γ CIRCONFERENZA, l RETTA

$$\Gamma \cap l = \{X, Y\}$$

$A, B \in \Gamma, P \in l$



$$A, P, B \text{ ALLINEATI} \Rightarrow \frac{PX}{PY} = \frac{AX}{AY} \cdot \frac{BX}{BY}$$

CONVENZIONE SUI RAPPORTI: $\frac{AX}{AY} > 0$ SE A STA SOPRA l , $\frac{AX}{AY} < 0$ SE STA SOTTO (PER UNA SCELTA DI "SOPRA" E "SOTTO" RISPETTO A l)

$\frac{PX}{PY} < 0$ SE P È SUL SEGMENTO XY , POSITIVO SE È FUORI

FATTO: SE $P, P' \in l$, E $\frac{PX}{PY} = \frac{P'X}{P'Y}$ (CONSIDERANDO ANCHE IL SEGNO) $\Rightarrow P = P'$
 IDEN SU Γ : $\frac{AX}{AY} = \frac{A'X}{A'Y} \Rightarrow A = A'$

OSS: SE P, A, B COME SOPRA, E $\frac{PX}{PY} = \frac{AX}{AY} \cdot \frac{BX}{BY}$, $P' = AB \cap l$, QUINDI

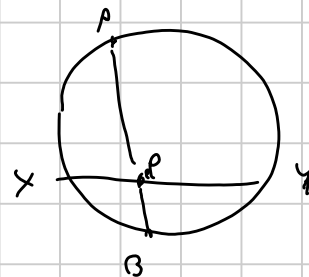
$$\frac{P'X}{P'Y} = \frac{AX}{AY} \cdot \frac{BX}{BY} = \frac{PX}{PY} \Rightarrow P = P', \text{ CIOÈ } A, P, B \text{ ALLINEATI. QUINDI IL LEMMA IN}$$

REALTÀ CI DICE $\frac{PX}{PY} = \frac{AX}{AY} \cdot \frac{BX}{BY} \Leftrightarrow A, P, B \text{ ALLINEATI}$

DIM DI A, P, B ALLINEATI $\Rightarrow \dots$

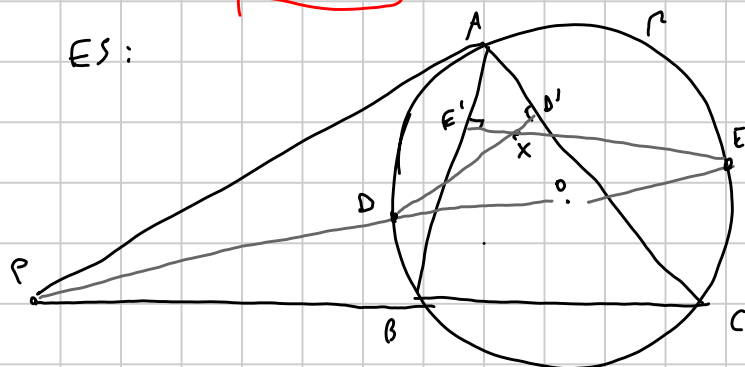
FACCIAMO SOLO IL CASO A, B OPPOSTI

(QUINDI $\frac{PX}{PY} < 0$, $\frac{AX}{AY} \cdot \frac{BX}{BY} < 0$)



$$\frac{PX}{PY} = \frac{AX \sin \angle PAX}{AY \sin \angle YAP} = \frac{AX}{AY} \cdot \frac{BX}{BY}$$

ES:



ABE TRIANGOLO, Γ CIRCOSCRITTO.

$P = BC \cap$ TANGENTE IN A

D, E INTERSEZIONI DI PO E Γ

X T.C.: $DX \perp AC$, $EX \perp AB$

TESI: A, X, O ALLINEATI

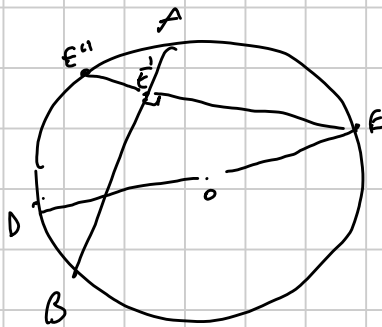
SOL: D', E' PROIEZIONI DI D, E SU AC, AB , VUOLEMO $\angle XAB = \angle DAB = 90^\circ - \gamma$

$\angle XAB = \angle XAE' = 90^\circ - \angle E'D'A \Rightarrow$ VUOLAMO $\angle E'D'A = \gamma$, CIOÈ $D'E' \parallel BC$

EQUIVALENTEMENTE, $\frac{E'A}{E'B} = \frac{D'A}{D'C}$ (TALETE)

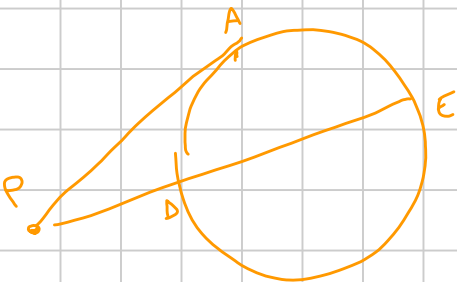
$$\frac{E'A}{E'B} = \frac{EA}{EB} \cdot \frac{E''A}{E''B}$$

