Winter Camp 2024 - Geometria 2

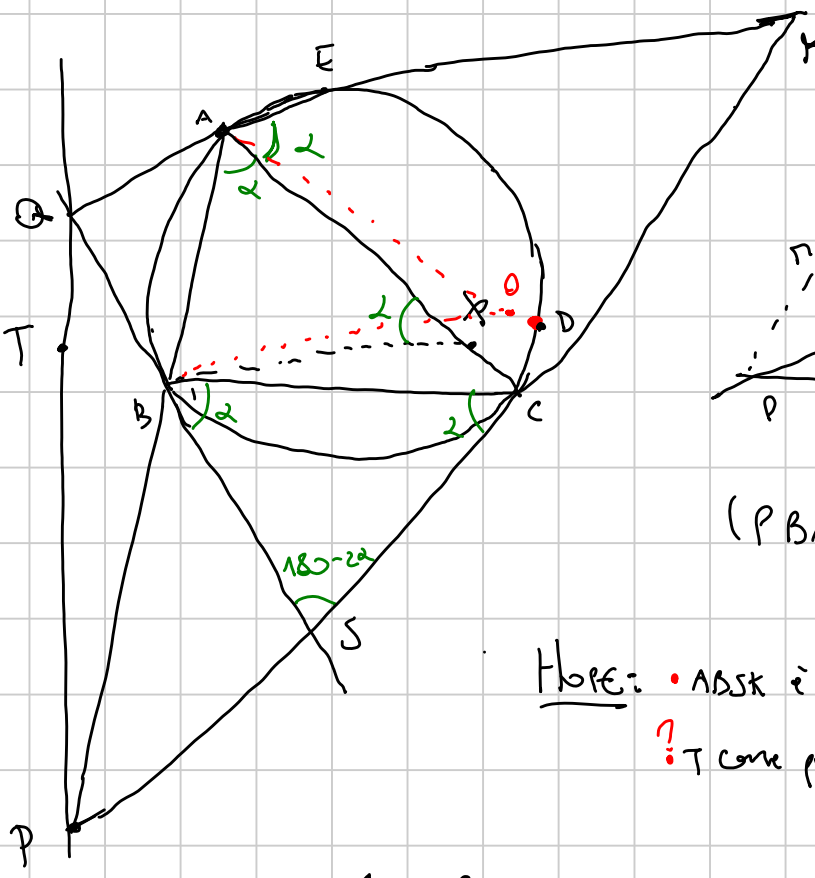
Note Title 06/02/2023

$OA = OB$

O manda AX in BC, quindi $O\hat{A}X = O\hat{B}C$

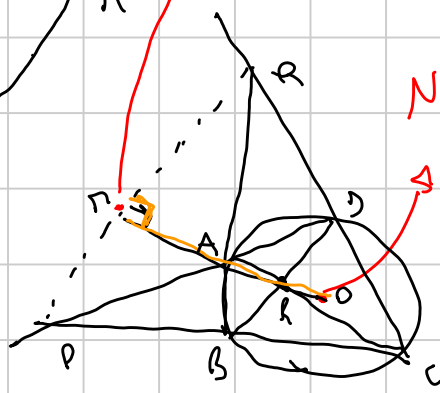
$ABX \sim BCS$

Non solo, ma $AX = BC$ quindi sono congruenti!



Nel nostro caso è T

Nel nostro caso è D



$(PBA\Pi), (PCD\Pi), (QDA\Pi), (QCB\Pi)$

Hope: • $ABSK$ è un quadrilatero ciclico, con

? T come punto di Miquel

$C\hat{A}E = ?$ $\quad E$ t.c. $CE = BC$ $\quad C\hat{A}E = B\hat{A}C = \alpha$

Wow! $ABSK$ è ciclico perché $B\hat{S}K = 180 - 2\alpha = 180 - B\hat{A}K$

Ora ci manca dire che T è il punto di Miquel di $ABSK$.

Ma, dalla teoria che non sappiamo benissimo sul pto di Miquel, ci ricordiamo che il punto di Miquel ha anche la proprietà di essere la proiezione del centro sulla retta PQ

Sappiamo $DA = DB$, dunque D sta sull'asse di AB

Ma se ABX e BCS sono congruenti e sono orientati allo stesso modo, esiste una rotazione che manda ABX in BSC

Chi sarà il centro di questa rotazione?

