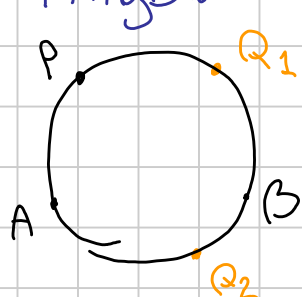


- Angoli orientati
- configurazione di Miquel
- Rotomorfie
- Inversioni: buffe
- Punti e configurazioni notevoli
- (Mistilinee)

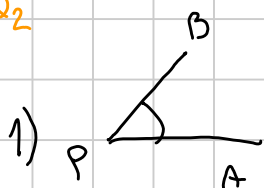
Angoli Orientati



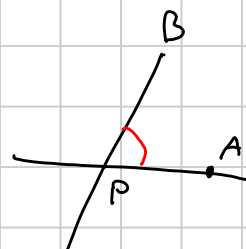
$$\widehat{APB} = \widehat{AQ_1B}$$

$$\widehat{APB} = 180 - \widehat{AQ_2B}$$

Proprietà:



$\widehat{APB}$ ang. normale



Angolo orientato
tra (PA, PB)
 $\angle APB$

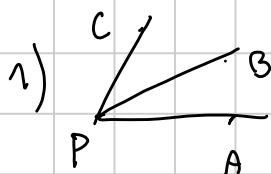
2) Hanno segno $\angle APB = -\angle BPA$

3) Sono modulo 180°

In Inglese, in un giro intorno a P, sempre anche mod π o mod 180° .

Convenzione:
Antiorario è +
Orologio è -

Fatti:



$$\angle APC = \angle APB + \angle BPC$$

$$\angle APB = \angle APC + \angle CPB$$

2) Volei mostrare che A, B, C sono allineati

Suppongo che P fuori
e guardo gli angoli in AP



A, B, C allineati $\Leftrightarrow \angle BAP = \angle CAP$

3) Ciclici:



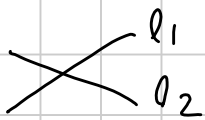
A, B, P, Q sono ciclici $\Leftrightarrow \angle AQB = \angle APB$

4) $\triangle ABC$ con angoli standard per cui $\angle BCA = 180 - \angle ABC - \angle CAB$



con angoli orientati: $\angle ACB + \angle CBA + \angle BAC = 0$

5) $l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow \angle(l_1, l_2) = \angle(l_2, l_1)$



Operativamente: stare attenti all'ordine quando si fa angle chasing "dritto"

! Achtung: Se $2\angle ABC = 2\angle DEF$

non possiamo concludere che $\angle ABC = \angle DEF$

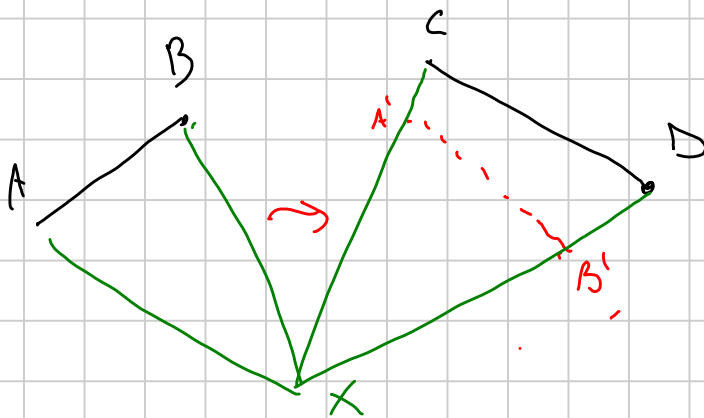
l'altro eventuale è che $\angle ABC = 30^\circ + \angle DEF$

$$2x \equiv 6 \pmod{10} \rightarrow x \equiv 3 \text{ o } 8 \pmod{10}$$



Rotomotetie

rotazione + omotetia (medesimo centro)



Vuole trasformare AB in CD
con una trasformazione geometrica

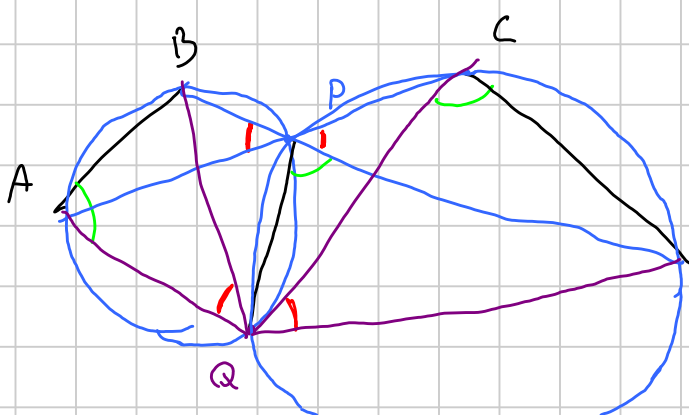
Non a caso che esistono rotazione e
omotetia con stesso centro $AB \rightarrow CD$

In complessi $\exists z, t.c. \quad z \cdot (a-x) = (c-x) \quad (\text{rotomotetia di centro } X \text{ e fattore } z)$
 $A \rightarrow C$

$$z \cdot (b-x) = (d-x)$$

x è tale che $\frac{c-x}{a-x} = \frac{d-x}{b-x}$ che ha soluzione unica.

