

WC 2026 Algebra

Note Title

2026
28/08/2024
01

$$1) f: \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{Z}^+ \text{ i.r.}$$

$$\forall a, b \in \mathbb{Z}^+ \quad \overset{2f(b)}{f(2a)} = f(f(a+b)) + a + b.$$

Solution

$$f(x) = x + 1$$

$$((2a+1)+1)+1 \dots +1 = (a+b+1)+1 + a+b$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{2b+2}$

$$2a + 2b + 2 = 2a + 2b + 2 \quad \checkmark$$

$$a=b=1$$

$$\overset{2f(1)}{f(2)} = f^2(2) + 2$$

$$f(1) \neq 1$$

$$f(1) > 1$$

$$\overset{2f(b)}{f(2a)} = f^2(a+b) + a+b$$

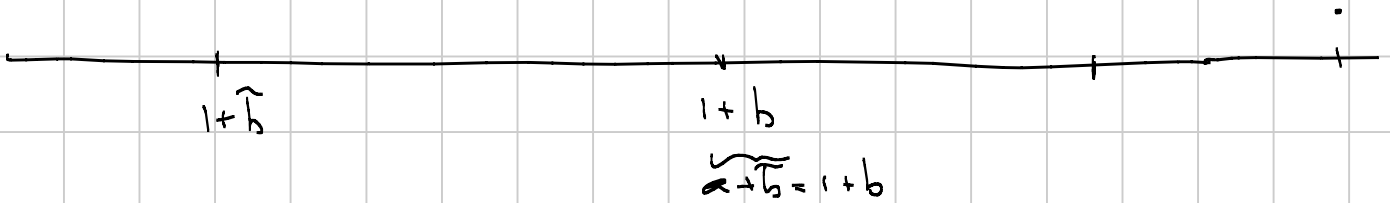
$$b > \bar{b} \quad f(b) = f(\bar{b})$$

$$\overset{2f(b)}{f(2a)} = \overset{2f(\bar{b})}{f(2a)}$$

$$f^2(a+b) + a + b = \underbrace{f^2(a + \tilde{b}) + a + \tilde{b}}_{= f^2(a+b) + b - \tilde{b}} \quad b > \tilde{b}$$

!

$$f^2(1+\tilde{b})$$



$\Rightarrow$ f iniettiva

$$k > a, b$$

$$f^2(k-a) = f^2(k-b)$$

$$S_e \quad \boxed{f(k-a) > f(k-b)}$$

$$f^2[f(k-a) - f(k-b)] \quad \text{⤵}$$

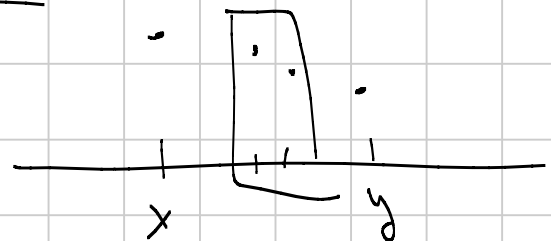
$$\underline{f(2a)} = \underline{2b}$$

• $f^m(2a) = 2a$ Questo No

f crescente:

~~per assurdo~~

$$x < y \quad \text{d.l.r.} \quad f(x) > f(y)$$



$$(k, a, b)$$

$$\boxed{\begin{matrix} y = k - b \\ x = k - a \end{matrix}}$$

$$\boxed{f(k-b) > f(k-a)}$$

$$k > a > b$$

$$\Rightarrow \frac{2[f(k-b) - f(k-a)]}{(2b)} = \underline{2a}$$

$$y = x + 1$$

$$k = x + 2$$

$$b = 1$$

$$a = 2$$

$$f(\tilde{k} - b) < f(\tilde{k} - a)$$

$$\frac{2[f(\tilde{k} - a) - f(\tilde{k} - b)]}{(2a)} = \underline{2b}$$



$$f(k - b) > f(k - a) \quad \forall k > a, b$$

$$f(k - 1) > f(k - 2) \quad \checkmark \checkmark$$

$$\begin{array}{l} f(1) \neq 1 \\ \text{Ind} \quad f(1) \geq 2 \\ f(a) \geq a + 1 \end{array} \quad f(2) \geq f(1) + 1 \geq 3$$

$$a = b.$$

$$f(2a) = \frac{2f(a)}{V_1} = \underline{\cancel{f^2(a)} + 2a}$$

$$\underline{\cancel{f^2(a)} + 2f(a) - 2a + 1} \leq f(a) \leq \underline{a + 1}$$