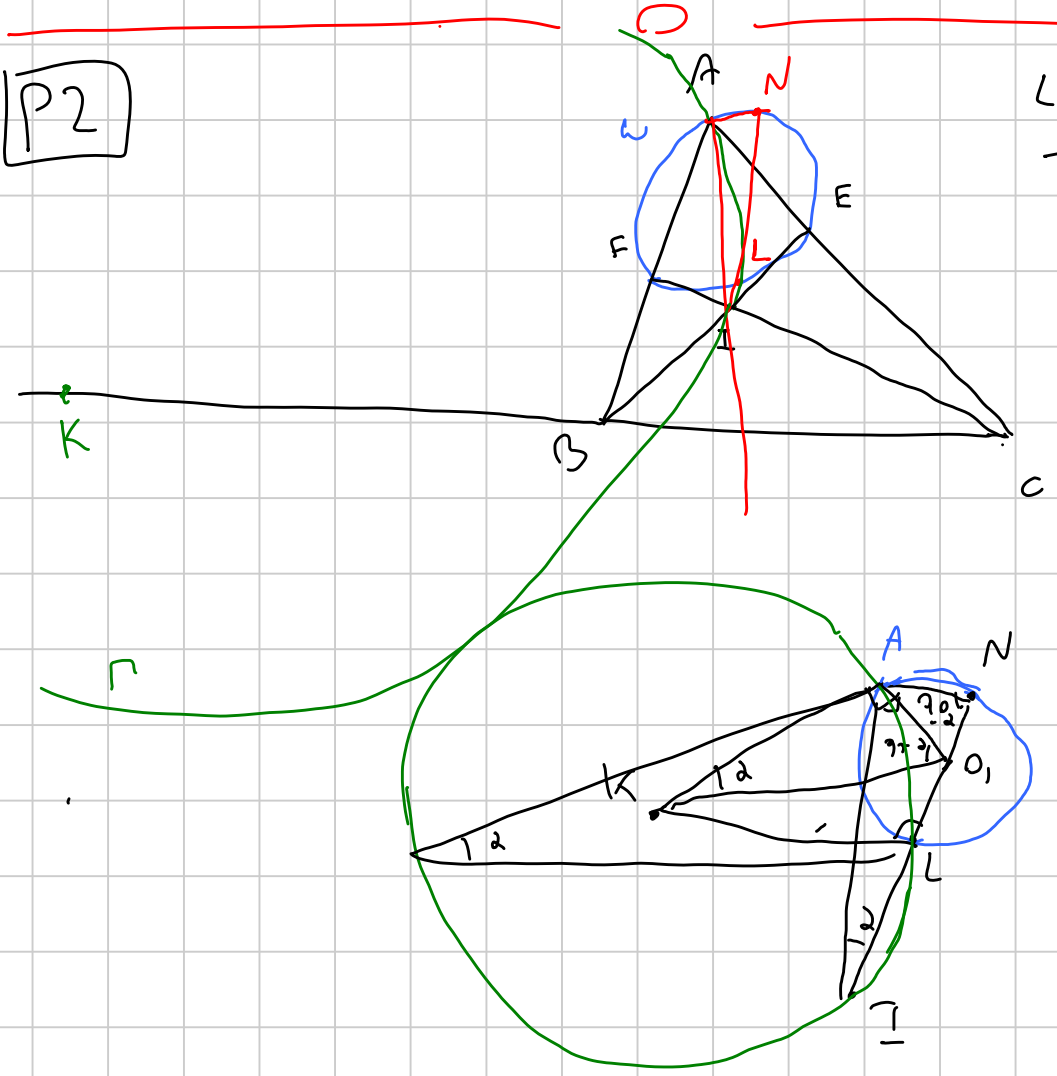
Se mettiamo insieme $OA=OB$ e $O\hat{A}x = O\hat{B}C$ cosa troviamo?