Come costruire il centro di Rotomotetia.



$$P = AC \cap BD$$

$\odot ABQ \quad \odot CDP$ si intersecano in
 P e Q

per Angle chasing

$$\angle DQC = \angle DPC = \angle BPA = \angle BQA$$

$$\angle QCD = \angle QPD = \angle QPB = \angle QAB$$

F. 4.0: Se $\triangle ABC$ e $\triangle DEF$ in angoli orientati congruenti.

$\Rightarrow$ Sono simili

Allora $\triangle QAB \cong \triangle QCD$

$$\frac{QA}{QB} = \frac{QC}{QD} \rightarrow \frac{QA}{QC} = \frac{QB}{QD}$$

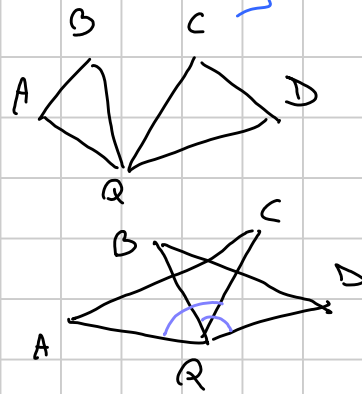
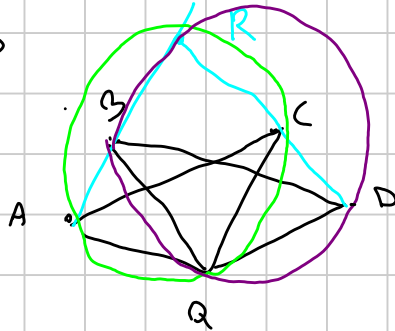
Quasi l'altra faccia del sse della rotazione.

$\triangle QAC \rightarrow \triangle QBD$

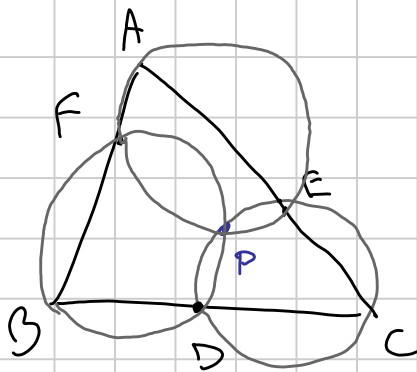
Sia $R = AB \cap CD$

abbiamo gratuitamente altre

due identità: $BRDQ$ e $AQRC$



Miquel



$\triangle ABC$

D, E, F a loro mi noti

Tracce: $\odot_{BDF}$, $\odot_{CED}$, $\odot_{AFE}$

Tesi: concorrenti in un punto P

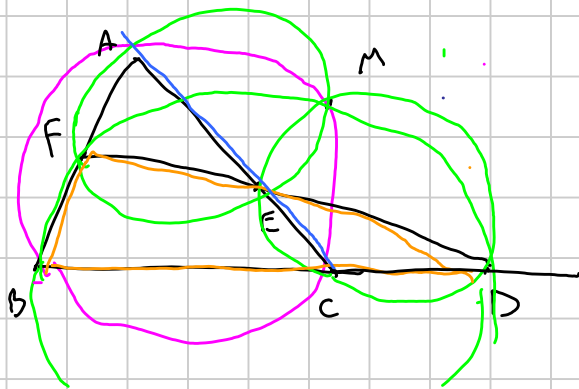
Dim: $P = \odot_{AFE} \cap \odot_{BDF}$ Volei dimostrare $P \in CD$ ciclico

$$\begin{aligned} \angle EPD &= 360 - \angle DPF - \angle FPE = 180 - \angle DPF + 180 - \angle FPE \\ &= \angle FBD + \angle EAF = \angle ABC + \angle CAB = -\angle BCA \\ &= \angle ACB = \angle ECD \Rightarrow \text{ciclici} \Rightarrow CVD \end{aligned}$$

Miquel (quadrangolo)

D, E, F allineati nella configurazione di Miquel.

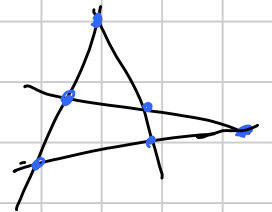
$\odot_{BFD}$, $\odot_{DEC}$, $\odot_{ARE}$ concorrenti in un pt. M



Posso vedere che $\triangle BFD$ con punti C, E, A sui lati

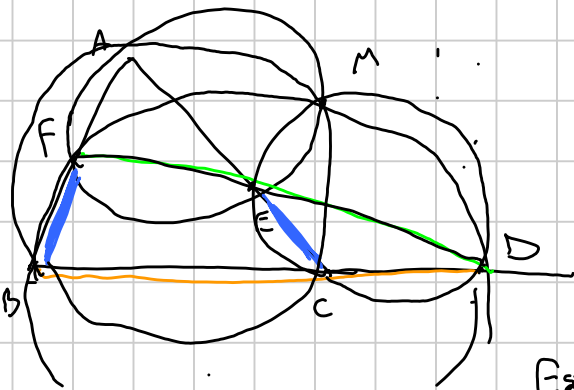
$\hookrightarrow \odot_{CED}$, $\odot_{AFE}$, $\odot_{BCA}$ concorrenti in M

Le rette BC, AC, AB, DF formano un quadrilatero completo
4 lati e $\binom{4}{2} = 6$ tutte le possibili intersezioni



$\exists$ M punto di Miquel del quadrilatero per cui valgono le 4 ciclicità

Qss: Ritroviamo la rototestata nella configurazione del quadrilatero completo



Chi è la rototestata che manda

BF $\rightarrow$ CE?

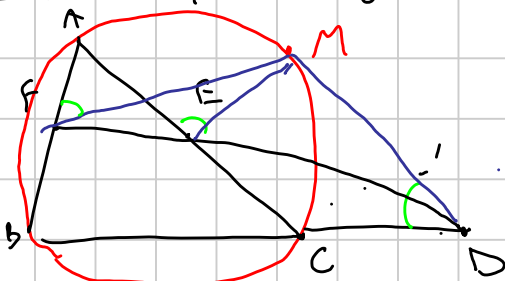
$D = BC \cap EF$

Centro di rototestata = $\odot_{DCE} \cap \odot_{DFB} = M$

Esiste rototestata di centro M che manda BF $\rightarrow$ CE

Tutte le altre: FE $\rightarrow$ BC, AF $\rightarrow$ CD, AB $\rightarrow$ ED, ...
AE $\rightarrow$ BD, ecc....