$DE^{\perp}AB$ è un trapezio isoscele



$$\Rightarrow \frac{E'A}{E'B} = \frac{EA}{EB} \cdot \frac{DB}{DA}$$

ANALOGANEME, $\frac{D'A}{D'C} = \frac{DA}{DC} \cdot \frac{D''A}{D''C} = \frac{DA}{DC} \cdot \frac{EC}{EA}$. TESI $\Leftarrow \frac{EA}{EB} \cdot \frac{DB}{DA} = \frac{DA}{DC} \cdot \frac{EC}{EA}$



CASO PARACOLINE DEL LETTO: $A=B$

"A, B, P ALUNNI" DIVENTA "PA TRINLE LA CIRCONFERENZA"

$$\Leftrightarrow \frac{PD}{PE} = \frac{AD}{AE} \cdot \frac{AD}{AE} = \left(\frac{AD}{AE}\right)^2$$

SE NON VI CONVINCE, ESERCIZIO: CONVINCERSENE.

TOORNANDO AL PROBLEMA, $\frac{PD}{PE} = \left(\frac{AD}{AE}\right)^2$, MA ANCHE $\frac{PD}{PE} = \frac{BD}{BE} \cdot \frac{CD}{CE}$

$$\Rightarrow \left(\frac{AD}{AE} \right)^2 = \frac{BD}{BE} \cdot \frac{CD}{CE} \Leftrightarrow AD^2 \cdot BE \cdot CE = AE^2 \cdot BD \cdot CD \Leftrightarrow \frac{EA}{EB} \cdot \frac{DB}{DA} = \frac{DA}{DC} \cdot \frac{EC}{EA}$$

CRISTO QUELLO CHE CI SERVIVA

LINEARITY OF POP (= POWER OF A POINT)

Γ , n CIRCONFERENZE, DI CENTRO O_1, O_2 E RAGGIO R_1, R_2 RISPETTIVAMENTE, GUARDIAMO LA FUNZIONE $f: \text{PIANO} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(p) = \text{pow}_p(p) - \text{pow}_w(p) = (o_1 p^2 - r_1^2) - (o_2 p^2 - r_2^2)$$

CE LA SCRIVIAMO IN CARTESIANE : $O_1 = (x_1, y_1)$, $O_2 = (x_2, y_2)$, $P = (x, y)$

$$f(p) = (x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 - r_1^2 - (x-x_2)^2 - (y-y_2)^2 + r_2^2 =$$

$$= \cancel{x_1^2} - 2x_1x_2 + \cancel{x_2^2} + \cancel{y_1^2} - 2y_1y_2 + \cancel{y_2^2} - R_1^2 - \cancel{x_2^2} + 2x_2x_1 - \cancel{x_1^2} - \cancel{y_2^2} + 2y_2y_1 - \cancel{y_1^2} + R_2^2$$

$$= ax + by + c \quad \text{PER QUALCHE } a, b, c \quad (a = -2x_1 + 2x_2, \dots)$$

COSA VUOL DIRE CHE f È "LINEARE"? SE PRENDIAMO $\vec{P} = (x_p, y_p)$, $\vec{Q} = (x_q, y_q)$
 $\vec{R}$ È SEGMENTO PQ ($\Leftrightarrow \exists t \in [0,1]$ T.C. $\vec{R} = t\vec{P} + (1-t)\vec{Q}$)

$$f(\vec{R}) = f(t\vec{P} + (1-t)\vec{Q}) = a(tx_p + (1-t)x_q) + b(ty_p + (1-t)y_q) + \underbrace{c}_{t c + (1-t)c} =$$

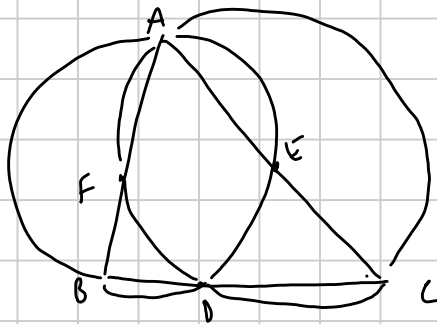
$$= t(ax_p + by_p + c) + (1-t)(ax_q + by_q + c) = t f(\vec{P}) + (1-t) f(\vec{Q})$$

ESERCIZIO: $\vec{P}_1, \dots, \vec{P}_n$, $t_1, \dots, t_n$ con $t_1 + \dots + t_n = 1$, $P = t_1 \vec{P}_1 + \dots + t_n \vec{P}_n$

$$\Rightarrow f(\vec{P}) = t_1 f(\vec{P}_1) + \dots + t_n f(\vec{P}_n) \quad \text{DM: INDUZIONE}$$

OSS: SE $R \in \text{RETTA PQ}$, MA FUORI DAL SEGMENTO PQ, ESISTE t T.C. $tP + (1-t)Q = R$
 MA $t \notin [0,1]$. $\Rightarrow f(R) = t f(P) + (1-t) f(Q)$ VALE PER OGNI R SULLA RETTA

ES:



$D \in BC$ VARIABILE, $AC \cap (ABD) = \{A, E\}$

$AB \cap (ACD) = \{A, F\}$

TESI: AL VARIARE DI D SU BC , (AEF) PASSANO
 TUTTE PER UN PUNTO FISSATO DIVERSO DA A

SOL: SE ESISTE QUESTO PUNTO X , AX È ASSE RADICALE DI TUTTE LE (AEF)

VALE ANCHE IL VICEVERSA: SE TROVIAMO UN ASSE RADICALE DI TUTTE QUESTE
 CIRCONFERENZE, ABBIAMO UNA SECONDA INTERSEZIONE COMUNE

CI BASTA TROVARE UN PUNTO $P \neq A$ TALE CHE $\text{POW}_{(AEF)}(P)$ NON DIPENDE DA D .

