

LEMMA DI HENSEL, EQUAZIONI DI PELL

Note Title

05/09/2026

Lemma (Hensel) $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ polinomio a coeff. interi

$p =$ numero primo $x_0 \in \mathbb{Z}$

Supponiamo che $f(x_0) \equiv 0 \pmod{p^n}$ ($n \geq 1$)
e che $f'(x_0) \not\equiv 0 \pmod{p}$

Allora $\exists! i \in \{0, \dots, p-1\}$ t.c.

$$f(x_0 + i \cdot p^n) \equiv 0 \pmod{p^{n+1}}$$

$$(f = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0 \rightarrow$$

$$f'(x) = n a_n x^{n-1} + (n-1) a_{n-1} x^{n-2} + \dots + a_1)$$

Dim $f(x+y) = f(x) + y \cdot f'(x) + y^2 \cdot g(x,y)$

Basta mostrarlo quando $f(x) = a_n x^n$, e allora

$$a_n (x+y)^n \stackrel{?}{=} a_n x^n + y \cdot n \cdot a_n x^{n-1} + y^2 g(x,y)$$

$$a_n \left(x^n + \binom{n}{1} x^{n-1} y + \sum_{j=2}^n \binom{n}{j} x^{n-j} y^j \right)$$

$$\text{Basta quindi scegliere } g(x,y) = a_n \sum_{j=2}^n \binom{n}{j} x^{n-j} y^{j-2}$$

Vogliamo studiare la congruenza

$$f(x_0 + i \cdot p^n) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot i \cdot p^n \stackrel{?}{\equiv} 0 \pmod{p^{n+1}} \\ + (i \cdot p^n)^2 g(x_0, i \cdot p^n)$$

$$\Rightarrow f(x_0) + i \cdot p^n \cdot f'(x_0) \equiv 0 \pmod{p^{n+1}}$$

Ora scrivo $f(x_0) = p^n \cdot q$ e trovo

$$p^n \cdot q + p^n \cdot (i \cdot f'(x_0)) \equiv 0 \pmod{p^{n+1}}$$

$$(*) \quad q + i \cdot f'(x_0) \equiv 0 \pmod{p}$$

Per ipotesi: $f'(x_0) \not\equiv 0 \pmod{p}$, quindi (*)

$$\Rightarrow i \equiv -q \cdot (f'(x_0))^{-1} \pmod{p}$$

Cioè: fra tutte le classi di congr. $x_1 \pmod{p^{n+1}}$

che si riducono a $x_0 \pmod{p^n}$, esattamente

una soddisfa $f(x_1) \equiv 0 \pmod{p^{n+1}}$ $\square$

Es Si risolve $x^2 \equiv 7 \pmod{3^{40}}$?

$$\text{Mod } 3: \quad x^2 \equiv 1 \pmod{3} \quad \Leftrightarrow \quad x \equiv \pm 1 \pmod{3}$$

Prendiamo $x \equiv 1 \pmod{3}$ e cerchiamo di "sollevare" questa soluz. ad una soluz di $x^2 \equiv 7 \pmod{9}$

$$(1 + 3i)^2 \equiv 7 \pmod{9}$$

$$\begin{array}{c} \parallel \\ 1 + 2 \cdot 3 \cdot i + \cancel{9 \cdot i^2} \end{array}$$

$$\Rightarrow 6i \equiv 6 \pmod{9}$$

$$\Rightarrow 2i \equiv 2 \pmod{3}$$

$$\Rightarrow i \equiv 1 \pmod{3}$$

$$4^2 \equiv 7 \pmod{9} \quad \overset{?}{\rightsquigarrow} \quad x^2 \equiv 7 \pmod{27}$$

$$x = 4 + 3i \quad (4 + 3i)^2 \equiv 7 \pmod{27}$$

$$16 + 2 \cdot 4 \cdot 3i \equiv 7 \pmod{27}$$

$$2 \cdot 4 \cdot 9i \equiv -9 \pmod{27}$$

$$8i \equiv -1 \pmod{3}$$

$$i \equiv 1 \pmod{3}$$

$$13^2 \equiv 7 \pmod{27}$$

Come applicazione del lemma di Hensel:

$$f(x) = x^2 - 7 \quad p = 3 \quad x_0 = 1 \quad n = 1$$

$$f(x_0) = -6 \equiv 0 \pmod{3} \quad f'(x_0) = 2 \not\equiv 0 \pmod{3}$$

$$\Rightarrow \text{c'è un unico } i \pmod{3} \text{ t.c. } f(x_0 + 3i) \equiv 0 \pmod{3^2}$$

Di nuovo Hensel con stesso f , p , ma punto di partenza $x_0 + 3i$, abbiamo

$$f(x_0 + 3i) \equiv 0 \pmod{3^2}, \quad f'(x_0 + 3i) \equiv f'(x_0) \equiv 2 \pmod{3} \neq 0$$

Es Fissiamo $a \in \mathbb{Z}$ e p primo > 2 , con $p \nmid a$.