Fatto in Miquel triangolare



abbiamo visto che

DEF allineati $\Rightarrow M \in \odot_{ABC}$

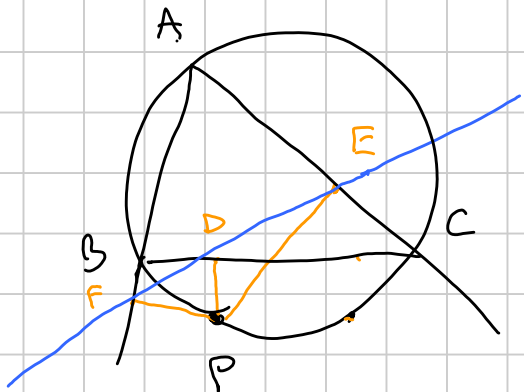
dove M è pt di Miquel $\triangle$

Prop: ABCM è ciclico se D, E, F allineati

Per le varie cicliche: $\odot AFEM$ ciclico $\Rightarrow \angle MFA = \angle MEA$

, $\odot MECD$ $\Rightarrow \angle MEA = \angle MDC$

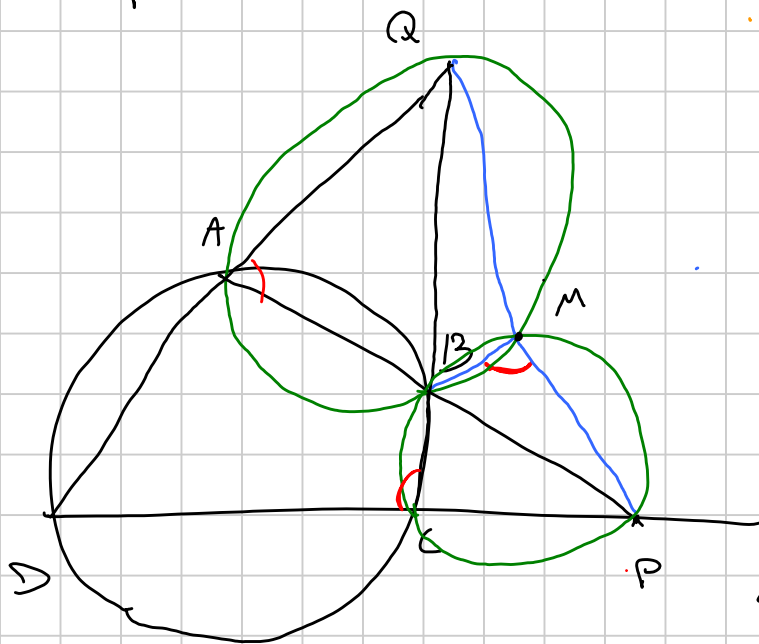
Caso particolare in cui $\angle MFA = 90^\circ \rightarrow$ retta di Simson



$\odot ABC \ni P$

PD proiezione di P su lato BC e
cicliche PE, PF

$\Rightarrow E, D, F$ sono allineati sulla retta di Simson di P.



$\odot ABCD$ ciclico.

$P = AB \cap CD$

$Q = BC \cap AD$

M: punto di Miquel

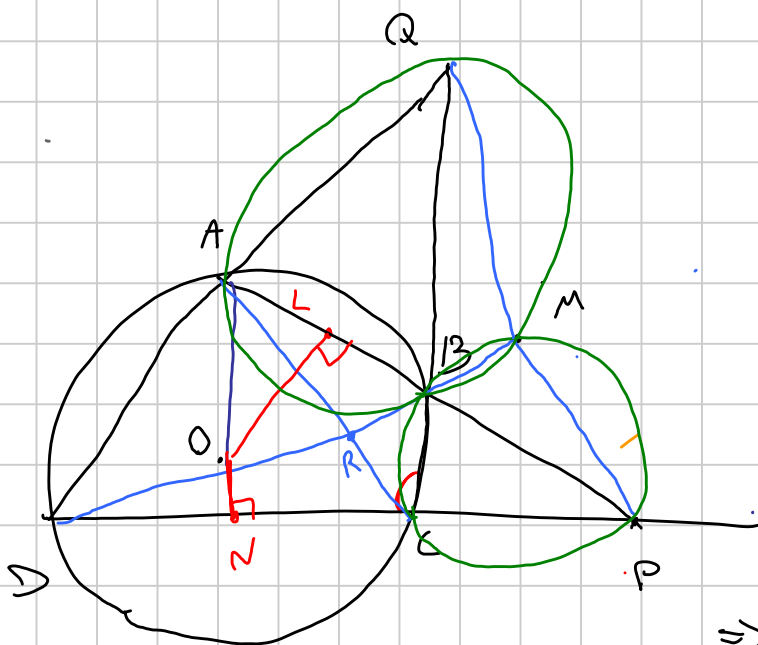
Prop: M, P, Q sono allineati.

Dim:

$$\angle PMB = \angle PCB = \angle DCB = \\ = \angle DAB = \angle QAB = \angle QMB$$

$\Rightarrow P, M, Q$ allineati.

(oss: M, P, Q allineati $\iff$ ABCD è ciclico)



Altre fatti sui quadrilateri ciclici:

1) M, Q, P allineati

2) $OM \perp PQ$

Dim Esiste Rotazione centrata in M

che manda $AB \rightarrow DC$

L N pt medi di AB, CD

$ALB \rightarrow DNC$

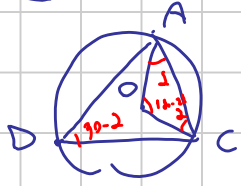
Esiste Rotazione che manda $LN \rightarrow BC$

$\Rightarrow \odot BCPM \cap \odot LNPM$ si intersecano in M

Others $\odot NPM$ c.d.b. $\Rightarrow \angle PMO = \angle PO = 90^\circ$

3) $\odot OAC$ e $\odot OBD$ c.d.b.