$O\hat{B}C = O\hat{A}x = O\hat{A}C \Rightarrow (ABCO)$ ciclico + $OA=OB \to O=B$

Dunque troviamo $DB=DS$

" DA $\Rightarrow D$ è il centro di $(ABS) = (ABSK)$

P2



$L = NI \cap \omega$

Tesi: circocentro $(AIL) \in BC$

$\Downarrow$

$KA = KL \ (= K_1)$

Claim: KA tange ω

Γ e ω sono ortogonali

$\angle ANL = 90 - 2$

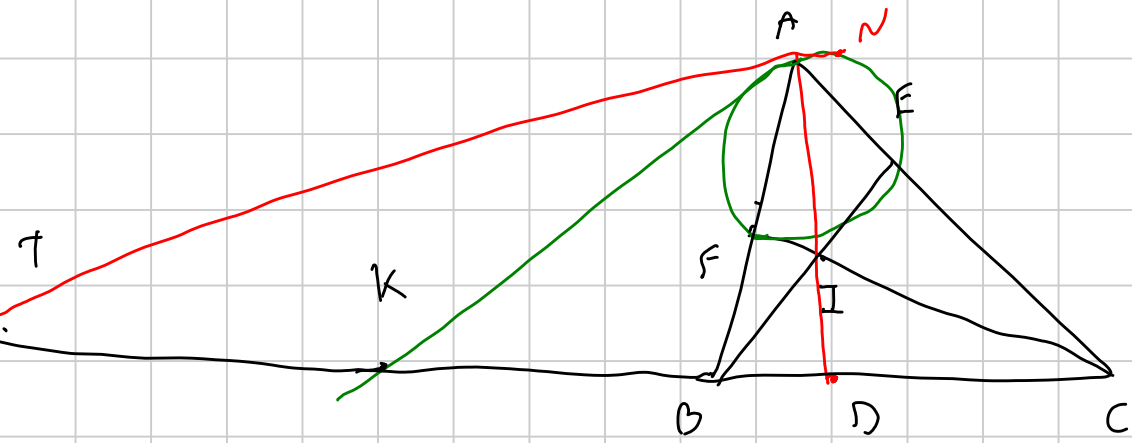
$\angle AIL = 2$

$\triangle ANI \to \angle ANI = 90-2$, $\angle AIN = 2$ $\Rightarrow$ $\angle AO_1K = 90-2$, $\angle AKO_1 = 2$ } $KA \perp AO_1$ $\Rightarrow$ Γ, ω ortogonali

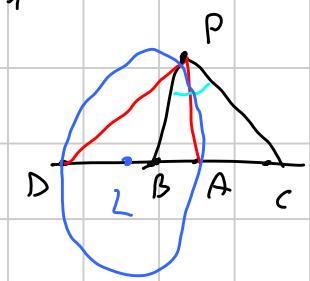
K circocentro di $AL I$, KA tange ω $\xrightarrow{?}$ $K \in BC$

$K = BC \cap t_3 A$ $\longrightarrow$ $K \in$ asse AI $\longrightarrow$ tesi: $KA = KI$

Ho eliminato L



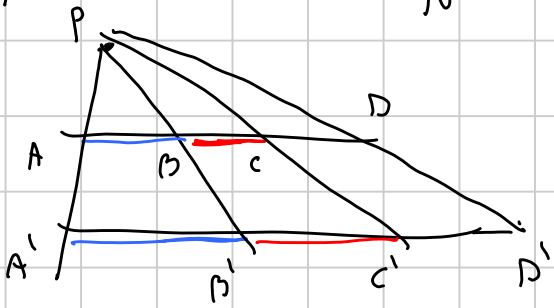
(B, C, T, D) quaterna armonica

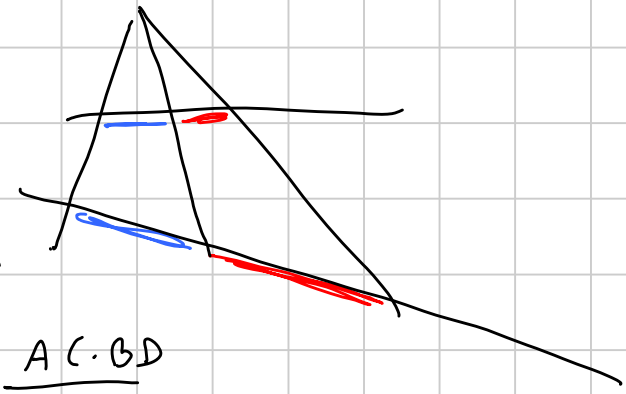


$LP = LA$

B, C inversi

Avventura nei birapporti

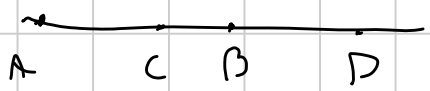




$$(A, B; C, D) = \frac{\frac{AC}{BC}}{\frac{AD}{BD}} = \frac{AC \cdot BD}{BC \cdot AD}$$

