

S26M Proiettiva N:K.

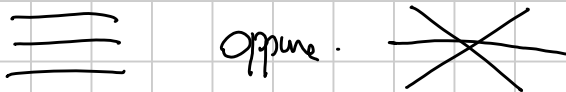
Note Title

04/09/2026

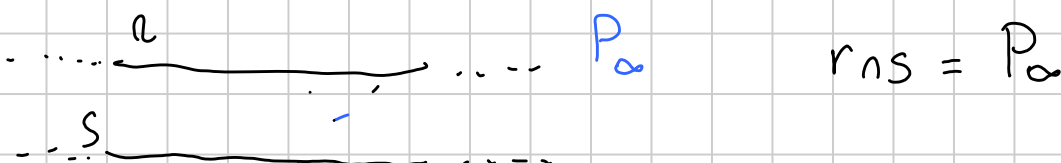
Problemi di configurazione



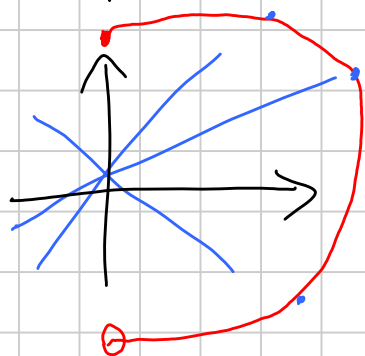
[...] Tesi:



Rette dello proiettivo: retta $\cup$ {punto all'infinito}

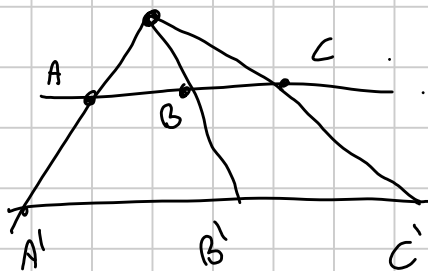
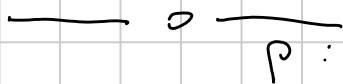


Piano proiettivo = piano Euclideo $\cup$ {punti delle rette all' ∞ }



corrispondenti a angoli θ

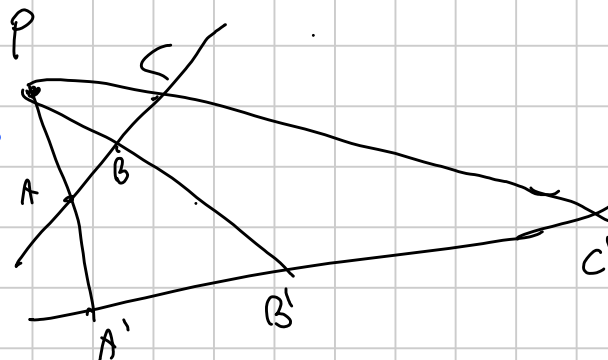
$$0 \leq \theta < 180^\circ$$



$$\frac{AB}{AC} = \frac{A'B'}{A'C'}$$

se le rette sono parallele

per i rapporti
di segmenti.
Non si conservano



Birapporto

(Cross ratio)



Il birapporto di A, B, C, D è

$$(A, B, C, D) = \frac{AC \cdot BD}{BC \cdot AD}$$

$$= \frac{\frac{AC}{BC}}{\frac{AD}{BD}}$$

I segmenti sono orientati $AB = -BA$

$$(A, B; C, D) = K$$

$$(B, A; C, D) = \frac{BC \cdot AD}{AC \cdot BD} = \frac{1}{K}$$

$$(A, C; B, D) = \frac{AB \cdot CD}{CB \cdot AD} = \frac{(AC+CB) \cdot (CB+BD)}{CB \cdot AD} = \frac{AC \cdot BD + CB \cdot \overbrace{(AC+CB+BD)}^{AD}}{CB \cdot AD}$$

$$= 1 - K$$

Es x caso: Cosa succede per tutte le $4! = 24$ permutazioni?

Proprieta 1 Siano A, B, C su una retta r , Prendiamo D_1 e D_2 su r

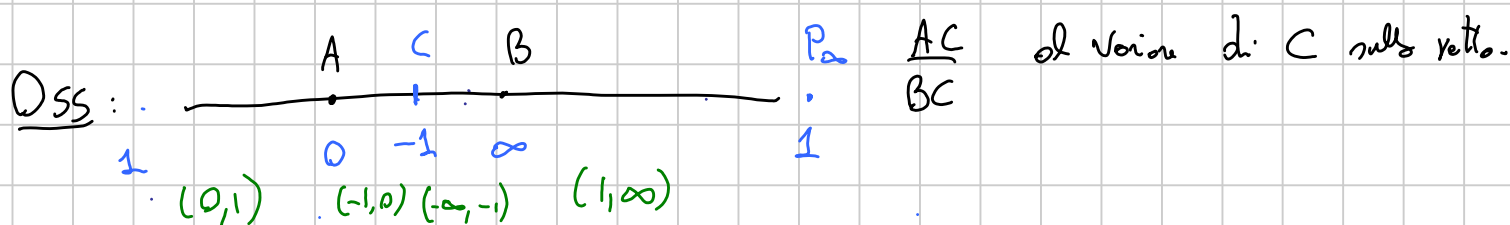
$$(A, B; C, D_1) = (A, B; C, D_2) \text{ sse } D_1 \equiv D_2$$

DIM: $(A, B; C, D_1) = \frac{AC \cdot BD_1}{BC \cdot AD_1}$ $AD_1 = \kappa_1$ $BD_1 = BA + \kappa_1$

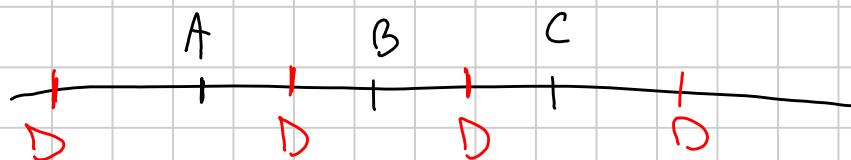
$(A, B; C, D_2) = \frac{AC \cdot BD_2}{BC \cdot AD_2}$ $AD_2 = \kappa_2$ $BD_2 = BA + \kappa_2$

$$(A, B; C, D_1) = (A, B; C, D_2) \xLeftrightarrow{\text{sse}} \frac{BD_1}{AD_1} = \frac{BD_2}{AD_2} \Leftrightarrow \frac{BA + \kappa_1}{\kappa_1} = \frac{BA + \kappa_2}{\kappa_2}$$

$$\Leftrightarrow 1 + \frac{BA}{\kappa_1} = 1 + \frac{BA}{\kappa_2} \Leftrightarrow \kappa_1 = \kappa_2 \quad \text{CVD}$$