DIM: $\angle PAC \stackrel{?}{=} \angle OMC = 90^\circ - \angle CMP = 90^\circ - \angle CBP = 90^\circ - \angle CDA$



$$2 \angle CDA = \angle CDA = -2 \angle OAC$$

Achtung: nur wenn
dividiere per 2.

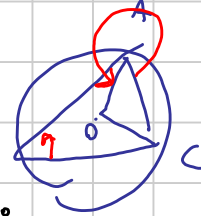
$$0 = \angle COA + \angle OAC + \angle ACO = \angle COA + 2 \angle OAC$$

due possibilità: $\angle CDA = 90^\circ - \angle OAC$

$$\angle CDA = -\angle OAC = \angle CAO$$

In questo caso, $\angle CDA < 90^\circ$

$$180^\circ - \angle CAO > 90^\circ$$



4) MO biseca $\widehat{AMC}$ e $\widehat{BMD}$

DIM: MO passa per pt medio arco in $\odot AOMC \rightarrow MO$ è bisettrice

5) O, R, M sono allineati $R: AC \cap BD$

R, M sono inversi rispetto a circonferenza.

DIM 1) Usare Boscari (vedi G2M)

2) Invertire in O

3) Usare assi radicali $\odot AOMC$ $\odot BMD$ $\odot ABCD$

X Esatto :)

6) O, P, R, Q formano sistema ortogonale.

Es x caso

IMO 2005 P5

RUSSIA MO 1995

IMOSL 2024 G1

IMO SL 2022 G4

$\odot$ centro di Γ

D punto su BC generico

α passante per D e $\perp BC$

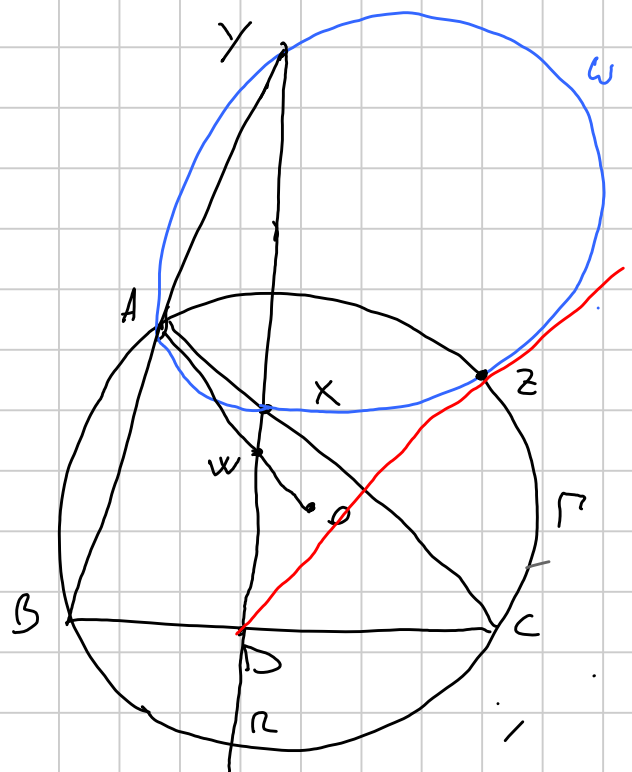
$\alpha \cap AB = Y$

$\alpha \cap AC = X$

$\alpha \cap AO = W$

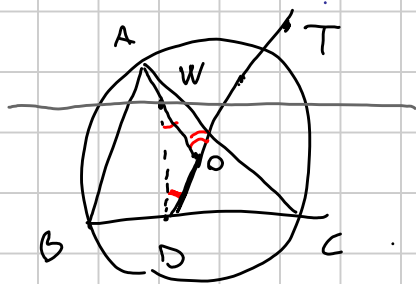
$W = O_{Axy}$

$Z = W \cap \Gamma$



Tesi: Supponiamo che $DO = WO \Rightarrow DZ$ tangente a ω

DM: Possiamo determinare D (univocamente) in modo da valga il vincolo

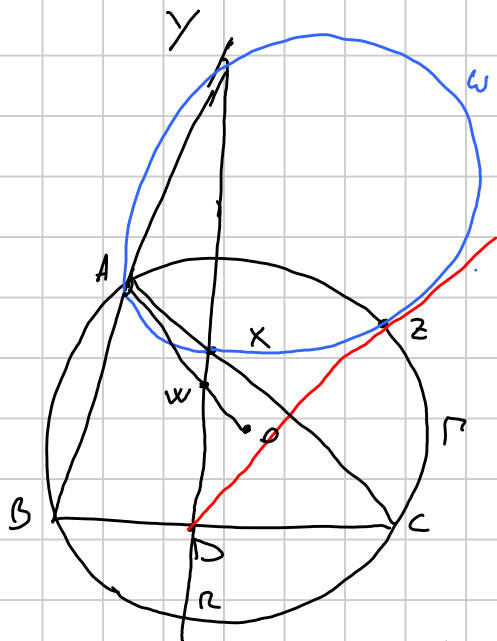
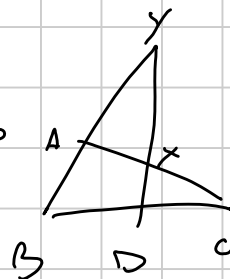


$\rightarrow$ posso trovare $D \rightarrow$ posso disegnare la figura

Q.S.: $\angle ODW = \angle DWO$

$\angle TOW = 2 \angle ODW$

obliquo quadrilatero completo



$\hookrightarrow Z$ è punto di Miquel.