Se $x^2 \equiv a \pmod{p}$ si risolve, anche $x^2 \equiv a \pmod{p^n}$ si risolve per ogni n (e ha esattamente 2 soluzioni mod p^n)

$$f(x) = x^2 - a$$

$$f(x_0) \equiv 0 \pmod{p}$$

$$f'(x_0) = 2x_0 \not\equiv 0 \pmod{p}$$

Es Chi sono i quadrati mod 8? 0, 1, 4
 " " " " (dispari) mod 16? $3^2, \dots, 2^n$?

Dim che se $a \equiv 1 \pmod{8}$, allora $x^2 \equiv a \pmod{2^n}$ si risolve per ogni $n \geq 1$.

Sappiamo che $x^2 \equiv a \pmod{2^n}$ si risolve, cioè

esiste x_0 con $x_0^2 \equiv a \pmod{2^n}$. Cerchiamo di sollevare questa soluz. mod 2^{n+1} .

$$(x_0 + i \cdot 2^n)^2 \equiv a \pmod{2^{n+2}}$$

$$x_0^2 + 2^{n+1} \cdot i \cdot x_0 + \underbrace{i^2 \cdot 2^{2n}}_{\equiv 0 \pmod{2^{n+2}}} \equiv a \pmod{2^{n+2}}$$

$$(x_0^2 - a) + 2^{n+1} \cdot i \cdot x_0 \equiv 0 \pmod{2^{n+2}}$$

Se sapero $\left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} x_0^2 \equiv a \pmod{2^{n+1}}$

$$2^{n+1} \cdot q + 2^{n+1} \cdot i \cdot x_0 \equiv 0 \pmod{2^{n+2}}$$

$$\Rightarrow q + i \cdot x_0 \equiv 0 \pmod{2} \quad x_0 \equiv 1 \pmod{2}$$

$$\Rightarrow i \equiv q \pmod{2}$$

Passo base dell'induzione: se $a \equiv 1 \pmod{8}$, allora
e' $\square$ anche mod 16 (vero perché $a \equiv 1, 9 \pmod{16}$)

Es $x^2 - 34y^2 = -1$

$$\text{Mod } p \neq 2, 17: \quad x^2 - 34y^2 \equiv -1 \pmod{p}$$

ha soluzioni?

$$S_1 = \{x^2 \pmod{p} \mid x=0, \dots, p-1\}$$

$$S_2 = \{34y^2 - 1 \pmod{p} \mid y=0, \dots, p-1\}$$

$$\# S_1 = \frac{p+1}{2}$$

$$\# S_2 = \frac{p+1}{2}$$

$$\Rightarrow S_1 \cap S_2 \neq \emptyset \Rightarrow \text{c'è una soluz mod } p$$

Ci sono soluz. anche mod p^n per ogni p ed n !

Prendiamo $p \neq 2, 17$ e una soluz. $x_0^2 - 34y_0^2 \equiv -1 \pmod{p}$

Uno fra x_0 e y_0 e' $\neq 0 \pmod{p}$, diciamo $x_0 \neq 0 \pmod{p}$.

Fissiamo $y_0 \in \mathbb{Z}$ rappresentante della classe di y_0

$$x_0^2 \equiv \underbrace{34y_0^2 - 1}_{\neq 0 \pmod{p}} \pmod{p^n}$$

Es $p=7$. $x^2 - 34y^2 \equiv -1 \pmod{7}$

$$\quad \quad \quad \parallel$$
$$\quad \quad \quad x^2 + y^2$$

$(2, 3)$ e' una soluz. mod p .

Fisso $y=3$ e studio $x^2 - 34 \cdot 3^2 \equiv -1 \pmod{7^n}$

$$x^2 \equiv 34 \cdot 3^2 - 1 \pmod{7^n}$$

Ha soluz $\forall n \geq 1$!