LO CERCHIAMO SU BC , $P = tB + (1-t)C$

ANDIAMO A CALCOLARE $f = \text{POW}_{(AEF)} - \text{POW}_{(ABC)}$

$$\Rightarrow f(P) = t f(B) + (1-t) f(C) = t BF \cdot BA + (1-t) \cdot CE \cdot CA =$$

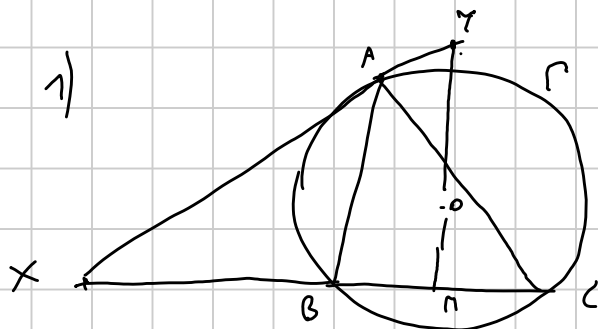
$$= t BD \cdot \underline{BC} + (1-t) CD \cdot \underline{CB} = \underline{BC} (t BD + (1-t) CD)$$

PER $t = 1/2$, $f\left(\frac{B+C}{2}\right) = BC \cdot \left(\frac{BD}{2} + \frac{CD}{2}\right) = \frac{BC^2}{2}$, NON DIPENDE DA D

$\text{POW}_{(ABC)}\left(\frac{B+C}{2}\right)$ NON DIPENDE DA $D \Rightarrow \text{POW}_{(AEF)}\left(\frac{B+C}{2}\right)$ NON DIPENDE DA D .

ESERCIZI PER LA PAUSA:

1)

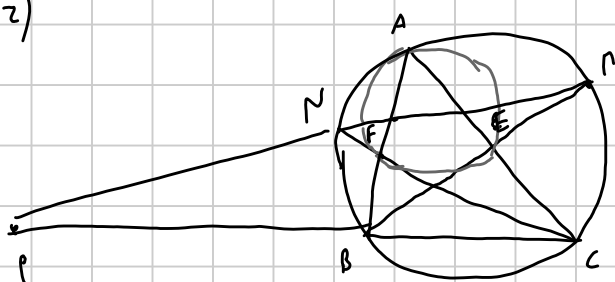


ABC TRIANGOLO, O CIRLOCENTRO, Γ
CIRLOCIRCONTO, M PT MEDIO DI BC
 $X = BC \cap$ TANGENTE IN A

$Y = OM \cap$ TANGENTE IN A

TESI: L'ASSE RADIALE DI Γ E (OXY)
BISeca AM

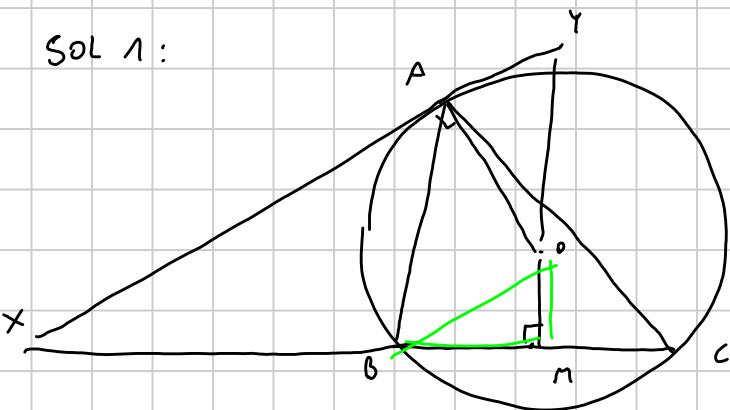
2)



BE, CF BISETTICI, $P = MN \cap BC$

TESI: AP TANGENTE (AEF)

SOL 1:



DEFINIAMO $f = \text{POW}_{(ABC)} - \text{POW}_{(OXY)}$

$$0 \stackrel{?}{=} f\left(\frac{A+M}{2}\right) = \frac{1}{2}f(A) + \frac{1}{2}f(M)$$

$$= \frac{1}{2} \left(AX \cdot AY - MB^2 - MO \cdot MY \right)$$

$$\Rightarrow AX \cdot AY = MB^2 + MO \cdot MY$$

$$AX = XY - AY$$

$$\Rightarrow AX \cdot AY = AY(XY - AY)$$

$$AX \text{ ON CIRCLO } \Rightarrow AY \cdot XY = OY \cdot YN$$

$$OY \cdot YN - AY^2 = OY \cdot YN - (OY^2 - R^2) = OY \cdot YN - OY^2 + R^2 =$$

$$= OY(YN - OY) + R^2 = ON \cdot OY + R^2 = ON \cdot OY + MB^2 + OM^2 = MB^2 + OM(OY + OM) =$$

$$= MB^2 + OM \cdot MY, \text{ COME VOLEVAMO}$$

sol 2

DEFINIAMO P' COME L'INTEGRAZIONE

TMA CA TANLENTE A (AEF) IN A
E BC, VOI WAMO DIMOSTRARE

$$\frac{P'B}{Q'C} = \frac{PB}{PC}$$

$$f = \text{pow}_{(A)} - \text{pow}_{(A \oplus f)} \quad A \oplus f \in \text{L'ASSE RADICALE DI } (A) \in (A \oplus f)$$

$$\text{se } Q = tB + (1-t)C \quad \frac{Q_B}{Q_C} = \frac{t-1}{t} \quad (\text{DOVE USIAMO I SEGNI COME PRIMA})$$