$\Rightarrow Z \times DC$ e $Z \times BD$ ciclici.

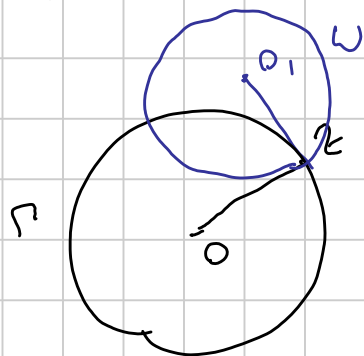
Consideriamo la rototraslazione che manda

$BC \rightarrow XY$

Ma in realtà, otteniamo $\triangle ZBC \sim \triangle ZYX$

Rototraslazione manda $\triangle ZBC \rightarrow \triangle ZYX$ e manda $\Gamma \rightarrow \omega$

$XY \perp BC \rightarrow$ angolo della rototraslazione è di 90°



$\rightarrow ZO \perp ZO_1$ per questa rotazione

$\Rightarrow \Gamma$ e ω sono cerchi ortogonali.

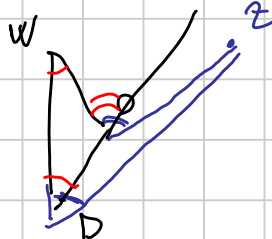
DZ tangente a ω (e simultaneamente O_1Z tangente a Γ)

Ci basta dimostrare che O, D, Z sono allineati.

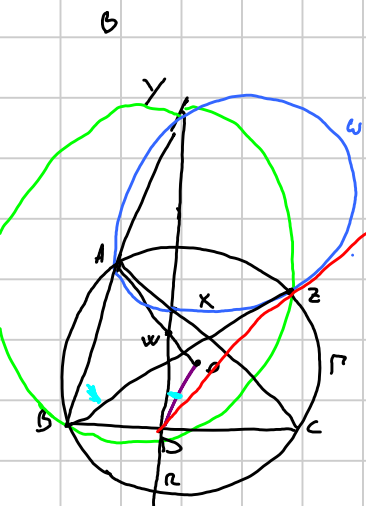
angolo al centro in Γ

$\angle ZO A = 2 \angle ZBA = 2 \angle ZB'Y = 2 \angle ZD'Y$

$\angle ZO A = \angle ZO W$

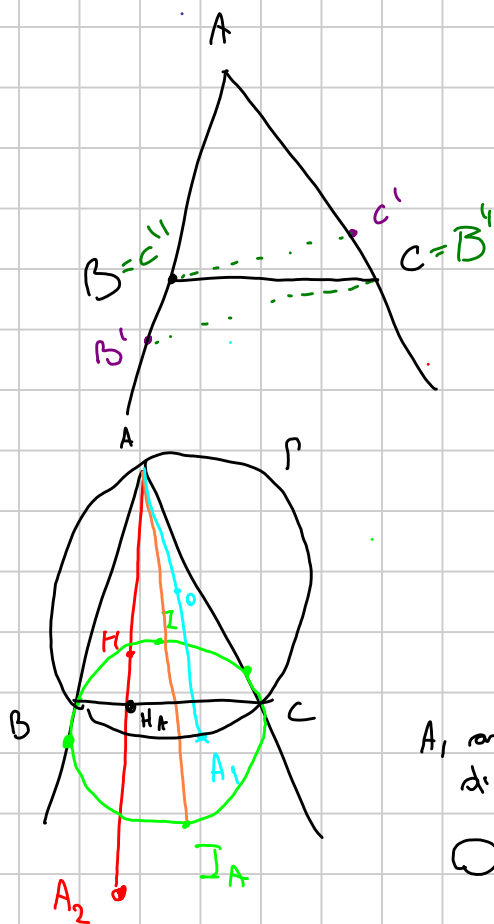


Finito con l'angolo chasing $\heartsuit$



Inversioni

Inversione + Simmetria



Inversion in A di raggio $\sqrt{AB \cdot AC}$

$B \rightarrow B'$ $C \rightarrow C'$ con $AB' = AC$
 $AC' = AB$

Simmetria rispetto a bisettrice di $\widehat{BAC}$

$B' \rightarrow B'' = C$ $C' \rightarrow C'' = B$

Inv + Sym

$B \leftrightarrow C$

$\Gamma \leftrightarrow BC$

$AH \leftrightarrow AO$

A_1 antipode di A $\leftrightarrow H_A$ piede altezza da A

$\odot$ circ. di P $\leftrightarrow A_2 := \text{sym di A wrt BC}$

$\odot BIC I_A \leftrightarrow$ se stessa

$I \leftrightarrow I_A$

$I_B \leftrightarrow I_C$

ex-centri

Es classico G3-12, aka BMO 2009

Hint: inv + sym di raggio $\sqrt{AB \cdot AC}$



$N \leftrightarrow B$
 $M \leftrightarrow C$

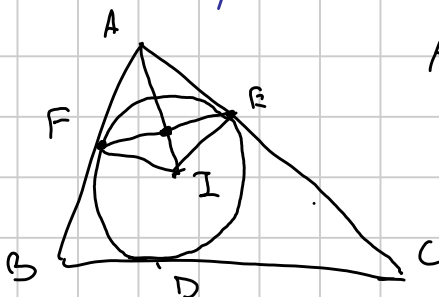
Es x casa: CMC 2020 P3 Cyprus Math Competition

IMO SL 2023 GS (Burlina)

Italian TST 2015 P2

Altre Inversioni Turkey

2) Inscrib.