Esercizio Dati A, B, C su una retta r , stabilire quanto vale $(A, B; C, D)$ al variare di D sulla retta



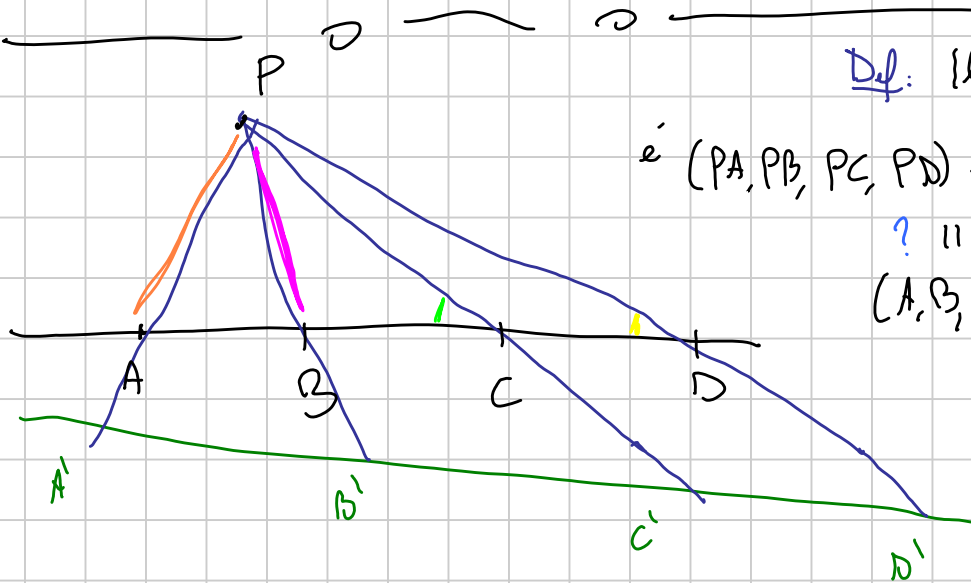
Risposta: per assumere tutti i valori in $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$

Casi degeneri

$$(A, B, C, D) = \frac{AC \cdot BD}{BC \cdot AD}$$

- $AA = 0$

- $\frac{x}{0} = \infty$ se $x \neq 0$



Def: Il fascio di rette passanti per P

$$(PA, PB, PC, PD) = \frac{\sin \widehat{APC} \cdot \sin \widehat{BPD}}{\sin \widehat{BPC} \cdot \sin \widehat{APD}}$$

$$(A, B, C, D) \stackrel{?}{=} (A', B', C', D')$$

Prop: $(PA, PB, PC, PD) = (A, B, C, D)$

Dim: usiamo tre seni su

$$\triangle PAC \quad \frac{\sin \widehat{APC}}{AC} = \frac{\sin \widehat{ACP}}{PA}$$

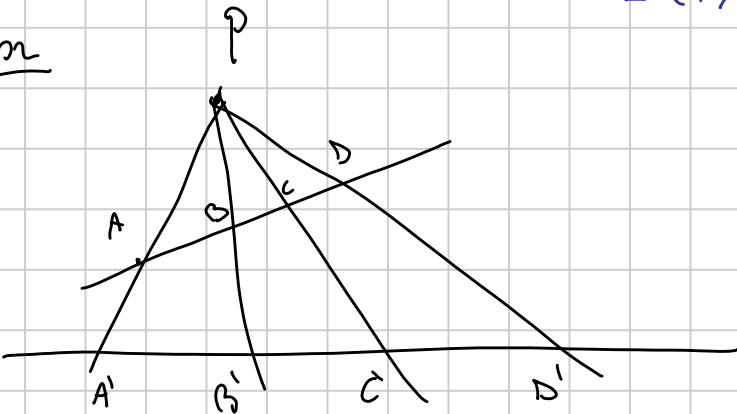
$$\triangle PAD \quad \frac{\sin \widehat{APD}}{AD} = \frac{\sin \widehat{ADP}}{PA}$$

$$\triangle PBD \quad \frac{\sin \widehat{BPD}}{BD} = \frac{\sin \widehat{BDP}}{BP}$$

$$\triangle PBC \quad \frac{\sin \widehat{BPC}}{BC} = \frac{\sin \widehat{BCP}}{BP}$$

$$(PA, PB, PC, PD) = \frac{\sin \widehat{APC} \cdot \sin \widehat{BPD}}{\sin \widehat{BPC} \cdot \sin \widehat{APD}} = \frac{AC \cdot BD}{BC \cdot AD} \cdot \frac{\sin \widehat{ACP} \cdot \sin \widehat{ADP} \cdot PA \cdot BP}{\sin \widehat{ACP} \cdot \sin \widehat{ADP} \cdot PA \cdot BP} = (A, B, C, D)$$

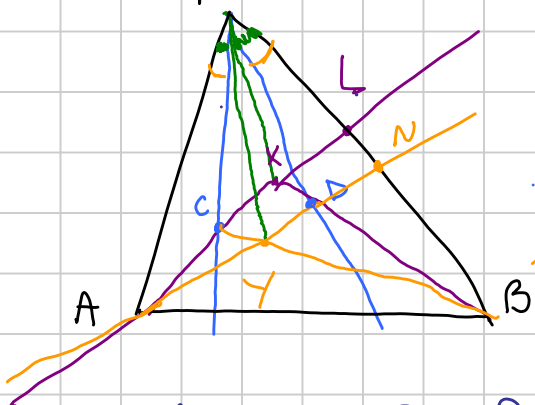
Cor



$$(A, B, C, D) = (A', B', C', D')$$

□

Es. Isogonality Lemma.