Pense $t\vec{B} + (1-t)\vec{C} = \vec{Q} = t\vec{Q} + (1-t)\vec{Q} \Rightarrow t(\vec{Q} - \vec{B}) = (1-t)(\vec{Q} - \vec{C})$
 $\Rightarrow (Q \in \text{Reta}(BC)) \quad t \cdot |QB| = (1-t) |QC|, \quad t \in]0,1[\quad \text{Pense!}$

($\in \text{SEVIO} : B \xrightarrow{\vec{e}} C \quad t \in [0, 1]$)

VALE ANCHE $f(q) = t f(b) + (1-t) f(c) \stackrel{\text{STRESSO CONTO}}{\Rightarrow} t(f(q) - f(b)) = (1-t)(f(q) - f(c))$

$$\Rightarrow \frac{Q_3}{Q_1} = \frac{t-1}{t} = \frac{f(2)-f(1)}{f(2)-f(1)} \Rightarrow \frac{p'_3}{p'_1} = \frac{\cancel{f(1)}^0 - f(1)}{\cancel{f(1)}^0 - f(1)} = \frac{f(1)}{f(1)} =$$

$$= \frac{BA^2 - BA \cdot BF}{CA^2 - CA \cdot CE} = \frac{BA(BA - BF)}{CA(CA - CE)} = \frac{BA \cdot AF}{CA \cdot AE}$$

$$\frac{PB}{PC} = \frac{MB}{MC} \cdot \frac{NB}{NC}$$

Uomini e ne
sono usati.

Modo Furbo: $AFC \sim NBC \Rightarrow \frac{NB}{NC} = \frac{AF}{AC}$

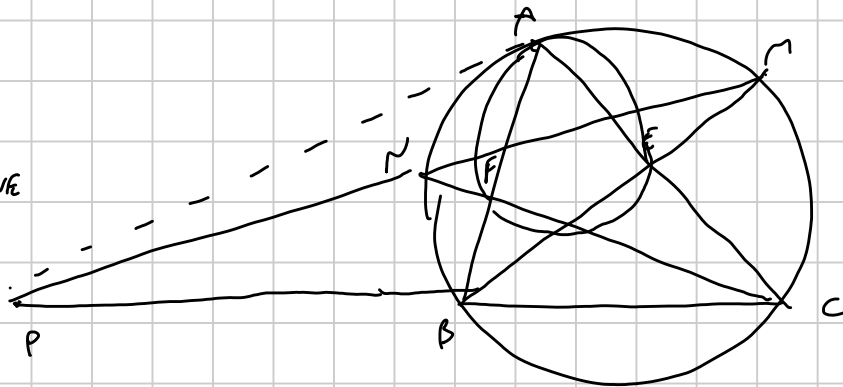
ANALOGAMENTE, $ABE \sim NBC \Rightarrow \frac{MB}{MC} = \frac{AB}{BC}$, QUINDI $\frac{MB}{MC} \cdot \frac{NB}{NC} = \frac{AB}{BC} \cdot \frac{AF}{AC}$

LOME VOLEVAMO.

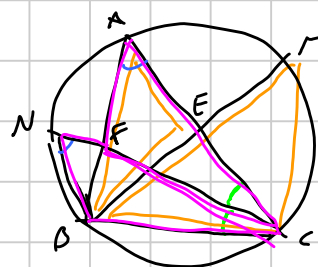
$$\angle NBC = \beta + \angle NBA = \beta + \gamma/2$$

MODO MENGURUS: TRIKONOMETRI, $\frac{NB}{NC} = \frac{\sin \angle BCN}{\sin \angle NBC} = \frac{\sin 8/2}{\sin (4 + 8/2)}$

$$AF/BF = AC/BC \Rightarrow AF = \frac{AC}{BC} \cdot (AB - AF) = \frac{b}{a} (c - AF) \Rightarrow (a+b)AF = bc \Rightarrow AF = \frac{bc}{a+b}$$



CIRCONFERENZA DI MELO 700

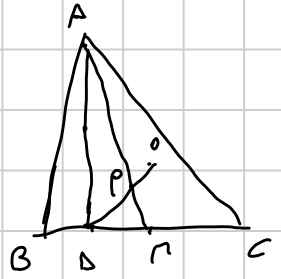


È COSÌ VIA...

ESERCIZIO PER CASA: ABC TRIANGOLO, M PUNTO MEDIO
DI BC , O CIRCOLENTO, D PIEDÈ DELL'ALTEZZA DA A , $P = OD \cap AM$

TESI: P È ASSE RADIALE DI (OBC) E LA FEUERBACH

(DUE ESERCIZI IN UNO: SI PUÒ FARE CON LINEARITÀ SIA SU
 AM CHE SU OD)



NUMERI COMPLESSI

p, q, r, s , QUANDO $pq \parallel rs$?



$$pq \parallel rs \Leftrightarrow q-p, s-r$$



HANNO LO STESSO ARGUMENTO $\Leftrightarrow \frac{q-p}{s-r} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{\overline{q-p}}{\overline{s-r}} = \frac{q-p}{s-r}$

CASO UTILE: p, q, r ALLINEATI $\Leftrightarrow pq \parallel pr \Leftrightarrow \frac{\overline{q-p}}{\overline{r-p}} = \frac{q-p}{r-p}$

p, q, r, s QUANDO $pq \perp rs$?

