

WC 2026 - COMBINATORIA

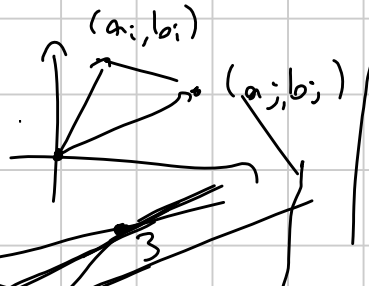
Note Title

27/09/2024

$N \ni (a_1, b_1), \dots, (a_{1000}, b_{1000}) \quad a_i, b_i \in \mathbb{N}^+$

talché $\exists N (i, j) \quad 1 \leq i < j \leq 1000$

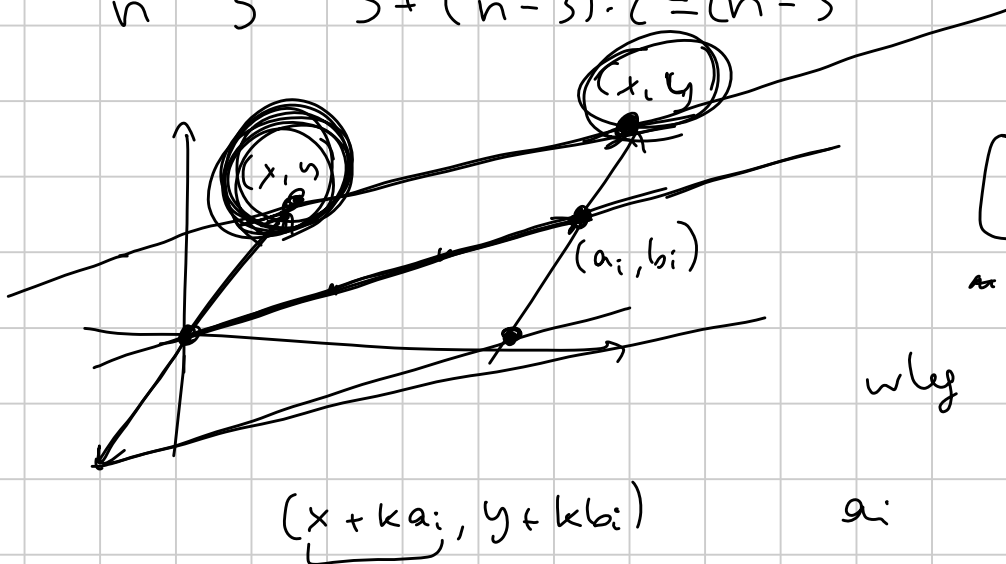
$$|a_i b_j - a_j b_i| = 1$$



$$n=3$$

$$n=4 \rightarrow 5$$

$$n=3 \quad 3 + (n-3) \cdot 2 = 2n-3$$



$$(x, y) + k(a_i, b_i)$$

$$\text{why } k > 0$$

a_i

$$x > 0 \quad x + ka_i > a_i$$

$$k=0$$

C2 IL MINIMO È 676

PASSO 1: Esibire insieme di croci 675-griudato
per cui non si può colorare



$$x+z=675$$

$$y+z=675$$

$$x+y+z \leq 1350$$

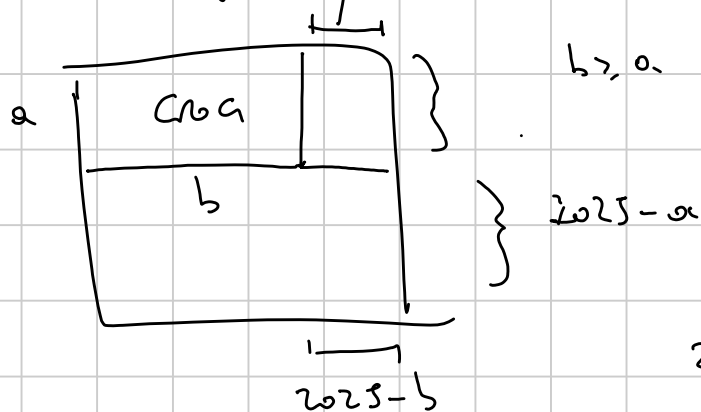
$$x+y+z$$

• È 675-griudato

② Per ogni insieme di croci 676-grigliato posso colorare

Osservazione 1: Se potessimo partizionare l'insieme di croci in 2 sottoinsiemi 1-grigliati avremmo fatto.

Osservazione 2: I Rettangoli 1-grigliati sono quelli con semiperimetro ≥ 2026



Prendo al più $2025-a$
 $+ 2025-b$
 torri fuori del rettangolo

$$2025 \cdot 2 - a - b \leq 2024$$

Speranza: trovare 2 rettangoli, ciascuno con semiperimetro ≥ 2026 , disgiunti, in quell'insieme 676-grigliato.



LEMMA CHIAVE: Un insieme k -grigliato contiene un "rettangolo" di semiperimetro $\geq 2025+k$

PROVA (LEMMA $\rightarrow$ LINE):