$\triangle PAB$, PC e PD rette isogonali in P .

$$X = AC \cap BD$$

$$Y = AD \cap BC$$

Tesi: PX e PY coniugate isogonali

$$\underline{DM} \quad (PA, PB, PC, PX) \stackrel{?}{=} (\underline{PB}, \underline{PA}, \underline{PD}, \underline{PY})$$

angolo da P su AX

angolo da B
su AD

angolo da P

$$(PA, PB, PC, PX) = (A, L, C, X) = (A, N, Y, D) = (\underline{PA}, \underline{PB}, \underline{PY}, \underline{PD})$$

$$L = BP \cap AC$$

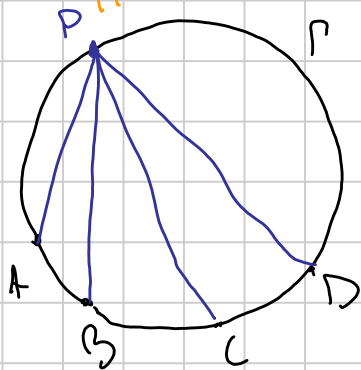
$$N = BP \cap AD$$

Da per simmetria rispetto alla bisettrice di $\widehat{APB}$, PX deve essere in PY

$\Rightarrow PX$ e PY sono coniugate isogonali

CVD

Bisappunto su Circonferenze



A, B, C, D punti su una circonferenza Γ

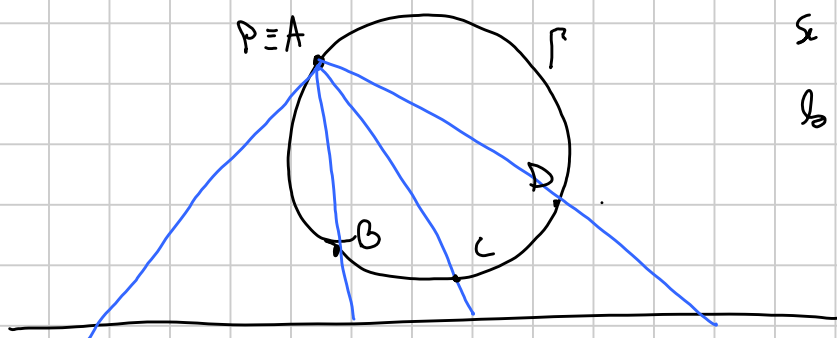
$$P \in \Gamma \text{ e considero } (PA, PB, PC, PD) = \frac{\sin \widehat{APC} \cdot \sin \widehat{BPD}}{\sin \widehat{BPC} \cdot \sin \widehat{APD}}$$

Il bisappunto di (A, B, C, D) su Γ
è ben definito ed è uguale a

(PA, PB, PC, PD) per un qualsiasi scelto di $P \in \Gamma$

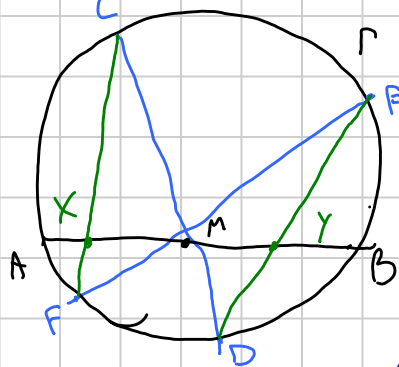
non dipende da quale P
scelgo su Γ

Oss: P può coincidere con uno dei punti tra $(A, B, C, D) \in \Gamma$



Se $A \equiv P$, la retta PA è
la tangente a Γ in P

Es Teorema della Farfalla



O centro, AB corda, M pt medio di AB
 CD, EF due corde passanti per M .
 $X = CF \cap AB$ $Y = ED \cap AB$

Tesi: $MX = MY$

DIM $(A, X, M, B) \xrightarrow[\text{Puntello } C]{\text{su } P} (A, F, D, B) \xrightarrow[\text{su } AB]{\text{Puntello } E} (A, M, Y, B)$

posso fare simmetria rispetto al punto medio M , la simmetria conserva il birapporto

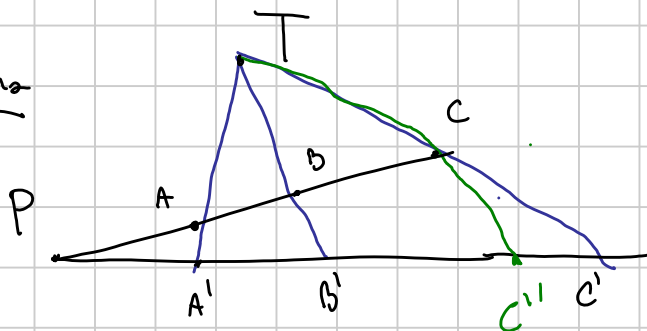
$$(A, M, Y, B) \stackrel{\text{Sym}}{=} (B, M, Y', A) = (Y', A, B, M) = (A, Y', B, M)$$

(Es permutazioni)

$$\rightarrow Y' = X$$

$C \vee D$

Lemma



$$(P, A, B, C) = (P, A', B', C')$$

$\Updownarrow$ sse

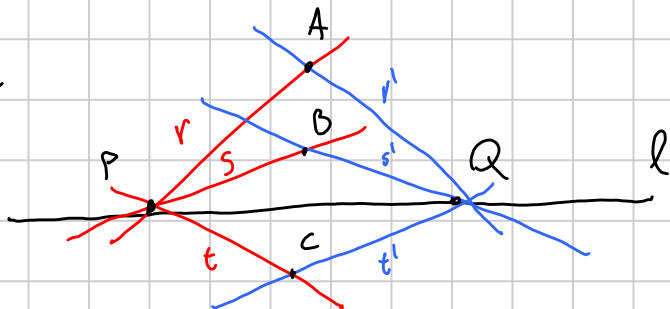
AA', BB', CC' concorrenti in un punto T

DIM $\Updownarrow$ OK. posso proiettare il birapporto da T

$$\Downarrow T = AA' \cap BB' \quad C'' = TC \cap \overline{PA'B'C'} \quad (\text{phantom point})$$

$$(P, A', B', C') = (P, A, B, C) \xrightarrow[\text{proiettando da } T]{=} (P, A', B', C'') \Rightarrow C' = C''$$

Lemma duale



$$(l, r; s, t) = (l, r'; s', t')$$

$\Updownarrow$

A, B, C allineati

Es x ssa: dimostrare il lemma duale. (usando i birapporti)