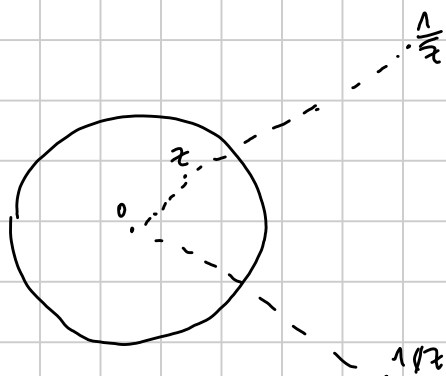
$$pq \perp rs \Leftrightarrow ip, iq \parallel rs$$

$$\Leftrightarrow \frac{(\overline{ip}) - (\overline{iq})}{\overline{s} - \overline{r}} = \frac{\overline{ip} - \overline{iq}}{s - r} = \overline{i \left(\frac{q-p}{s-r} \right)}$$

$$-i \left(\frac{\overline{q-p}}{\overline{s-r}} \right)$$

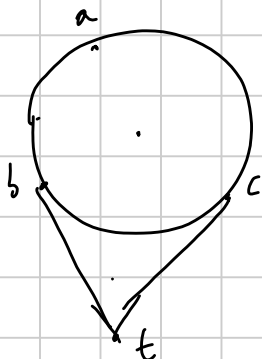
$$\Leftrightarrow \frac{q-p}{s-r} = - \frac{\overline{q-p}}{\overline{s-r}} = - \overline{\left(\frac{q-p}{s-r} \right)}$$

INVERSIONE RISPETTO ALLA CIRCONFERENZA UNITARIA



CHI È L'INVERSO DI z RISPETTO ALLA CIRCONFERENZA UNITARIA? $\frac{1}{\overline{z}}$

ESEMPIO:

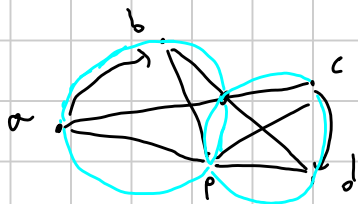


CHI È L'INTERSEZIONE DELLE TANGENTI IN b, c ALL'UNITARIA?

È L'INVERSO DEL PUNTO MENO DI BC , CIOÈ $\frac{b+c}{2}$

$$t = \frac{1}{\left(\frac{b+c}{2} \right)} = \frac{2}{b+c} = \frac{2}{1/3 + 1/c} = \frac{2bc}{b+c}$$

CENTRO DI ROTAZIONE



a, b, c, d , vogliamo trovare p centro della rotazione che manda $a \rightarrow b, c \rightarrow d$

p funziona se esiste un $\alpha \in \mathbb{C}$ t.c. $b-p = \alpha(a-p)$, e $d-p = \alpha(c-p)$

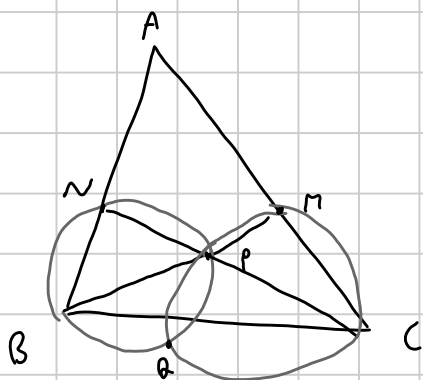
ELIMINIAMO α : $\frac{b-p}{a-p} = \alpha = \frac{d-p}{c-p} \Rightarrow \frac{b-p}{a-p} = \frac{d-p}{c-p}$

$\Rightarrow bc - bp - cp + p^2 = ad - ap - dp + p^2 \Rightarrow p = \frac{ad-bc}{a+d-b-c}$

OSS: p è anche il centro della rotazione che manda $a \rightarrow c, b \rightarrow d$

OSS: ESISTE p SOLO SE $a+d \neq b+c$, cioè $abcd$ non è un parallelogramma

ESEMPIO: BMO 2009



$MN \parallel BC \quad p = BN \cap CM$

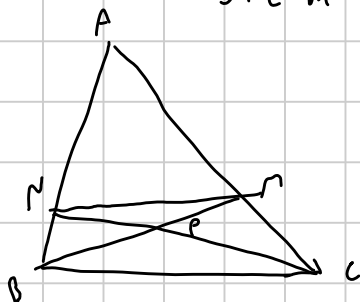
$Q = (BNP) \cap (CMP)$

TESI: $\angle QAB = \angle QAC$

ORMAI IN $A \Rightarrow$ ESISTE $\lambda \in \mathbb{R}$ t.c.
 $m = \lambda c, n = \lambda b$

$q =$ CENTRO DELLA ROTAZIONE CHE MANDA $B \rightarrow N, M \rightarrow C$

$\Rightarrow q = \frac{bc-mn}{b+c-m-n} = \frac{bc-\lambda^2 bc}{(b+c)-\lambda(b+c)} = \frac{bc}{b+c} \cdot \frac{1-\lambda^2}{1-\lambda} = (1+\lambda) \frac{bc}{b+c}$