A2

Dati
determina

n, n

$n \leq n$

min d

per

cui

questione

$n - v_{pl}$

di

rest

$a_1, \dots, a_n$

SAPPIAMO TROVARE

f polinomio in n variabili
di grado $\leq d$ per cui non sia nullo

è

$$f(a_{\sigma(1)}, \dots, a_{\sigma(n)}) = 0$$

$\forall \sigma$ biestensione su $1, \dots, n$

$$n = n$$

$$n = 1$$

$$\sum a_i - \sum x_i$$

$$n = 1$$

polinomio in 1 variabile
che si annulla in $a_1, \dots, a_n$

quindi almeno $(x - a_1) \dots (x - a_n)$

per n più piccoli d è monotono

$$n = 1 \quad n = 3$$

$$n = 2 \quad d = 2$$

$$n = 2 \quad n$$

$$d = n - n + 1$$

$$d \leq n - n$$

$$\forall j$$

$$f(b_1, \dots, b_{n-j}, x_{n-j+1}, \dots, x_n) = 0$$

Induzione:

$j=0$ è l'ipotesi

$j+1$ se che $f(b_1, \dots, b_{n-j-1}, \boxed{x_{n-j}}, \dots)$

è una somma di monomi

in $x_{n-j+1}, \dots, x_n$ per cui polinomio

in x_{n-j} di grado $\leq n - n$

ma se per induzione,

$$f(b_1, \dots, b_{n-j}, \dots)$$

$$\alpha_0(n), \alpha_1(n), \dots, \alpha_{n-n}(n) \quad \left. \begin{array}{l} \text{ } \\ \text{ } \end{array} \right\} \begin{array}{l} n-n \\ \text{nessuno} \end{array} \quad \boxed{n-n}$$

$$f(\alpha_0(n), \dots, \alpha_{n-n}(n), x_n) \quad \text{si annulla} \\ \text{per } x_n = \alpha_0(n), \alpha_1(n), \dots, \alpha_{n-n}(n)$$

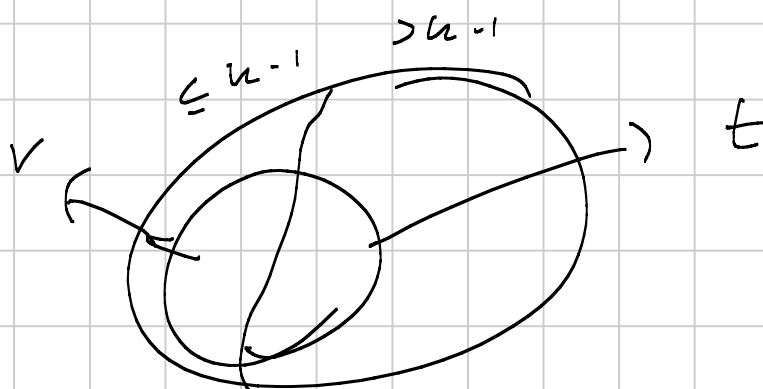
$$= \prod_{c=1}^n (x_n - \alpha_c(n))$$

$$= \sum \underbrace{f_i(\partial \sigma(n), \dots, \partial \sigma(n-1))}_{\rightarrow} x_n^i$$

$$e_j(\partial \sigma(n), \partial \sigma(n), \dots, \partial \sigma(n)) =$$

$$\begin{aligned} f_i &= \\ e_{n-n-i+1}(x_n, \dots, x_n) &= \\ \leq n-n+1-i &= \\ = n-n+1 \end{aligned}$$

$$e_j(\partial \sigma(n), \partial \sigma(n), \partial \sigma(n), \dots, \partial \sigma(n))$$



$$e_j(x_1, \dots, x_n) = \sum_{v+t=j} e_v(x_1, \dots, x_{n-1}) e_t(x_n, \dots, x_n)$$