Teorema di Desargues

$$Y = AC \cap A'C'$$

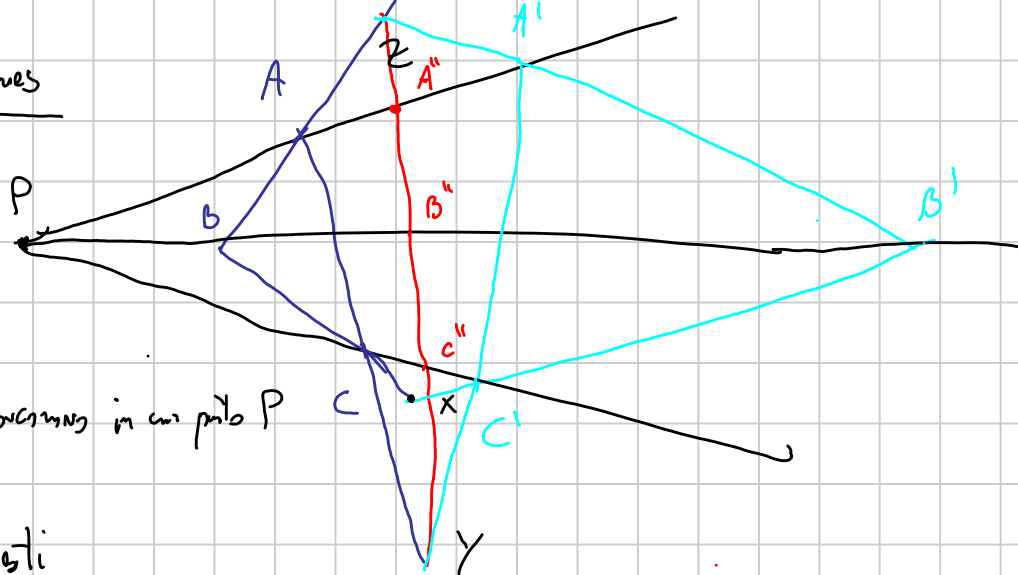
$$Z = AB \cap A'B'$$

$$X = BC \cap B'C'$$

Tesi: AA', BB', CC' concorrenti in un punto P

$\iff$ sse

X, Y, Z sono allineati



DM Concidente $\Rightarrow$ allineamento

Punti Y, Z e vorremmo mostrare $X \in YZ$

Per il lemma $(P, A; A', A'') = (P, B; B', B'')$

proiettando da Z

$(P, A; A', A'') = (P, C; C', C'')$

proiettando da Y

dunque $(P, B; B', B'') = (P, C; C', C'')$,

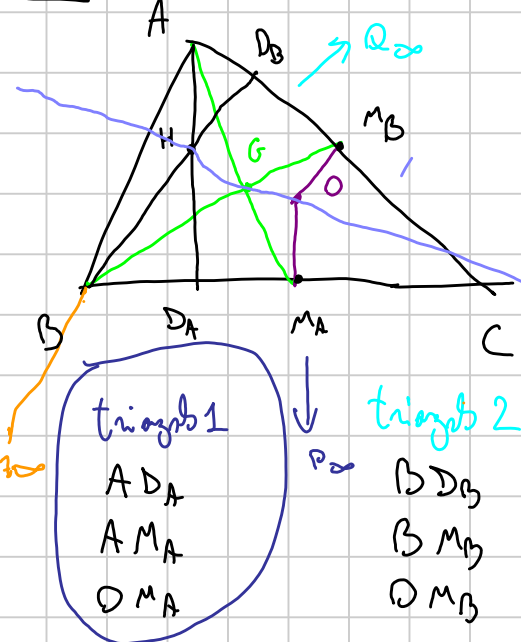
per la freccia opposta del lemma, $BC, B'C', B''C''$ concorrenti

$BC \cap B'C' = X$ $B''C'' = YZ \rightarrow XYZ$ allineati

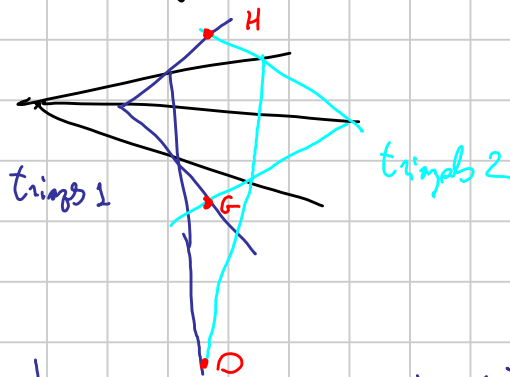
CVD

Allineamento $\Rightarrow$ concidente: es x cosa

Es retta di Eulero



Cerchiamo un Desargues in questa configurazione



$\Rightarrow P_O =$ punto allineato dell'alt. da A

triangolo 1 = $AM_A P_O$

triangolo 2 = $BM_B Q_O$

Per Desargues in $AM_A P_O$ $BM_B Q_O$, H, G, O allineati

Save AB
 $MA MB$ Concetto
 $PA Q_{\infty}$

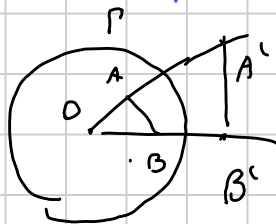
$AB // MA MB$ $\Rightarrow$ Save $PA, Q_{\infty}, Z_{\infty}$ sono allineati **sulla retta all'infinito**

$\rightarrow$ la ipotesi di Desargues

QSS: Abbiamo visto che i birapporti si conservano per proiezione
 si conservano per isometrie (incluse simmetrie)
 si conservano per inversione!

Es x Cosa: dimostrando!

Hint:



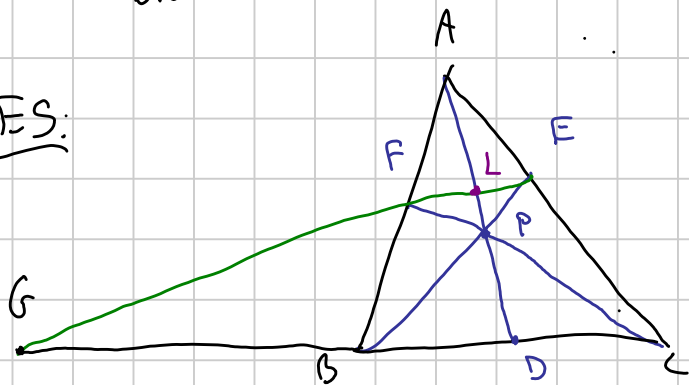
Qualche $A'B'$
 in funzione di AB (e altre
 quantità...)?