$MN \parallel BC \Rightarrow AP$ È LA MEDIANA

SE $X = AP \cap BC$, PER CEVA

$\frac{XB}{XC} \cdot \frac{MC}{MA} \cdot \frac{NA}{NB} = 1$, ma $\frac{MC}{MA} = \frac{NB}{NA}$ PER TAVOLE

$\Rightarrow 1 = \frac{XB}{XC} \cdot \frac{NB}{NA} \cdot \frac{NA}{NB} = \frac{XB}{XC}$

CI BASTA $\angle QAB = \angle CAX$.

$$\angle QAB = \text{ARG} \left(\frac{a-a}{b-a} \right) \stackrel{a=0}{=} \text{ARG} \frac{a}{b}$$

$$\angle CAX = \text{ARG} \left(\frac{c-a}{x-a} \right) \stackrel{a=0}{=} \text{ARG} \frac{c}{x}$$

$$\text{ARG} \frac{a}{b} = \text{ARG} \frac{c}{x} \Leftrightarrow \frac{a}{b} : \frac{c}{x} \in \mathbb{R}, \text{ MA } \frac{a}{b} \cdot \frac{x}{c} = \frac{1}{bc} \cdot (1+i) \frac{bc}{b+c} \cdot \frac{b+c}{2} = \frac{1+i}{2}$$

QUINDI ABBIAMO FINITO.

DIREZIONE: DETERMINANTI

$$\text{DET} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$$

$$\text{DET} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = aei + bfg + cdh - ceg - bdi - afh$$

PER LE MATRICI 2×2 , 3×3 , $\text{DET} = \text{PRODOTTI} \searrow - \text{PRODOTTI} \nearrow$

OCCHIO: DA 4×4 IN SU NON È VERO

SISTEMA DI EQUAZIONI LINEARI

$$\begin{cases} ax + by + cz = p \\ dx + ey + fz = q \\ gx + hy + iz = r \end{cases}$$

FATTO: IL SISTEMA AVERRE ESATTAMENTE UNA SOLUZIONE $\Leftrightarrow \text{DET} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \neq 0$

IN TAL CASO, LA SOLUZIONE È $x = \frac{\text{DET} \begin{pmatrix} p & b & c \\ q & e & f \\ r & h & i \end{pmatrix}}{D}$,

$$y = \frac{\text{DET} \begin{pmatrix} a & p & c \\ d & q & f \\ g & r & i \end{pmatrix}}{D}$$

$$z = \frac{\text{DET} \begin{pmatrix} a & b & p \\ d & e & q \\ g & h & r \end{pmatrix}}{D}$$

(REGOLA DI Cramer)

COSA SUCCEDERÀ SE $D=0$?
 $\swarrow$ NON CI SONO SOLUZIONI
 $\searrow$ CE NE È PIÙ DI UNA

APPLICAZIONE AI COMPLESSI

a, b, c, d , vogliamo trovare $ab \cap cd = p$.

$$\begin{cases} \frac{p-a}{p-b} = \frac{\bar{p}-\bar{a}}{\bar{p}-\bar{b}} \\ \frac{p-c}{p-d} = \frac{\bar{p}-\bar{c}}{\bar{p}-\bar{d}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (p-a)(\bar{p}-\bar{b}) = (p-b)(\bar{p}-\bar{a}) \\ (p-c)(\bar{p}-\bar{d}) = (p-d)(\bar{p}-\bar{c}) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \underline{p}(\bar{a}-\bar{b}) + \bar{p}(b-a) = \underline{\bar{a}b - a\bar{b}} \\ \underline{p}(\bar{c}-\bar{d}) + \bar{p}(d-c) = \underline{\bar{c}d - c\bar{d}} \end{cases} \quad \text{SISTEMA LINEARE IN } p, \bar{p}$$

$$p = \frac{\det \begin{pmatrix} \bar{a}b - a\bar{b} & b-a \\ \bar{c}d - c\bar{d} & d-c \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} \bar{a}-\bar{b} & b-a \\ \bar{c}-\bar{d} & d-c \end{pmatrix}} = \frac{(\bar{a}b - a\bar{b})(d-c) - (\bar{c}d - c\bar{d})(b-a)}{(\bar{a}-\bar{b})(d-c) - (\bar{c}-\bar{d})(b-a)}$$

SE UN PO' TRA a, b, c, d SONO REALI/IMMAGINARI/ SUOI UNITARI, I CONIUGATI SONO UN PO' PIU' LEGGERI

ESERCIZIO: SE $|a|=|b|=|c|=|d|$ DIVENTA $p = \frac{ab(c+d) - cd(a+b)}{ab - cd}$

CIRCOLENTRO IN COMPLESSI

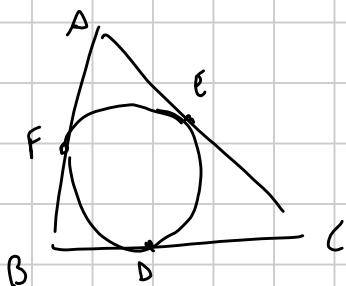
p CIRCOLENTRO DI $a, b, c \Rightarrow \exists R \in \mathbb{R} \text{ T.C. } |p-a|=R, |p-b|=R, |p-c|=R$

$$\Leftrightarrow |p-a|^2 = R^2, \dots \quad R^2 = |p-a|^2 = (p-a)(\bar{p}-\bar{a}) = p\bar{p} - a\bar{p} - \bar{a}p + a\bar{a} = |p|^2 + |a|^2 - a\bar{p} - \bar{a}p$$