$t \neq j$

$$e_j(x_1, \dots, x_n) = \boxed{e_j(x_1, \dots, x_n)} - \sum_{\substack{v+t=j \\ t \neq j}} e_v(x_1, \dots, x_{n-1}) e_t(x_n, \dots, x_n)$$

e_j ma
grano j

$t < j$

$\leq \deg t$

$e_n = 1$

Indicatore di grado

Che

Spazio

generato

e_j

com

A3 Per $n \geq 4$ definiamo n -giusta una n -upla $(a_1, \dots, a_n)$ di reali con

$$\sum a_i = n, \quad \sum a_i^2 = 2n, \quad \sum a_i^3 = 3n$$

(i) Trovare la migliore costante C tale che

$$\max(a_1, \dots, a_n) - \min(a_1, \dots, a_n) \geq C \quad \text{per ogni scelta}$$

$$(ii) \max(a_1, \dots, a_n) - \min(a_1, \dots, a_n) \geq C + C_2 \cdot n^{-3/2}$$

per qualche $C_2 > 0$

Oss: chiaramente (i) non ha casi di uguaglianza, ma dobbiamo andare a guardare $n \rightarrow +\infty$.

Giustamente, le condizioni sono tutte omogenee.

Questo ci fa pensare che il problema sia più continuo di quello che sembra.

Riformulazione: trovare la migliore costante C t.c.

$\forall k, b_1, \dots, b_k \in \mathbb{R}, t_1, \dots, t_k \geq 0$ con $t_1 + \dots + t_k = 1$

e $\sum b_i t_i = 1, \sum b_i^2 t_i = 2, \sum b_i^3 t_i = 3$ valga

$$\max(b_1, \dots, b_n) - \min(b_1, \dots, b_n) \geq C.$$

L'idea è che le condizioni siano molto poche, quindi anche k sarà piccolo (altrimenti riesco a perturbare)

Opzione 1: provo $k=2$ e scrivo il sistema

Opzione 2: osservo che $\sum (b_i^2 - b_i - 1) t_i = 0$ ma anche $\sum b_i (b_i^2 - b_i - 1) t_i = 0$

Se prendo $b_1 = \phi$ e $b_2 = 1 - \phi$ ottengo il sistema

$$\begin{cases} t_1 + t_2 = 1 \\ \phi t_1 + (1-\phi)t_2 = 1 \end{cases} \quad \text{che ha soluzioni positive}$$

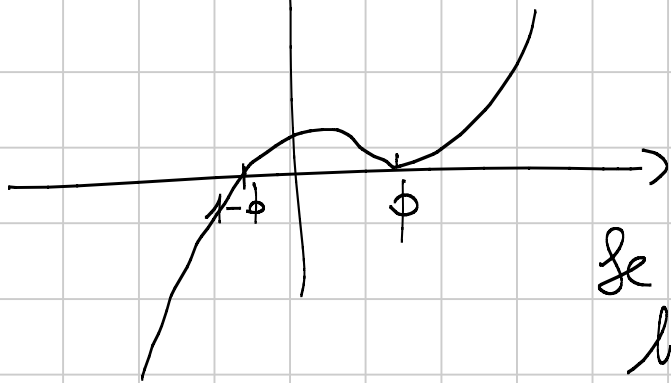
Così otteniamo $C \leq \sqrt{5}$.