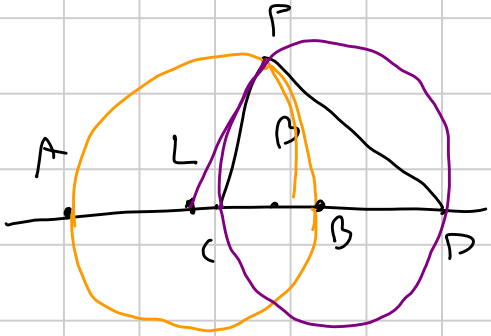
Fatto 1: $(A, B; C, D) = (A', B'; C', D')$ se proiettato da P

Fatto 2



Se $(A, B; C, D) = -1$ $\left(= (B, A; C, D) \right)$

$\rightarrow$ quaterna armonica



P t.c. $\frac{PC}{PD} = \frac{BC}{BD} = \frac{AC}{AD}$

$P \in$ circ appellata di diametro AB

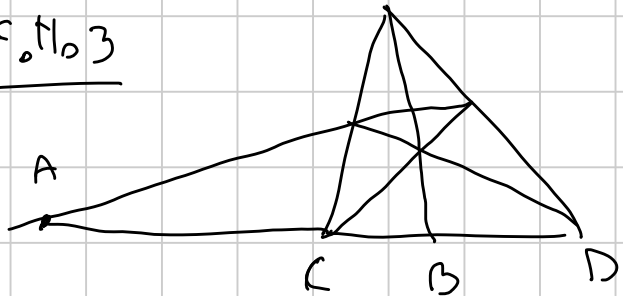
L centro di $\uparrow$, L pt medio di AB