$$\begin{cases} \bar{a}p + a\bar{p} + \underline{R^2 - |p|^2} = |a|^2 = a\bar{a} \\ \bar{b}p + b\bar{p} + \underline{R^2 - |p|^2} = b\bar{b} \\ \bar{c}p + c\bar{p} + \underline{R^2 - |p|^2} = c\bar{c} \end{cases} \quad \text{SISTEMA LINEARE IN } p, \bar{p}, R^2 - |p|^2$$

$$\Rightarrow p = \frac{\det \begin{pmatrix} a\bar{a} & a & 1 \\ b\bar{b} & b & 1 \\ c\bar{c} & c & 1 \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} \bar{a} & a & 1 \\ \bar{b} & b & 1 \\ \bar{c} & c & 1 \end{pmatrix}}$$

PER CASA: IMO 4/2024, PRENDENDO L'INSCRITTA COME UNITARIA, E
SOLVENDO TUTTO IN TERMINI DI d, e, f , DOVE d, e, f SONO I PUNTI DI
TANGENZA DELL'INSCRITTA CON I LATI



$$a = \frac{2rf}{e+f}, \quad b = \frac{2df}{d+f}, \quad c = \frac{2de}{d+e}, \dots$$

COORDINATE BARICENTRICHE

TRIANGOLO DI RIFERIMENTO ABC FISSATO

FATTO: PER OGNI P , ESISTONO E SONO UNICI $x, y, z \in \mathbb{R}$ TALI CHE

$$x+y+z=1, \quad \vec{P} = x\vec{A} + y\vec{B} + z\vec{C}, \quad \text{CHIAMAMO } (x, y, z) \text{ LE COORDINATE}$$

BARICENTRICHE ESATTE DI P

COORDINATE BARICENTRICHE: $[x, y, z]$ oppure $[x:y:z]$, DOVE

$$[x:y:z] = [\lambda x : \lambda y : \lambda z] \quad \forall \lambda \neq 0.$$

$$\text{ESEMPIO: } [1:1:1] = [10:10:10] = \left[\frac{1}{3} : \frac{1}{3} : \frac{1}{3}\right]$$

PER OGNI $[x:y:z]$ CON $x+y+z \neq 0$, ASSOCIAMO A $[x:y:z]$ IL PUNTO

$$\frac{x}{x+y+z} \vec{A} + \frac{y}{x+y+z} \vec{B} + \frac{z}{x+y+z} \vec{C}. \quad \text{DICIAMO CHE LE COORDINATE BARICENTRICHE DI}$$

P , CHE HA COORDINATE ESATTE (x_P, y_P, z_P) , SONO $[\lambda x_P : \lambda y_P : \lambda z_P]$

$[1:1:1] \rightarrow \frac{1}{3} \vec{A} + \frac{1}{3} \vec{B} + \frac{1}{3} \vec{C}$, È IL BARICENTRO

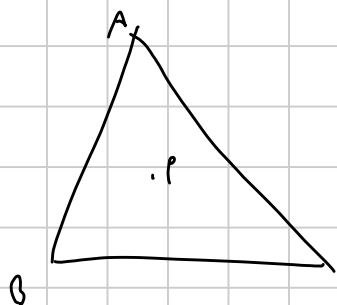
$[10:10:10] \rightarrow \frac{10}{30} \vec{A} + \frac{10}{30} \vec{B} + \frac{10}{30} \vec{C}$, È PURE LUI IL BARICENTRO

I VERTICI DI ABC SONO: A HA COME COORDINATE ESATTE $(1,0,0)$, QUINDI HA COME COORDINATE BARICENTRICHE $[1:0:0]$, OPPURE $[\lambda:0:0]$ PER $\lambda \neq 0$. ANALOGAMENTE, $B = [0:1:0]$, $C = [0:0:1]$, PUNTO MEDIO DI BC $= \frac{1}{2} \vec{B} + \frac{1}{2} \vec{C} \leftrightarrow [0:\frac{1}{2}:\frac{1}{2}] = [0:1:1]$

FATTO: SE P HA COORDINATE ESATTE (x,y,z) , ALLORA

$$x = \frac{\text{AREA PBC}}{\text{AREA ABC}}, \quad y = \frac{\text{AREA APC}}{\text{AREA ABC}}, \quad z = \frac{\text{AREA ABP}}{\text{AREA ABC}} \quad (\text{AREE ORIENTATE})$$

L'AREA DI UN TRIANGOLO È POSITIVA SE I VERTICI SONO SORTI IN SENSO ANTIORARIO, NEGATIVA SE SONO IN SENSO ORARIO

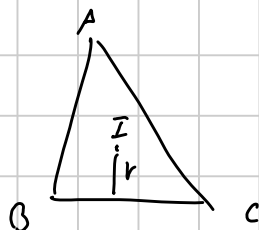


SE P È DENTRO ABC, PBC, APC, ABP HANNO AREA POSITIVA $\Rightarrow (x,y,z)$ SONO POSITIVI

SE P FOSSE OPPOSTO A BC RISPETTO AD A, AREA DI PBC SAREBBE NEGATIVA

$$P \leftrightarrow \left(\frac{\text{AREA PBC}}{\text{AREA ABC}} : \frac{\text{AREA APC}}{\text{AREA ABC}} : \frac{\text{AREA ABP}}{\text{AREA ABC}} \right) = \left(\text{AREA ABC} : \text{AREA APC} : \frac{\text{AREA ABP}}{\text{AREA ABC}} \right)$$