Quaterne Armoniche

Def (A, B, C, D) su una retta si dicono una quaterna armonica se $(A, B, C, D) = -1$

QSS: (A, B, C, D) è armonica $\Leftrightarrow (A, B, C, D) = (B, A, C, D)$
distinti

ES:



$ABC \triangle$,
 AD, BE, CF ceviane concorrenti in P
 $G = EF \cap BC$

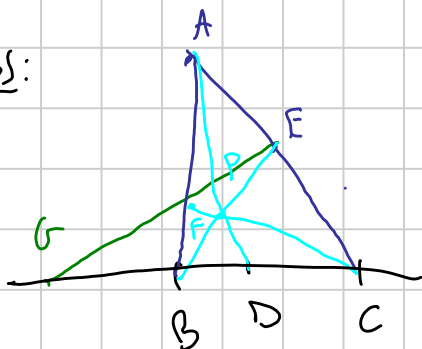
Tesi: $(B, C; D, G) = -1$

DM $(B, C; D, G) \stackrel{\text{Prop. 1. A su EF}}{=} (F, E; L, G) \stackrel{\text{Prop. 1. B su BC}}{=} (C, B; D, G) = \frac{1}{(B, C; D, G)}$

$L = AD \cap EF$

$\rightarrow (B, C; D, G)^2 = 1 \Rightarrow (B, C; D, G) = \pm 1$ ma non punti distinti
 $\Rightarrow (B, C; D, G) = -1$ CVD

QSS:



B, C, D fissi su una retta

A a caso E a caso su AC

costruisi univocamente P, F

ottengo che G è sempre lo stesso, il punto armonico di B, C, D .

Dim alternativa Pappo: Ceva + Menelao

Segmenti orientati, come al solito!

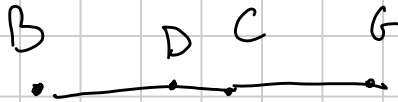
Ceva: $\frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB} = 1$

Menelao: $\frac{BG}{GC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB} = -1$

$\Rightarrow \frac{BD}{DC} \cdot \frac{GC}{BG} = -1$

$\frac{BD \cdot GC}{BG \cdot CD} = (B, C; D, G)$

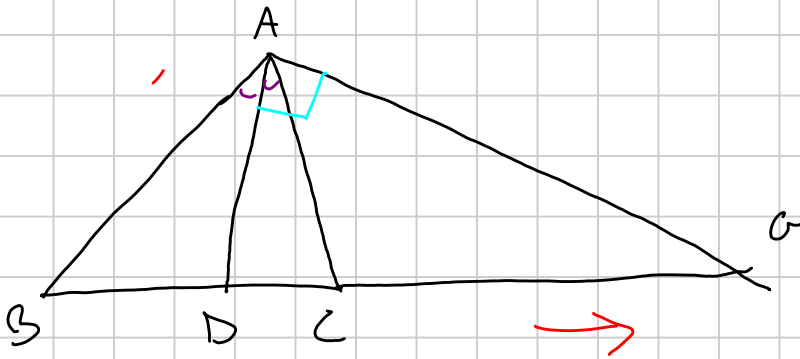
Struttura di un quaterno armonico $(B, C; D, G)$



$\frac{BD}{DC} > 0$

$\frac{BG}{GC} < 0$

Fes



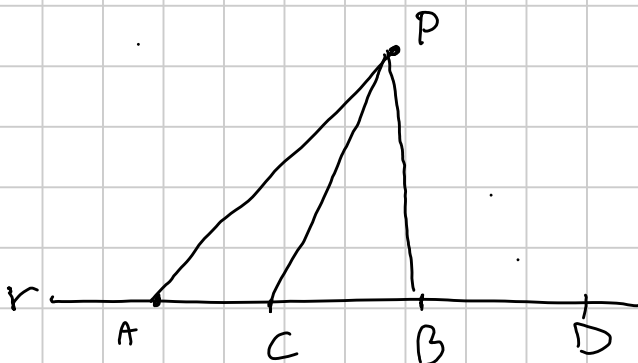
$\triangle ABC$, AD bisettrice interna, AG bisettrice esterna.

per le bisettrici $\frac{|BD|}{|DC|} = \frac{|AB|}{|AC|} = \frac{|BG|}{|GC|}$

Considerando i segni: $\begin{matrix} BD > 0 \\ DC > 0 \\ BG > 0 \\ GC < 0 \end{matrix}$

otteniamo che $(B, C; D, G) = -1$

Prop. Caratterizzazione paghi 2 punti 3 di un quaterno armonico.



A, B, C, D punti su una retta r

P punto esterno

Due delle seguenti proprietà implicano la terza.

1) $(A, B; C, D) = -1$

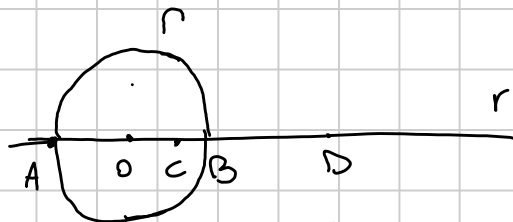
2) PC biseca $\angle APB$

3) PC e PD sono perpendicolari

Prop: Altre caratterizzazioni di quaterne Armoniche

A, B, C, D su Γ

Γ cerchio di diametro AB , centro O



Le seguenti cose sono equivalenti:

1) $(A, B, C, D) = -1$

2) C e D inversi rispetto Γ cioè $OC \cdot OD = OA^2 = OB^2$

3) $DB \cdot DA = DC \cdot DO$

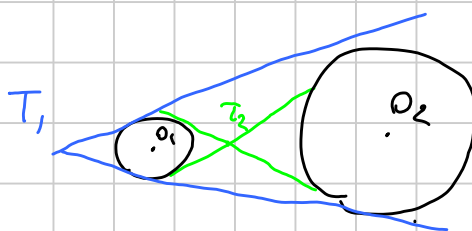
4) $\frac{2}{AB} = \frac{1}{AC} + \frac{1}{AD}$

5) $\frac{OC}{OD} = \left(\frac{AC}{AD}\right)^2 = \left(\frac{BC}{BD}\right)^2$

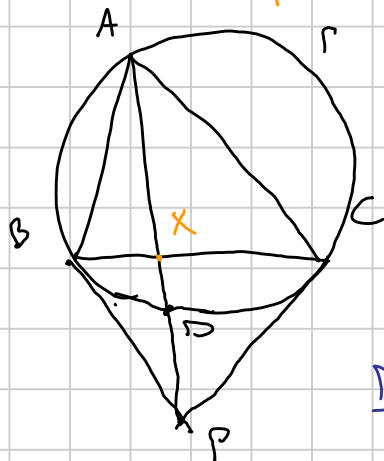
le più importanti

Altro esempo di quaterna Armonica

$(O_1, O_2, T_1, T_2) = -1$



Pirella una quaterna armonica su una circonferenza.



t_2 in B e in C e Γ si intersecano in P

$D = AP \cap \Gamma$

(A, D, B, C) è un quadrilatero armonico.