$A \leftrightarrow AI \cap FE = \text{pt med di FE}$

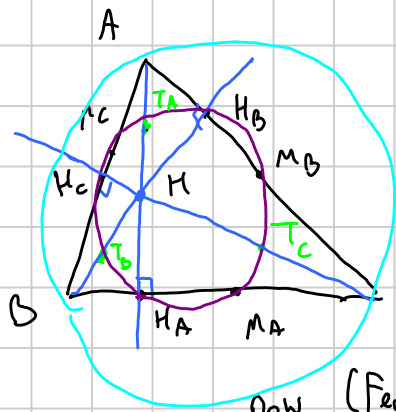
D, E, F vanno in se stessa

Trasformo $\triangle$ + punti tangenza inscritti

$\hookrightarrow$ pt nel. lati + $\triangle$

I
 $\downarrow$
 O

3) Inversione in H ortocentro.



H_A, H_B, H_C piedi delle altezze
 M_A, M_B, M_C pt medi di lati
 punti medi di HA, HB, HC

$\Rightarrow$ si trovano sulla
 circonferenza di
 Feuerbach.

pot_H (Feuerbach) = $HT_A \cdot HH_A = HT_B \cdot HH_B = HT_C \cdot HH_C$

Inversione in H di raggio $\sqrt{HT_A \cdot HH_A}$ + simmetria rispetto a H

$$H_A \leftrightarrow T_A \quad H_B \leftrightarrow T_B \quad H_C \leftrightarrow T_C$$

Alt. QSS: Feuerbach e circonferenza sono omotetiche di potere 2

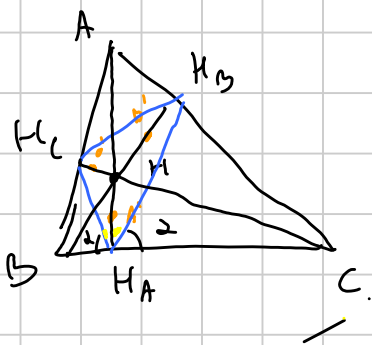
$$2 HT_A = HA$$

con l'inversione si deve avere HA, B, C .

$A \rightarrow$ pt med di HH_A e cyc.

+ omotetia di potere 2

$$\Delta A'B'C' \sim \Delta H_A H_B H_C$$



ABC ha angoli $2, \beta, \gamma$ e H è ortocentro.

$$\angle H_C H_A H_B = 180 - 2\alpha$$

$H_A H$ è bisettrice di triangolo mitico

$$\angle H_C H_A A = \angle A H_A H_B = 90 - \alpha$$

Questa inversione trasforma ABC + ortocentro $\rightarrow \Delta$ + incentro

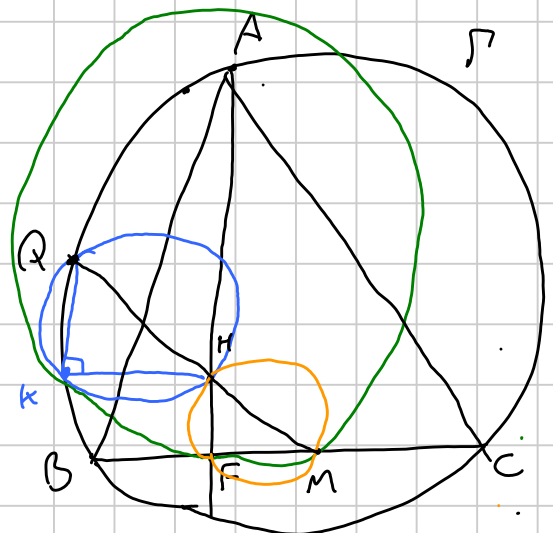
IMO 2015 P3

ΔABC , M pt med, F piede altezza, H ortocentro

$$Q = MH \cap \Gamma$$

K punto su Γ tale che $\angle HKQ = 90^\circ$

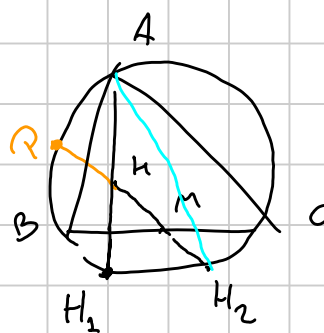
Tesi $\odot KQH$ e $\odot_{FKM}$ sono tangenti



DSS 1: Q il Queue-point di A

Dopo AH_2 è dato

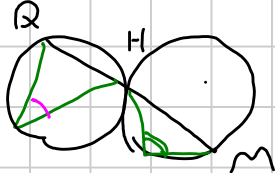
$$\angle AQH_2 = \angle AQH = 90^\circ$$



$H_2 = \text{Sym di } H \text{ rispetto a } M$
 è l'antipodale di A in Γ

DSS 2 Claim: $\odot_{FHM}$ tangente $\odot_{QKH}$

Lemmas



ω_1 e ω_2 circonferenze per H

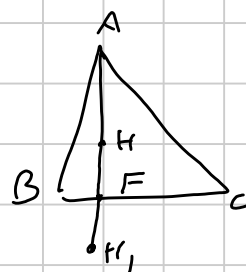
QHM allineati

ω_1 e ω_2 tangenti in H ma $\angle + \angle = 180^\circ$

Inversione in H, con l'inversione che fissa la circonferenza.