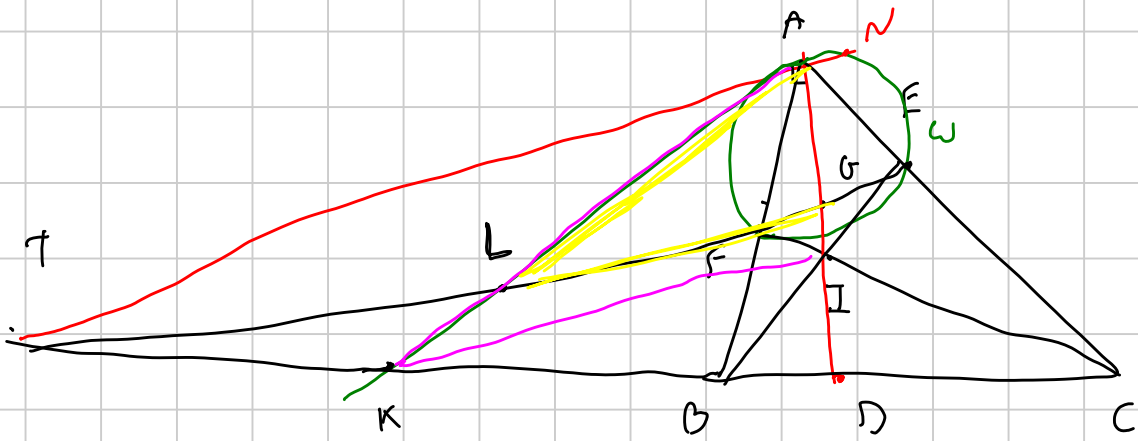
$LB^2 = LP^2 = LC \cdot LD$

$\hookrightarrow$ LP tange $\odot PCD$

$(A, B; C, D) = -1$

Fatto 3





$T = EF \cap BC$

$(B, C; D, T) = -1$

$A \in \text{Apoll}_{BC}(TD)$

$\Rightarrow TAD$ armonica

$\Rightarrow TAN$ allineati

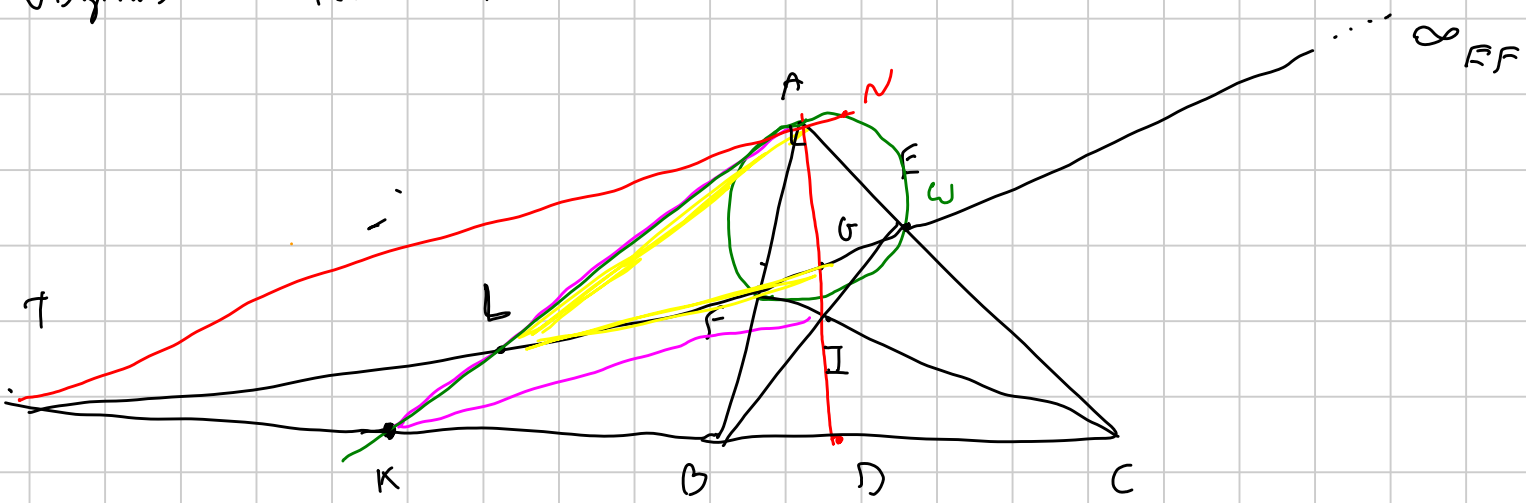
Anche $(T, G, E, F) = -1$ definisco L pt medio di TG

$\Rightarrow L$ è il centro della circ. Apollonio per T e G

$\Rightarrow LT = LG = LA$ $\quad LA^2 = LE \cdot LF$

$\Rightarrow LA$ tange $\bigcirc AEF$ $\Rightarrow L, A, K$ sono allineati

Sappiamo che $LA = LG$
Vogliamo che $KA = KI$
$\Big\}$ Tesi $\Leftrightarrow$ rette EF e KI sono $\parallel$