DIM: $(A, D, B, C) \stackrel{B \in AP}{=} (A, D, P, X) \stackrel{P \in BC}{=} (A, D, C, B)$

$\rightarrow$ Necessariamente $(A, D, B, C) = -1$.

Prop: Caratterizzazione di un quadrilatero armonico

Siano A, B, C, D punti su circonferenza Γ . Sono equivalenti:

1) $(A, D, B, C) = -1$

2) $AB \cdot CD = BD \cdot AC$

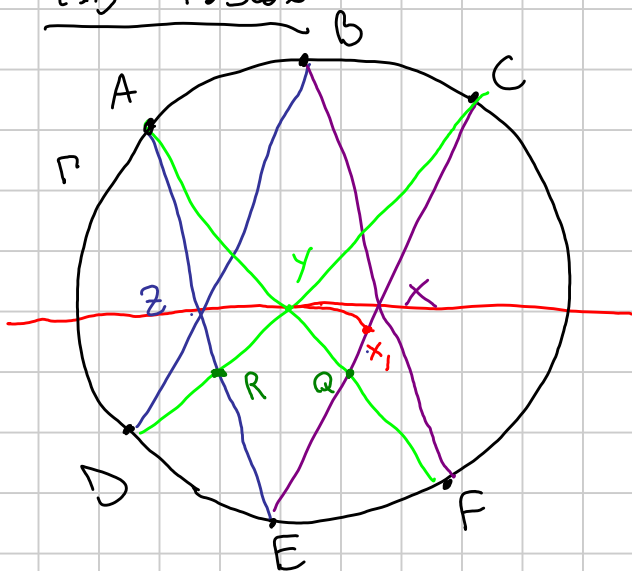
3) tangente in B , tangente in C , e AD concorrenti

3b) tangente in A , tangente in D e BC concorrenti

4) AD è simmediana di $\triangle ABC$

- 5) Chiamato M il punto medio di BC , le rette MA e MD sono simmetriche rispetto a BC
- 6) Bisettrici di $\widehat{BAC}$ e di $\widehat{BDC}$ si intersecano su BC
- 7) $\frac{AB^2}{DB^2} = \frac{MB}{MD}$ (+ configurazioni cicliche per 3), 4), 5), 6), 7))

Teo Pascal



A, B, C, D, E, F punti su Γ

$$Z = AC \cap BE$$

$$X = BD \cap CE$$

$$Y = AF \cap CD$$

Teo: XYZ sono allineati

DIM. Uso ZY . Sia $X_1 = ZY \cap CE$

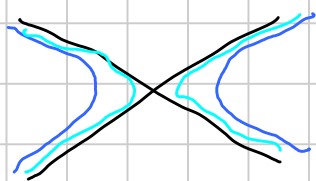
$$(C, X_1, Q, E) \stackrel{\substack{\text{Punto } Q \\ \text{su } AE}}{=} (R, Z, A, E) \stackrel{\substack{\text{Punto } R \\ \text{su } BD}}{=} (C, B, A, E) \stackrel{\substack{\text{Punto } B \\ \text{su } EC}}{=} (C, X, Q, E)$$

$Q = CE \cap AF$ $R = CY \cap AE$

$$(C, X_1, Q, E) = (C, X, Q, E) \rightarrow X \equiv X_1 \text{ line.}$$

Teo Pascal base: A, B, C, D, E, F stanno su una circonferenza $\Gamma \Rightarrow X, Y, Z$ allineati

True secret Pascal A, B, C, D, E, F stanno sulla stessa conica $\Leftrightarrow$ " "



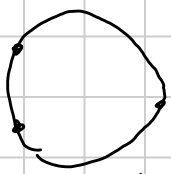
- cerchio
- ellisse
- parabola
- iperbole

$\hookrightarrow$ sss degenera: due rette che si intersecano *

* Teorema di Pappo: A, B, C, D, E, F su due rette $X \Rightarrow$ Tesi:

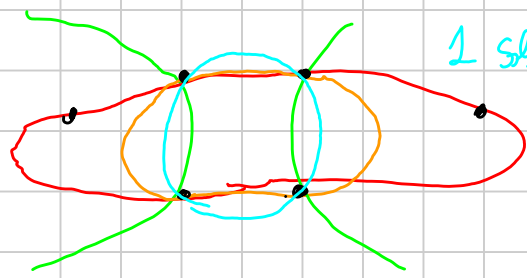
Cosa Vero: Se XYZ allineati $\Rightarrow A, B, C, D, E, F$ stanno sulla stessa conica

Cosa FALSA: Se XYZ allineati $\Rightarrow A, B, C, D, E, F$ sono conciclici NO
NON USATELO PER DIMOSTRARE CIRCOSCRIZIONE



pr 3 pt $\rightarrow$ 1 sola circonferenza

Servono 5 pt pr determinare un conico.

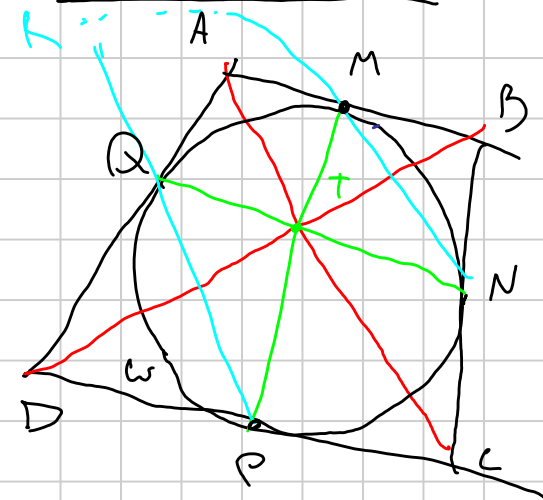


1 sb conico

ma tantissime coniche!