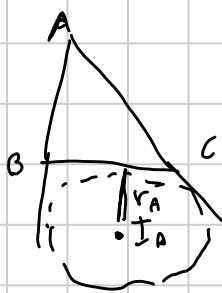
ESEMPIO: P = INCENTRO



$$\text{AREA IBC} = \frac{1}{2} a \cdot r$$

$$\Rightarrow I \leftrightarrow \left[\frac{1}{2} ar : \frac{1}{2} br : \frac{1}{2} cr \right] = [a:b:c]$$

A-EXCENTRO:



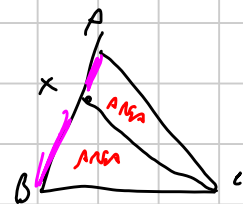
$$\text{AREA I}_A \text{BC} = -\frac{1}{2} a r_A$$

$$\Rightarrow I_A \leftrightarrow [-a:b:c]$$

ESERCIZIO: $H = \left[\frac{a}{\cos \alpha} : \frac{b}{\cos \beta} : \frac{c}{\cos \gamma} \right] = [\tan \alpha : \tan \beta : \tan \gamma]$

$O = [\sin 2\alpha : \sin 2\beta : \sin 2\gamma]$

$[p:q:0] = \text{punto } \frac{p}{p+q} \vec{A} + \frac{q}{p+q} \vec{B}$, CHE È IL PUNTO X SU AB CON $\frac{AX}{XB} = \frac{q}{p}$



RETTE: $lx + my + nz = 0$ PER QUALCUNE l, m, n NON TUTTE NULL.

ES: LATO BC, PASSA PER $[0:1:0]$, $[0:0:1] \Rightarrow x=0$

ES: PUNTO $[p:q:r] = P$, LA CEVIANA AP È $ry - qz = 0$

INTERSECA BC, CIOÈ $x=0$, IN $[0:q:r]$

DUE RETTE $l_1x + m_1y + n_1z = 0$, $l_2x + m_2y + n_2z = 0$, L'INTERSEZIONE SARÀ

$$\left[\text{DET} \begin{pmatrix} m_1 & n_1 \\ m_2 & n_2 \end{pmatrix} : -\text{DET} \begin{pmatrix} l_1 & n_1 \\ l_2 & n_2 \end{pmatrix} : \text{DET} \begin{pmatrix} l_1 & m_1 \\ l_2 & m_2 \end{pmatrix} \right]$$

ESERCIZIO: DIMOSTRARE Ceva E MENELAO

QUANDO TRE RETTE CONCORRONO?

$\Leftrightarrow$ IL SISTEMA
$$\begin{cases} l_1x + m_1y + n_1z = 0 \\ l_2x + m_2y + n_2z = 0 \\ l_3x + m_3y + n_3z = 0 \end{cases}$$

HA UNA SOLUZIONE (p, q, r)
DIVERSA DA $(0, 0, 0)$

$\Leftrightarrow \text{DET} \begin{pmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 \end{pmatrix} = 0$

SE ABBIAMO TRE PUNTI $[p_1:q_1:r_1]$, $[p_2:q_2:r_2]$, $[p_3:q_3:r_3]$, SONO ALLINEATI

$\Leftrightarrow \exists l, m, n$ NON TUTTE NULL CON
$$\begin{cases} lp_1 + mq_1 + nr_1 = 0 \\ lp_2 + mq_2 + nr_2 = 0 \\ lp_3 + mq_3 + nr_3 = 0 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \text{DET} \begin{pmatrix} p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \\ p_3 & q_3 & r_3 \end{pmatrix} = 0$

CIRCONFERENZA: $-a^2yz - b^2xz - c^2xy + (x+y+z)(ux+vy+wz) = 0$

OSS: È OMogenea, quindi possiamo mettere dentro qualsiasi vettore di $[x:y:z]$

PER LE RETTE, l, m, n DANNO LA STESSA RETTA DI $\lambda l, \lambda m, \lambda n$

PER LE CIRCONFERENZE, $\lambda u, \lambda v, \lambda w$ NON DANNO LA STESSA DI u, v, w .

ESEMPIO: CIRCONFERENZA AD ABC

PASSA PER $A = [1:0:0] \Rightarrow u=0$, SIMILMENTE $v=0, w=0$
 $\Rightarrow$ HA EQUAZIONE $-a^2yz - b^2xz - c^2xy = 0$

IN GENERALE, IL PIACCIONO CIRCONFERENZE CHE PASSANO PER ALMENO UN VERTICE

$x+y+z=0$ È LA RETTA ALL'INFINITO: SE $lx+my+nz=0$, IL SUO PUNTO ALL'∞ È L'INTERSEZIONE CON $x+y+z=0$, CIOÈ $[m-n:n-l:l-m]$

ES: LA RETTA PER A PARALLELA A BC È LA RETTA $A\infty_{BC}$
 $A = [1:0:0]$ $BC = \{x=0\} \Rightarrow \infty_{BC} = [0:-1:1]$

LA RETTA PER A, ∞_{BC} È $y+z=0$

DUE RETTE $l_1x+m_1y+n_1z=0$, $l_2x+m_2y+n_2z=0$ SONO PARALLELE

$$\Leftrightarrow \text{DET} \begin{pmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 0$$

PROBLEMA PER USA: BALKAN 2017/2