Oss. $x^2 - 34y^2 = -1$ ha la soluz. $(5/3, 1/3)$

$x^2 - 34y^2 \equiv -1 \pmod{N}$ ha soluz. almeno
se $(N, 3) = 1$.

Problemi "veri"

Aus 2018/P6 Trovare le cifre $z \in \{0, \dots, 9\}$ t.c.

per ogni $k \geq 1$ c' e' una potenza nona, n^9 ,
la cui scrittura decimale finisce con (almeno)
 k cifre z

KOREA 2016 TST

$P(x) \in \mathbb{Z}[x]$ polinomio
irriducibile, q un primo.

Dim. che $\# \{ 0 \leq x < q^k : P(x) \equiv 0 (q^k) \}$ è
indipendente da k per k abbastanza grande.

SOLUZIONI

P1 $z \in \{0, 1, 3, 7, 9\}$

Escludiamo $2, 4, 5, 6, 8$:

... $22 = n^9$? No: assurdo mod 4

... $444 = n^9$? " " " 8

○ è facile. Per mostrare che $1, 3, 7, 9$
si fanno, voglio risolvere $n^9 \equiv z z \dots z (10^k)$
||
 $z \cdot \left(\frac{10^k - 1}{9} \right)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} n^9 \equiv z \left(\frac{10^k - 1}{9} \right) \pmod{2^k} \\ n^9 \equiv z \left(\frac{10^k - 1}{9} \right) \pmod{5^k} \end{cases} \quad \text{si risolvono}$$

$$f(x) = x^9 - z \cdot \left(\frac{10^k - 1}{9} \right), \quad p=2 \text{ o } p=5$$

$$x_0^9 \equiv 1 \pmod{2}$$

$$f'(x_0) = 9 \cdot x_0^8 \equiv 9 \not\equiv 0 (2)$$

$$x_0^9 \equiv 1, 3, 7, 9 (5)$$

$$9x_0^8 \not\equiv 0 (5)$$

P2

Lemma $P(x)$ irriducibile $\Rightarrow$ esiste $N \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$
t.c. $\gcd(P(x_0), P'(x_0)) \mid N$ per ogni $x_0 \in \mathbb{Z}$

Dim $(P(x), P'(x)) = 1$ come polinomi perché
 $P(x)$ è irrid. e $P(x) \nmid P'(x)$, che è di
grado inferiore

Bézout $\rightarrow$ esistono $A(x), B(x) \in \mathbb{Q}[x]$ t.c.

$$A(x)P(x) + B(x)P'(x) = 1$$

Sia $N = \text{mcm dei denominatori}$. Allora

$$(N \cdot A(x)) \cdot P(x) + (N \cdot B(x)) \cdot P'(x) = N$$

$$\} \forall x_0 \in \mathbb{Z}$$

$$(N \cdot A(x_0)) \cdot P(x_0) + (N \cdot B(x_0)) \cdot P'(x_0) = N$$

$$\Rightarrow \gcd(P(x_0), P'(x_0)) \mid N. \quad \square$$

Conseguenza: c'è un m tale che se

$$q^m \mid P(x), \text{ allora } q^{m+1} \nmid P'(x)$$

$$\max(v_q(P(x_0)), v_q(P'(x_0))) \leq m$$

Caso speciale (ma istruttivo) Se $q \nmid N$, allora

$$\text{se } P(x_0) \equiv 0 \pmod{q}, \quad P'(x_0) \not\equiv 0 \pmod{q}$$

In questa situazione, ogni soluz. mod q

si solleva in modo unico a mod q^2 , poi

$a \pmod{q^3}, \dots \rightsquigarrow$ il n° di soluzioni
 $a \quad P(x) \equiv 0 \pmod{q^k}$ è indipendente da
 k ed è $=$ al n° di soluz. mod q .

Caso generale

$$\left\{ 0 \leq x < q^k : \begin{array}{l} P(x) \equiv 0 \pmod{q^k} \\ q \mid P'(x) \end{array} \right\}$$