+ Symm rispetto H (è l'inversione di primo + omotetia)

Raggio è $\sqrt{HA \cdot HH_1}$



$$A^* = AH \cap \Gamma$$

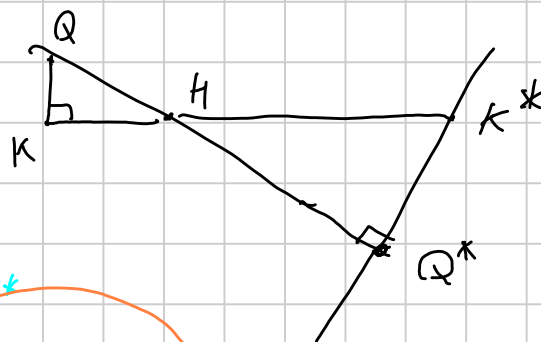
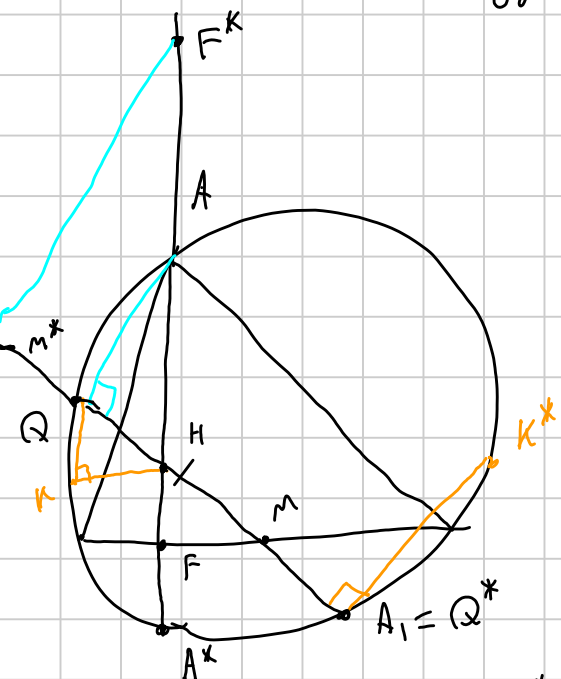
$F^* = \text{simetra di } H \text{ rispetto ad } A$

$$\Gamma \leftrightarrow \Gamma$$

$Q^* = A_1$ antipodale di A

$M^* = \text{pt tale che } Q \text{ è punto di } AM^*$

dove va K?



K^* è t.c.

$$1) K^*Q^* \perp HQ^*$$

$$2) K^* \in \Gamma$$

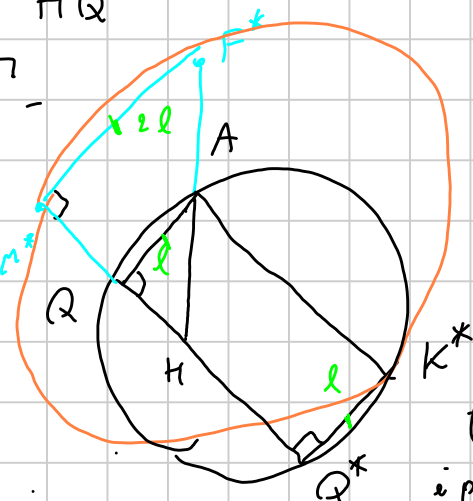
$\Rightarrow AQA_1, K^*$ è rettangolo

Tesi è $\odot_{FMK}$ tangente $\odot_{KQH}$

$\Downarrow$ Inversione

$\odot_{F^*M^*K^*}$

$\downarrow$
 K^*Q^*



AK^* è assa di M^*F^*

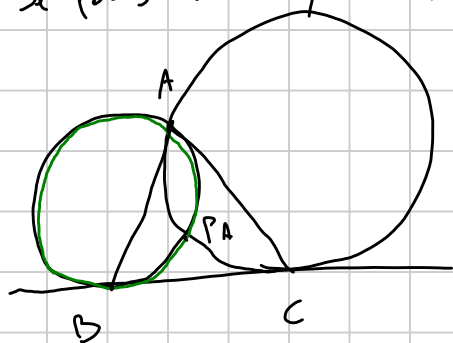
K^*Q^* è $\parallel M^*F^*$

tangente a K^* a $\odot_{F^*M^*K^*}$ è perpendicolar a M^*F^* per simetria

4) $\odot ABP_A$ tangente BC e $\odot ACP_A$ tangente BC

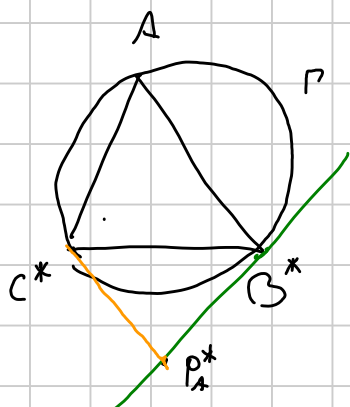
DIM: punti B) + angoli di tangenza.

Se locus inv + sym in A $B \leftrightarrow C$.



$BC \rightarrow \Gamma$
 $\odot_{BAP_A} \rightarrow t_{B-\Gamma}$
 in B

$\odot_{CAP_A} \rightarrow t_{C-\Gamma}$
 = C

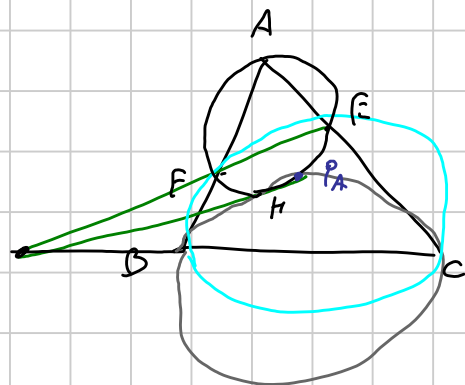
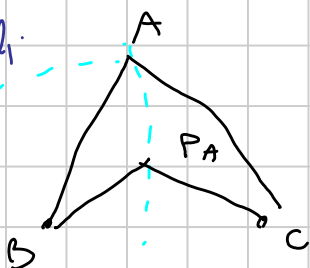


AP_A^* è simmediana ha senso perché AP_A è mediana!