$\triangle$ Achtung pr Pascal al contrario

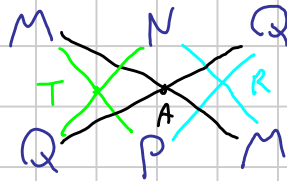
Teorema Newton



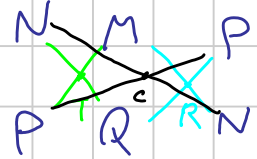
ABCD quadrilatero inscritto
M, N, P, Q pt tangenza

MP NQ BD AC concorrenti

Dim: Pascal!



Secondo Pascal su C



MM = retta tangente a ω in

Per Pascal A, T, R allineati

$\rightarrow$ Facio Pascal Analogo su C.

Per il 2° Pascal C, T, R allineati

$MM \cap QQ = A$

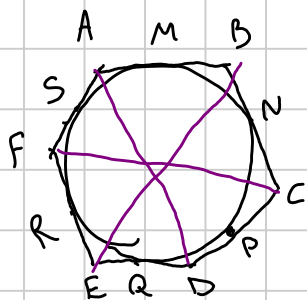
$T = MP \cap NQ$

$R = MN \cap PQ$

per analogia & l'oss. (A, T, C allineati) segue $C \in \overline{ATR}$

$\rightarrow$ A, T, C allineati:
similmente B, T, D allineati.

Teo Brianchon (duale di Pascal)

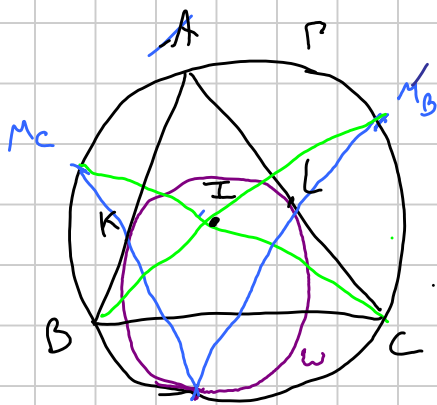


Tesi: ~~MQ, NR, SP concorrenti~~

Typo

AD, BE, CF concorrenti

Es. applicazione di Pascal.

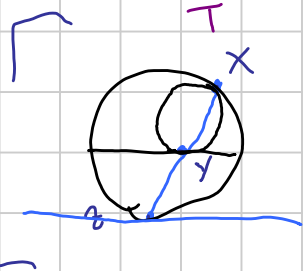


U toge AB in K AC in L BC in T

Sia I l'incen

Tesi: K, I, L sono allineati

Dim:



Death Star Lemma (lemma di Archimede in ex-URSS)

X, Y, Z allineati dove Z pt tangente all'arco

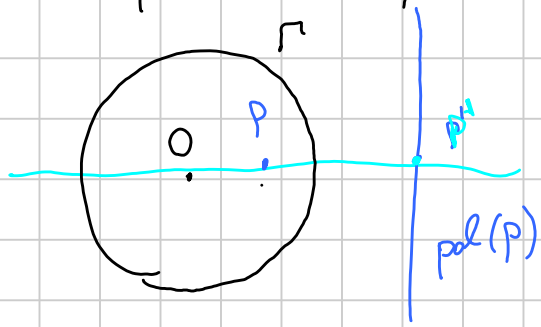
Per il lemma, T, K, M_c e $TL M_b$ sono allineati.

Anche $C M_c$ e $B M_b$ allineati (bisettrici)

Per Pascal su $M_c A M_b \rightarrow K, I, L$ allineati.
 $B T C$

Poli & Polari

In questa sezione, Γ è circonferenza di riferimento di centro O



P punto

$pol(P)$ è retta perpendicolare a OP passante per P'

P' è l'inverso di P in Γ

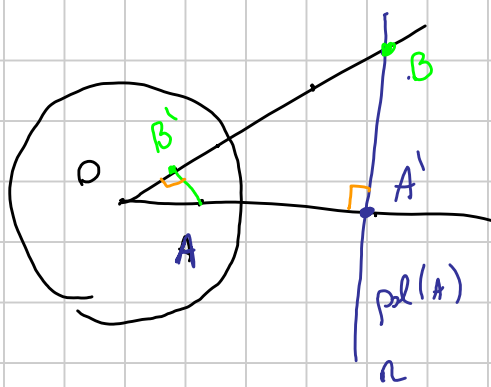
Se P è esterno a Γ la polare di P è la retta che passa per i due punti di tangenza delle tangenti da P a Γ



Dim: Un sacco di triangoli rettangoli simili

Prop (Teorema di La Hire): $A \in pol(B) \Leftrightarrow B \in pol(A)$

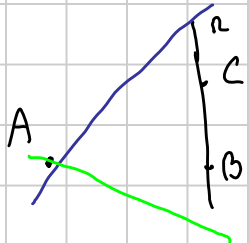
DIM



$B \in \text{pol}(A)$
 $\angle BA'O = 90^\circ$
 $\rightarrow \angle AB'O = 90^\circ$
 $\hookrightarrow A \in \text{pol}(B)$

CVD

Diciamo che r è la **polare** di A , e che A è il **polo** di r



$r = \overline{BC} = \text{pol}(A)$
 per teo. di Steiner

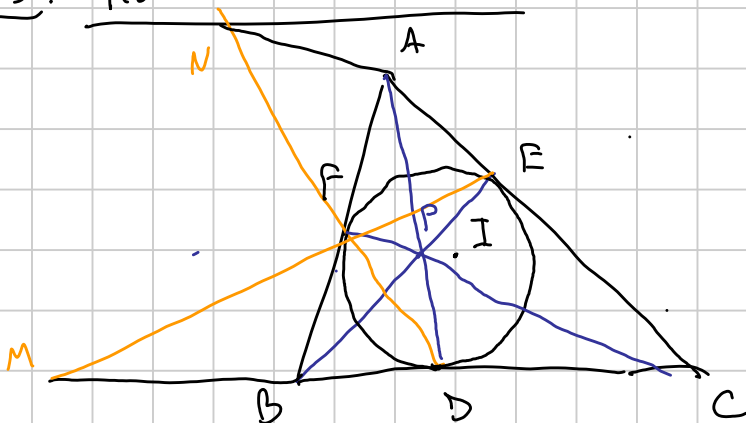
$B \in \text{pol}(A)$ e $C \in \text{pol}(A)$