Lemma $\# \left\{ 0 \leq x < q^k : q \mid P'(x) \text{ e } P(x) \equiv 0 \pmod{q^{k+1}} \right\}$

$$= \frac{1}{q} \# \left\{ 0 \leq x < q^k : q \mid P'(x) \text{ e } P(x) \equiv 0 \pmod{q^k} \right\}$$

se $k > 2m$ S

Dim $S_h = \left\{ 0 \leq x < q^k : \begin{array}{l} P(x) \equiv 0 \pmod{q^k} \text{ e} \\ v_q(P'(x)) = h \end{array} \right\}$

$$S = S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_m$$

Sia $x \in S_h$. Considero

$$\begin{aligned} P(x + i \cdot q^{k-h}) &= P(x) + P'(x) \cdot i \cdot q^{k-h} \\ &\quad + (i \cdot q^{k-h})^2 q(\dots) \\ &\stackrel{?}{\equiv} 0 \pmod{q^{k+1}} \end{aligned}$$

$$q^{2(k-h)} \equiv 0 \pmod{q^{k+1}}$$

$$\Leftrightarrow 2(k-h) \geq k+1 \Leftrightarrow k \geq 2h+1,$$

che è vero perché $k > 2m$ e $h \leq m$.

Siano $P'(x) = q^h \cdot r_1$ e $P(x) = q^k \cdot r_0$

$$\longrightarrow q^k \cdot r_0 + q^h \cdot r_1 \cdot i \cdot q^{k-h} \equiv 0 \pmod{q^{k+1}}$$

$$\Leftrightarrow r_0 + i \cdot r_1 \equiv 0 \pmod{q},$$

e quindi c'è un unico $i \pmod{q}$ che va bene. $\square$

Prendiamo $k > 2m$.

$$\# \{ 0 \leq x < q^k : P(x) \equiv 0 \pmod{q^k} \}$$

//

$$\# \{ 0 \leq x < q^{k+1} : P(x) \equiv 0 \pmod{q^{k+1}} \}$$

Il n° di soluz. con $q \nmid P'(x)$ è lo stesso;

il n° di soluz. con $q \mid P'(x)$ è

$$q \cdot \frac{1}{q} \cdot \# \left\{ 0 \leq x < q^k : \begin{array}{l} q \mid P'(x) \\ P(x) \equiv 0 \pmod{q^k} \end{array} \right\}$$

Oss Se $P(x) \equiv 0 \pmod{q^{k+1}} \in P'(x) \equiv 0 \pmod{q}$,

$$\begin{aligned} \text{allora } P(x+q^k) &= P(x) + P'(x) \cdot q^k + q^{2k}(\dots) \\ &\equiv 0 \pmod{q^{k+1}} \end{aligned}$$

EQUAZIONE DI PELL

$D > 0$ non quadrato.

$$y^2 - D x^2 = 1$$

Teo (i) Ci sono sempre soluzioni non banali
(cioè $\neq (0, \pm 1)$)

(ii) Le soluzioni si descrivono tutte.

Def Dati $a, b \in \mathbb{Z}$, poniamo

$$N(a + b\sqrt{D}) = a^2 - Db^2$$

Oss Se $x \in \mathbb{R}$ si scrive $x = a + b\sqrt{D}$
 $= a' + b'\sqrt{D}$,

allora

$$(a - a') = \sqrt{D} (b' - b)$$

se $b \neq b'$

$$\leadsto \sqrt{D} = \frac{a - a'}{b - b'}, \text{ che è assurdo}$$

perché $\sqrt{D}$ è irrazionale $\Rightarrow b = b' \Rightarrow a = a'$.

Proprietà della norma N

$$N((x_1 + y_1\sqrt{D}) \cdot (x_2 + y_2\sqrt{D}))$$

$$= N(x_1 + y_1\sqrt{D}) \cdot N(x_2 + y_2\sqrt{D})$$

(per ogni $x_1, y_1, x_2, y_2 \in \mathbb{Q}$)

Riformulazione di Pell $N(x + y\sqrt{D}) = 1$

Oss chiave Se ho una soluzione

$x_0^2 - D y_0^2 = 1$, posso considerare

$$f := x_0 + y_0 \sqrt{D}$$

$$N(f) = 1 \longrightarrow N(f^2) = N(f)N(f) \\ = 1 \cdot 1 = 1$$

ES $x^2 - 3y^2 = 1$ $(2,1)$ e' soluz.

$$f = 2 + \sqrt{3}$$

$$f^2 = 7 + 4\sqrt{3}$$

$\downarrow$
 $(7,4)$ e' soluzione!