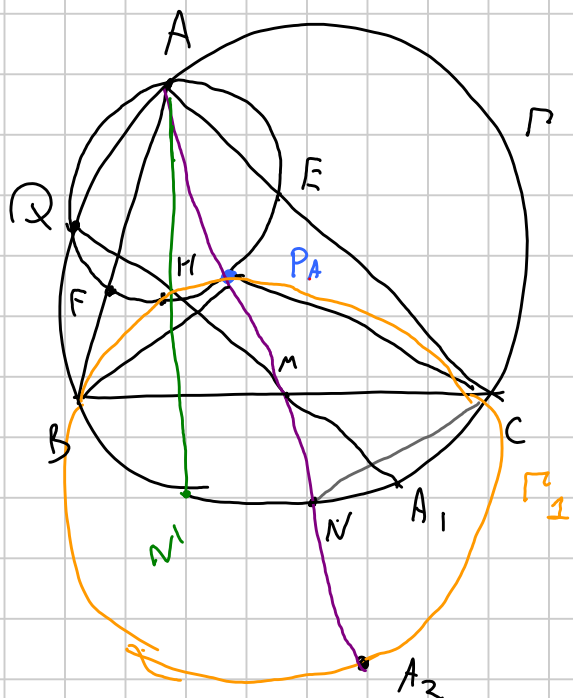
5) EF, BC, HP_A connesso

DIM: ASSI radicali

$$6) \frac{P_A B}{P_A C} = \frac{AB}{AC}$$



$\hookrightarrow$ cioè, A e P_A stanno sulla stessa circonferenza di oppolus rispetto a BC.



DIM: per simmetria rispetto a M.

BF, CN è parallelogramma.

$$\frac{P_A B}{P_A C} = \frac{CN}{BN}$$

$AP_A MN$ è mediana:

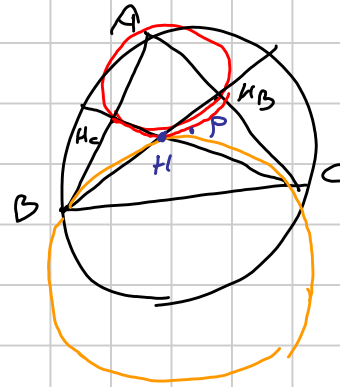
AN' è simmediana. con $\widehat{BN} = \widehat{CN}$

$$\frac{CN}{BN} = \frac{BN'}{CN'}$$

Testi: $\frac{AB}{AC} = \frac{P_A B}{P_A C} \Leftrightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{BN'}{CN'} \Leftrightarrow AB \cdot CN' = BN' \cdot AC$

è vera perché (A, N', B, C) è quaterna armonica.

8) P è centro di rotomotetia che manda
 $BC \rightarrow H_B H_C$



Secondo punto notevole: Dumpty

BT, CT tangenti

AT simmedianale.

Def: R_A il Dumpty-point è $AT \cap \odot_{BCTC}$

1) $OR_A \perp AT$

2) Chiamati M, N i pt medi di AB, AC
 $\odot_{AMNOR_A}$ sono ciclici.

3) $\angle BAR_A = \angle R_A CA$ e
 $\angle CAR_A = \angle R_A BA$

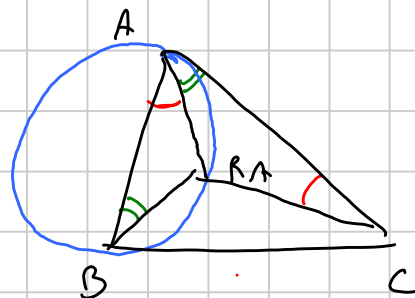
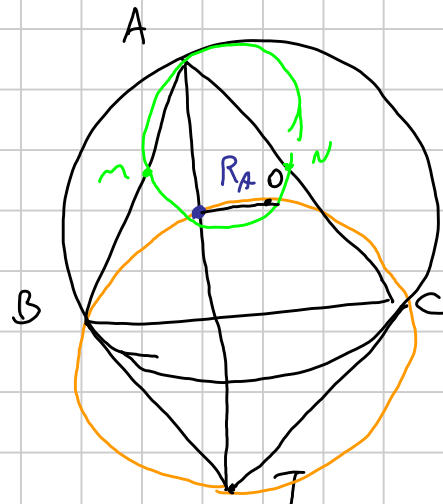
4) $\odot_{ABR_A}$ tangente AC
 $\odot_{ACR_A}$ tangente AB

5) R_A è il centro di rotomotetia che manda $AB \rightarrow CA$

Oss: la rotomotetia può avere coppie di punti coincidenti

$\rightarrow$ le circonferenze che vengono sono tangenti alle opportune rette

Fattuello: Rotomotetia è Spiral Similarity in inglese



BMO 2022 P1

$\triangle CAB$, Γ circoscritto, centro O

t_A e t_B in Γ si intersecano in X

$Z = t_A \cap \{ \text{retta per } C \text{ parallela ad } AB \}$

$Y = \text{proiezione di } O \text{ su } CX$

Tesi: Y, Z , pt med di AC sono allineati

DM: sappiamo che Y è Dumpty point di $\triangle CAB$ relativo a C

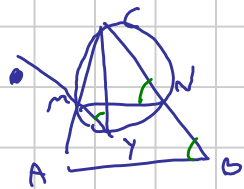
Ci poniamo 'da caso'

- $ABDX$ ciclico
- $AMYN$ ciclico

• Dato che $ZC \parallel AB \Rightarrow \angle ZCA = \alpha$ $\square$

Angle chasing $\rightarrow \angle A\hat{Z}C = \alpha$

$\angle CYM = \angle CNM = \angle CBA = \beta$



• Angle chasing

$\angle CYA = 180 - \alpha$



$\Rightarrow CYAZ$ è c.d.s.

$\Rightarrow \angle CYZ = \angle CAZ = \beta = \angle CYM \Rightarrow M, Y, Z$ allineati.

CVD