Dimostriamo che è ottimale.

$$\sum_{i=1}^n (a_i^2 - a_i - 1) = 0, \quad \sum_{i=1}^n (a_i (a_i^2 - a_i - 1)) = 0$$

Per ogni $f \in \mathbb{R}[x]$ con $\deg f = 3$ e $x^2 - x - 1 \mid f(x)$
 ho $\sum_{i=1}^n f(a_i) = 0$

Proviamo $f(x) = (x^2 - x - 1)(x - \phi)$



A meno che $a_i \in \{\phi, 1-\phi\}$
 $\forall i$ deve esistere i t.c.
 $f(a_i) < 0$ e cioè $a_i < 1-\phi$

Se invece prendo $f(x) = (x^2 - x - 1)(x - (1-\phi))$
 ho $f(a_i) > 0$ per qualche i

$\max \geq \phi$

Digressione: se ho α irrazionale radice di un polinomio f di grado 2 a coefficienti interi, quanto bene posso approssimarlo con $\frac{m}{n}$?

$$\left(\frac{m}{n} - \alpha\right)\left(\frac{m}{n} - \beta\right) = f\left(\frac{m}{n}\right)$$

$$(m - \alpha n)(m - \beta n) = n^2 f\left(\frac{m}{n}\right)$$

$$\Rightarrow |m - \alpha n| \geq \frac{1}{|m - \beta n|} \sim \frac{1}{n}$$

$$\left|\frac{m}{n} - \alpha\right| \geq \frac{1}{n^2}$$

Idea: continuo a usare polinomi di terzo grado, ma voglio saper gestire molto bene le variazioni intorno alle due radici di $x^2 - x - 1$.

$$f'(\phi) = f'(1-\phi) = 0 \quad e \quad \sum_{i=1}^n f(a_i) = 0$$

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 6x + 6 \text{ soddisfa}$$

$$\sum f(a_i) = 0$$

$$f(\phi) = 5(1-\phi) \quad e \quad f(1-\phi) = 5\phi$$

Scrivo $a_i = \phi + b_i$ oppure $a_i = 1 - \phi - b_i$ a seconda se a_i sia più vicino all'una o l'altra radice.

$$\sum f(a_i) = 0$$

$$\text{Scrivo } f(a_i) = f(\phi) + [f(\phi + b_i) - f(\phi)] \sim f(\phi) + c b_i^2.$$

$$\text{Considero } |k f(\phi) + (n-k) f(1-\phi)| \geq \frac{c_{\text{cost}}}{n}$$

$$\Rightarrow \sum b_i^2 \geq \frac{1}{n}$$

$$\text{Possiamo scrivere } \sum b_i^2 = \sum_{b_i > 0} b_i^2 + \sum_{b_i < 0} b_i^2$$

$$\text{Avremo che } \sum_{b_i > 0} b_i^2 > \frac{1}{n} \text{ oppure } \sum_{b_i < 0} b_i^2 > \frac{1}{n}.$$

Nel primo caso ho finito perché $\exists i + c. \quad b_i^2 > \frac{1}{n^2}$
e $b_i > \frac{1}{n} \Rightarrow$ tesi.

$$\text{Nel secondo caso ho } \sum_{b_i < 0} b_i^2 > \frac{1}{n}$$

$$\Rightarrow \sum_{b_i < 0} |b_i| > \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Ma adesso mi ricordo che $\sum_{i=1}^n (a_i^2 - a_i - 1) = 0$
e posso circa dire che $a_i^2 - a_i - 1 \approx c b_i$

$\Rightarrow$ la somma dei termini negativi in modulo è almeno $\frac{1}{\sqrt{n}}$ $\Rightarrow$ la somma dei positivi è $\geq \frac{1}{\sqrt{n}} \Rightarrow$ almeno uno dei positivi è $\geq \frac{1}{n^{3/2}} \Rightarrow$ almeno uno dei b_i è $\geq \frac{1}{n^{3/2}}$.

Per completezza, mancherebbero due cose:

- Una costruzione più precisa dell'esempio
- Una trattazione più precisa delle costanti della seconda parte