Teo Prendiamo il MINIMO numero reale

$$f = x_0 + y_0 \sqrt{D} \text{ con } f > 1, \text{ con } x_0, y_0 \in \mathbb{Z}$$

e $N(f) = 1$. Ogni soluzione

(x_n, y_n) di $x^2 - D y^2 = 1$ e' della

$$\text{forma } x_n + y_n \sqrt{D} = \pm (x_0 + y_0 \sqrt{D})^n$$

con $n \in \mathbb{Z}$

Oss Se $x + y \sqrt{D}$ e' una soluzione,

chi e' $(x + y \sqrt{D})^{-1}$? $x - y \sqrt{D}$

$$(x + y \sqrt{D}) \cdot (x - y \sqrt{D}) = x^2 - D y^2 = 1$$

Oss $\underbrace{2 + \sqrt{3}}_{\approx 3,73 \dots}$ e' la f di $x^2 - D y^2 = 1$

Algoritmo per soluz. minima

$$x^2 - 5y^2 = 1$$

$$(x/y)^2 - 5 = 1/y^2$$

$$\frac{2}{1} < \sqrt{5} < \frac{3}{1}$$

$$\frac{2+3}{1+1}$$

$$\frac{2}{1} < \sqrt{5} < \frac{5}{2}$$

$$\frac{2+5}{1+2} = \frac{7}{3}$$

$$\frac{2}{1} < \sqrt{5} < \frac{7}{3}$$

$$\frac{2+7}{1+4} = \frac{9}{4}$$

$$f = 9 + 4\sqrt{5}$$

Oss $N(2 + \sqrt{5}) = -1$

$\Downarrow$

$$N((2 + \sqrt{5})^2) = (-1)(-1) = +1$$

$\parallel$

$$N(9 + 4\sqrt{5})$$

Dim. Teo

$$(i) \quad \left| \sqrt{D} - p/q \right| < \frac{1}{q^2}$$

ci sono infiniti p, q interi
con questa proprietà

ESERCIZIO

(pigeonhole)

Lemma di DIRICHLET

$$|N(p + q\sqrt{D})| = |(p + q\sqrt{D})(p - q\sqrt{D})|$$

$$\begin{aligned}
&= \left| (p+q\sqrt{D}) \cdot q \cdot \left(\frac{p}{q} - \sqrt{D}\right) \right| \\
&\leq (p+q\sqrt{D}) \cdot q \cdot \frac{1}{q^2} \\
&= \frac{p}{q} + \sqrt{D} \leq 2\sqrt{D} + 1
\end{aligned}$$

Per pigeonhole, $\exists M \exists$ infinite coppie (p, q) tali che $p^2 - Dq^2 = M$ (qui M è un intero $\neq 0$ fra $-(2\sqrt{D}+1)$ e $2\sqrt{D}+1$)

Siano p_1, q_1 e p_2, q_2 coppie distinte t.c. $N(p_1 + q_1\sqrt{D}) = N(p_2 + q_2\sqrt{D})$

Idea
$$N\left(\frac{p_1 + q_1\sqrt{D}}{p_2 + q_2\sqrt{D}}\right) = \frac{N(\dots)}{N(\dots)} = 1$$

Se $\frac{p_1 + q_1\sqrt{D}}{p_2 + q_2\sqrt{D}}$ è della forma $a+b\sqrt{D}$,

l'uguaglianza sopra è vera e (a, b) è una soluzione della Pell.

$$\left(N\left(\frac{x}{y}\right) = N(x)/N(y) \Leftrightarrow N(x) = N(y) \cdot N\left(\frac{x}{y}\right) \right)$$

$$\frac{p_1 + q_1\sqrt{D}}{p_2 + q_2\sqrt{D}} = \frac{(p_1 + q_1\sqrt{D})(p_2 - q_2\sqrt{D})}{(p_2 + q_2\sqrt{D})(p_2 - q_2\sqrt{D})}$$

$$= \frac{(p_1 p_2 - D q_1 q_2) + (q_1 p_2 - p_1 q_2) \sqrt{D}}{M}$$

Vorremmo

$$\left. \begin{aligned} p_1 p_2 - D q_1 q_2 &\equiv 0 \pmod{M} \\ q_1 p_2 - p_1 q_2 &\equiv 0 \pmod{M} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} (1) \\ (2) \end{aligned}$$

Per pigeonhole, trovo (p_1, q_1) e (p_2, q_2)

con $N(p_i + \sqrt{D} q_i) = 1$ e

$$(p_1, q_1) \equiv (p_2, q_2) \pmod{M}$$

(2) è soddisfatta

(1): $p_1 p_2 - D q_1 q_2 \equiv p_1^2 - D q_1^2 = M \equiv 0 \pmod{M}$

(ii) Sia $f = x_0 + y_0 \sqrt{D}$ come nel testo
e sia $x + y \sqrt{D}$ una soluzione
qualunque. A meno di sostituire (x, y) con
 $(-x, -y)$, diciamo $x + y \sqrt{D} > 0$.