$(T, D, B, C) = -1$

$TL = LG \Rightarrow (T, G, L, \infty_{EF}) = -1$

$KI \cap EF$

retta BC $(T, D; B, C) = -1$ — proietto su EF — retta AI $(G, D, I, A) = -1$

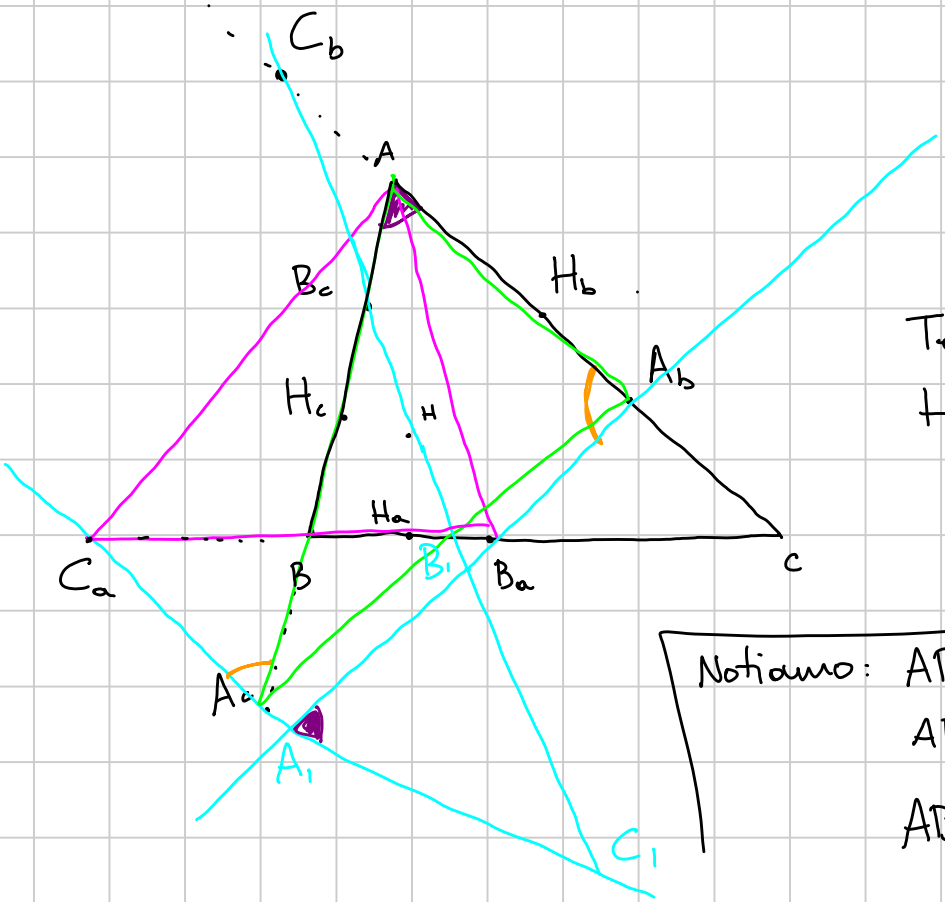
K: retta EF $(G, T, \bigcirc, L) = -1$

$(T, G, KI \cap EF, L) = -1$

deduco che $KI \cap EF = \infty_{EF}$

$\Rightarrow KI$ e EF sono parallele

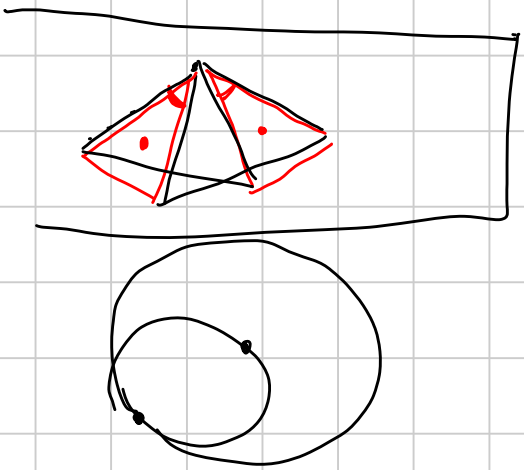
G3)



Tesi:
$H \in$ Eulero $(A_1B_1C_1)$

Notiamo: $ABC \tilde{\sim} AB_aC_a$
$ABC \tilde{\sim} AH_bH_c$
$ABC \tilde{\sim} AA_bA_c$

$\rightarrow AB_aC_a \overset{+}{\tilde{\sim}} AA_bA_c$



$\rightarrow AC_aA_c \overset{+}{\tilde{\sim}} AB_aA_b$

$\rightarrow$ $AA_cA_1A_b$ cyc di centro H

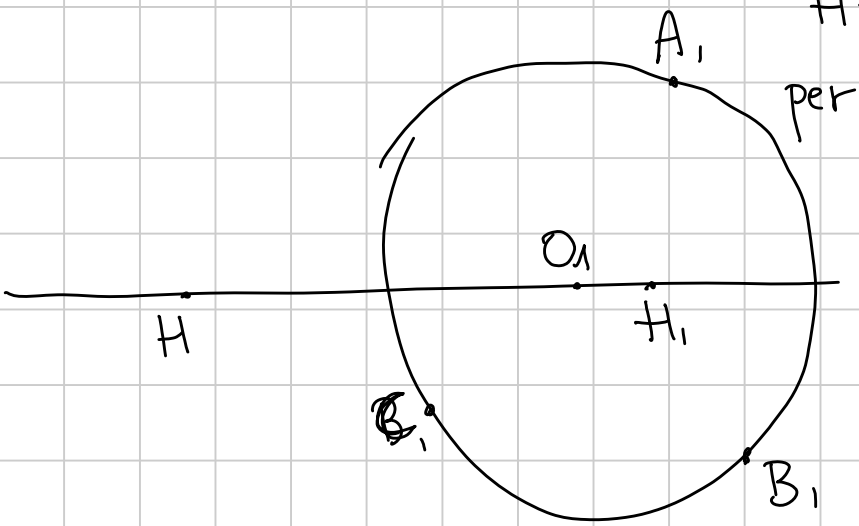
$\rightarrow ABC \tilde{\sim} A_1B_1C_1$

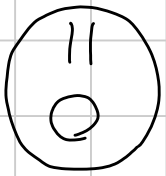
$$AH / A_1H_1 = BH/B_1H_1 = \frac{CH}{C_1H_1}$$

$$\rightarrow \boxed{\frac{A_1H}{A_1H_1} = \frac{B_1H}{B_1H_1} = \frac{C_1H}{C_1H_1} = \lambda}$$

Consideriamo la circonf. di Apollonio
H, H_1, λ

$\{P \mid \frac{PH}{PH_1} = \lambda\}$ è una circonf., simmetrica rispetto ad HH_1, che passa per A_1, B_1, C_1





□