$A \in \text{pol}(B)$ $A \in \text{pol}(C)$

$A = \text{pol}(B) \cap \text{pol}(C)$

(Stesso discorso si fa invertendo "polare" e "polo")

ES: Romanian TST 2004



P è il pt. di Gergonne

I è l'incirco

$M = EF \cap BC$

$N = DF \cap AC$

Tesi: $MN \perp IP$

DIM riferendo in incirco, so che $\text{pol}(P)$ è $\perp IP$. Claim: $MN = \text{pol}(P)$

$MN = \text{pol}(P) \Leftrightarrow \text{pol}(MN) = P$

$\text{pol}(MN) = \text{pol}(M) \cap \text{pol}(N)$

$M = BC \cap EF$

$\text{pol}(M) = \frac{\text{pol}(BC) \quad \text{pol}(EF)}{\text{retta} \quad \text{punto} \quad \text{punto}}$
 $= AD$

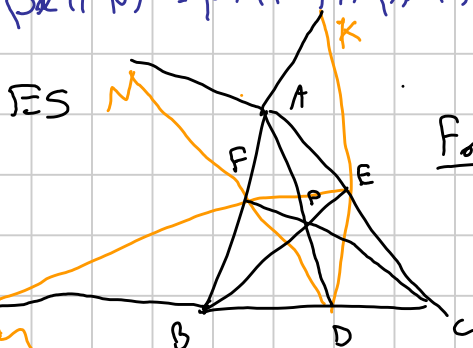
$\text{pol}(BC) = D$

$\text{pol}(EF) = A$ per AE, AF
 congruo W

$\text{pol}(MN) = \text{pol}(M) \cap \text{pol}(N) = AD \cap BE = P$

$\rightarrow MN$ è polare di P
 $\Rightarrow IP \perp MN$

CVD.

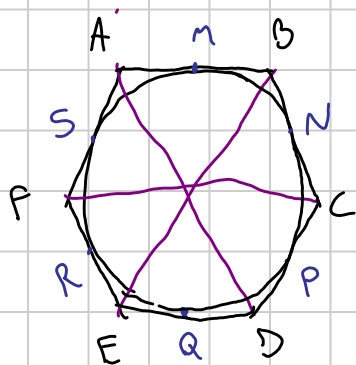


Fatto: M, N, K sono allineati

e la retta si chiama tripolare di P

DIM: quaterne armoniche, Menelao, Brianchon...

DIM tes Brianchon con poli e Polar:



$$A = AB \cap AF = MM \cap SS$$

$$\text{pol}(A) = MS$$

$$\text{pol}(D) = PQ$$

$$\text{pol}(AD) = \text{pol}(A) \cap \text{pol}(D) = MS \cap PQ$$

AD, BE, CF concorrenti

↓ Trasfero con la dualità pol - polare

$\text{pol}(AD), \text{pol}(BE), \text{pol}(CF)$ allineati

$MS \cap PQ, MN \cap RR, NP \cap SR$ allineati, è proprio Pascal :)

Lemma dello polare

$$A, B = \Gamma \cap \ell$$

$$D \in AB$$

$$C \in AB$$

$$\text{Tesi: } (A, B, C, D) = -1 \Leftrightarrow C \in \text{pol}(D)$$

DIM: suppongo D esterno.

traccio tangenti DP e DQ

so che $PQ = \text{pol}(D)$

$$C = PQ \cap AB$$

$\triangle APQ$ con $tg P$ e $tg Q$ si intersecano in D

$$\rightarrow (A, B, P, Q) = -1$$

$$\text{Proietta da } P \quad (A, B, D, C) = -1$$

Teo Brianchon

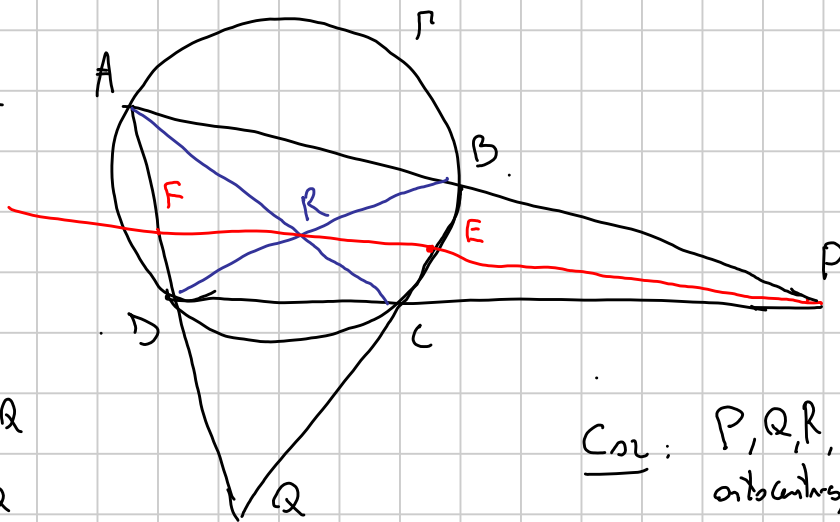
$$A, B, C, D \in \Gamma$$

$$AB \cap CD = P$$

$$AD \cap BC = Q$$

$$AC \cap BD = R$$

$$\text{Tesi: } \begin{aligned} \text{pol}(P) &= RQ \\ \text{pol}(Q) &= PR \\ \text{pol}(R) &= PQ \end{aligned}$$



Cor: P, Q, R, O formano un sistema ortocentrico, dove O è il centro di Γ

DM Sare $E = BC \cap PR$
 $F = AD \cap PR$

per Lemma tutti plane

Vorrei $F, E \in \text{plane}(Q)$

$\hookrightarrow$ Sse $(A, D, F, Q) = -1$
 $e (B, C, E, Q) = -1$

$(\underline{A}, \underline{D}, \underline{F}, Q) \stackrel{\text{primo do R in BC}}{=} (C, B, E, Q) \stackrel{\text{primo do P in AD}}{=} (\underline{D}, \underline{A}, \underline{F}, Q) \rightarrow$ Sono una quadrupla armonica $\therefore$
 CVD

Problemi per Cosa

IMO 2014	P4	} Easy
APMO 2012	P4	
BMO SL 2024	G3	

IMO SL 2007	G8
IMO SL 2017	G4
IMO SL 2022	G3
IMO 2023	P2