$$1 \leq (x + y \sqrt{D}) \cdot (x_0 + y_0 \sqrt{D})^m < x_0 + y_0 \sqrt{D}$$

è ancora una soluzione, perché

$$\begin{aligned} N((x + y \sqrt{D})(x_0 + y_0 \sqrt{D})^m) &= N(x + y \sqrt{D}) N(x_0 + y_0 \sqrt{D})^m \\ &= 1 \cdot 1^m = 1 \end{aligned}$$

Per minimalità di f ,

$$(x + y\sqrt{D})(x_0 + y_0\sqrt{D})^m = 1$$

$$\Rightarrow x + y\sqrt{D} = (x_0 + y_0\sqrt{D})^{-m} \quad \square$$

Es $x^2 - 34y^2 = -1$. Se ho una soluz

$$N(x + y\sqrt{34}) = -1, \text{ allora}$$

$$N((x + y\sqrt{34}) \cdot f^n) = -1$$

dove f è la soluz. fond di $x^2 - 34y^2 = 1$

Scegliendo bene l'esponente n (e cambiando segno se serve) possiamo trovare una

soluz. nell'intervallo $[\frac{1}{\sqrt{f}}, \sqrt{f}]$

$$\begin{aligned} |2x| &= |(x + y\sqrt{34}) + (x - y\sqrt{34})| \\ &= \left| x + y\sqrt{34} + \frac{-1}{x + y\sqrt{34}} \right| \end{aligned}$$

$$(f = 35 + 6\sqrt{34}) \leq |x + y\sqrt{34}| + \frac{1}{|x + y\sqrt{34}|}$$

convessità $\rightarrow$

$$\leq \sqrt{f} + \frac{1}{\sqrt{f}}$$

$$\leq 9$$

Conclusione: se $x^2 - 34y^2 = -1$ ha una soluz., allora ne ha una con $2/|x| \leq 9 \Rightarrow |x| \leq 4$, e si verifica che non ci sono soluzioni:

$$(x^2 - 34y^2 \leq 16 - 34 \leq -18 < -1)$$

$$x^2 - dy^2 = m$$

Es

$$d = 2$$

$$x^2 - 2y^2 = 7$$

$$(x, y) = (3, 1)$$

$$(x, y) = (-3, 1)$$

$$f : x^2 - 2y^2 = 1$$

$$f = 3 + 2\sqrt{2}$$

$$\frac{3 + \sqrt{2}}{-3 + \sqrt{2}} = \pm f^n ?$$

non sono interi.

$$\frac{(3 + \sqrt{2})(-3 - \sqrt{2})}{(-3)^2 - 2} = \frac{-9 - 2 - 6\sqrt{2}}{7} = \frac{-11 - 6\sqrt{2}}{7}$$

PROBLEMI

$$[\text{Olanda TST 2018}] \quad (a+b)^3 - 2a^3 - 2b^3$$

Trovare le coppie (a, b) per cui $\nearrow$ è una potenza di 2
interi > 0

$$[\text{EGMO 2016/P6}]$$

$$S = \{n : \text{almeno uno fra } n^2+1, n^2+2, \dots,$$

$$\{n^2 + 2n \text{ divide } n^4\}$$

Dim che S contiene infiniti $n \equiv 0, 1, 2, 5, 6 \pmod{7}$

ma nessun $n \equiv 3, 4 \pmod{7}$

[BMO 2015/4] Tra 20 interi consecutivi

ce n'è almeno uno, d , tale che

$$n\sqrt{d} \cdot \{n\sqrt{d}\} > 5/2$$

per ogni $n \geq 1$ ($\{x\} = x - \lfloor x \rfloor \in [0, 1)$)

Altro pto di vista sulle soluzioni:

$$X_n + \sqrt{D} Y_n = (x_1 + y_1 \sqrt{D})^n$$

$$X_{n+1} + \sqrt{D} Y_{n+1} = (x_1 + y_1 \sqrt{D}) (X_n + Y_n \sqrt{D})$$

$$= x_1 X_n + y_1 y_n \cdot D$$

$$+ \sqrt{D} \cdot (x_1 y_n + y_1 x_n)$$

$$\begin{cases} X_{n+1} = x_1 \cdot X_n + (D y_1) \cdot y_n \\ Y_{n+1} = x_1 \cdot y_n + y_1 \cdot X_n \end{cases}$$