Dim 1. a, b sono le dimensioni del rettangolo (bzo)

$$a+b \geq 2025 + \text{bzo } 676 = 2025 \cdot \frac{4}{3} + 1$$

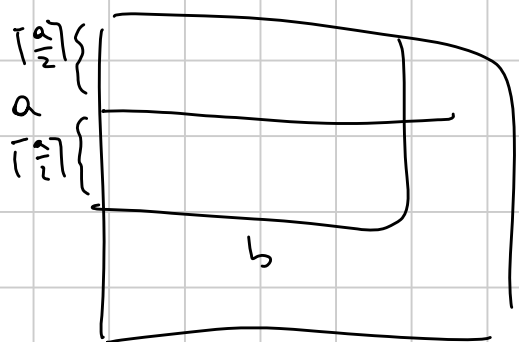
$$(2b+a) + (2a+b) = 3(a+b) = 2025 \cdot 4 + 3$$

$$\text{Claim: } b + \left\lfloor \frac{a}{2} \right\rfloor \geq 2026$$

$$\bullet \text{ Se } a \text{ pari } 2b+a \geq \sqrt{2025 \cdot 4 + 3} = 2026.2 \checkmark$$

$$\bullet \text{ Se } a \text{ dispari } 2b+a \geq 2026.2 + 1$$

$$\Downarrow b + \left\lfloor \frac{a}{2} \right\rfloor \geq 2026$$

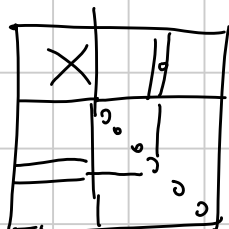


Quindi posso partizionare

MANCA IL LEMMA: Se posso prendere max le torri (posizionate bene) che non si guastano
 che nessuna delle quali sta su una croce
 allora ho un "retangolo" di croci di semiperimetro $\geq 2025.2 - l$
 EQUIVALE ALL'ALMO PENCHÉ $676 - \text{grindato} \Rightarrow l \leq 1369 \Rightarrow \text{semiperimetro} \geq 2025.2 - 1369 = \frac{4}{3} \cdot 2025$

dimostrazione:

• Strada almanhense:



• Strada tecnica:

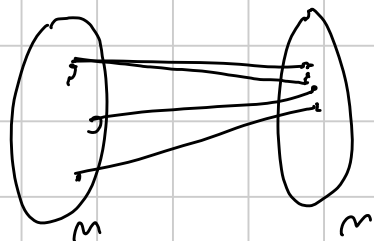
Dilworth: Dato un Poset (insieme parzialmente ordinato)

Catena: $a_1 < a_2 < a_3 \dots < a_n$ $a_i < a_j$ $i < j$

Anticaten: Un insieme senza relazioni

In poset finito la lunghezza della maxima anticatena
 minimo numero di catene in cui posso partizionare

Nel caso di un grafo bipartito con 2u vertici



Cosa dice Dilworth in questo caso:
 anticatena di lunghezza massima =

= per insieme di a vertici a dx,
b vertici a sx che non si parlano
(anticorre)
e con a+b moneta

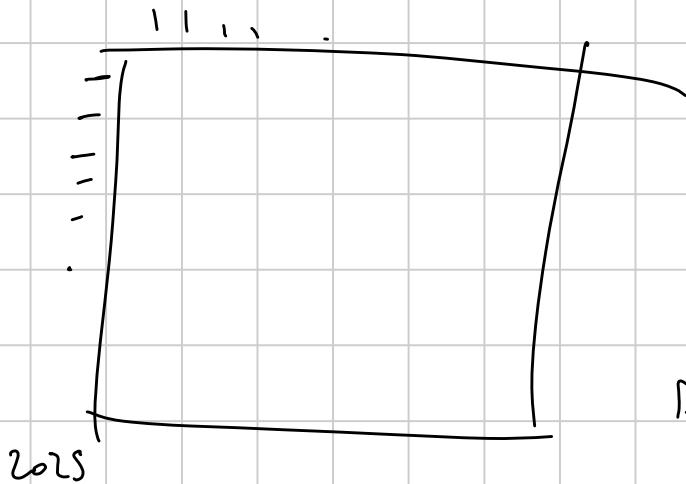
Minima partizion in catene $\longleftrightarrow$ ci si possono prendere al
massimo le coppie ^{DISGIUNTE} di
vertici collegati
è da $2n-1$

MASSIMO NUMERO DI COPPIE
DISGIUNTE COLLEGATE = l $\longleftrightarrow$ MIN. PART. IN ANTE CATENE
 $2n-1$

Dilworth
(corollario)
MAXIMA lunghezza
di catene $2n-1$

Il max a+b per cui posso
prendere a vertici a dx e
b " a sx

totalmente scollegati è $2n-1$



Righe $\rightarrow$ 2025 elementi
a sx

Colonne $\rightarrow$ 2025 elementi
a dx

Dove non c'è la ~~xx~~ x molto
in alto

le rook placement massimo corrisponde
a insieme di coppie disgiunte collegate

~~Anticorre~~ Anticorre: a vertici sx, b vertici a dx tutti scollegati
con $a+b = 2n-1$

un insieme di a righe e b colonne che si incontrano tutte le
volte $a+b = 2n-1$

$$l \leq 1369$$

$$a+b \geq \frac{4}{3} \cdot 2025 + 1$$

3. Sia a_n il numero di permutazioni $\sigma: \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$ con $\{\frac{\sigma(i)}{i}\}$ tutti distinti. Tesi: a_n è dispari.

Osservazione: la condizione che gli $\frac{\sigma(i)}{i}$ siano tutti distinti sembra davvero difficile da gestire.

Notiamo che σ può avere al più un punto fisso.

Visto che la condizione è strana, siamo più portati a guardare la struttura di questo insieme di permutazioni che non a fare conti precisi.

Obiettivo: data σ (il)legale, trovare un modo per costruire altre permutazioni (il)legali.

Oss: σ è legale $\Leftrightarrow \sigma^{-1}$ è legale

Se $\{\frac{\sigma(i)}{i}\}$ sono tutti distinti, allora $\{\frac{\sigma(j)}{j}\}$ sono tutti distinti.

Questo accoppia tra di loro tutte le permutazioni σ con $\sigma \neq \sigma^{-1} \Rightarrow$ basta contare le permutazioni legali con $\sigma^2 = \text{Id}$.

$\sigma^2 = \text{Id} \Leftrightarrow$ ha cicli da 2 e punti fissi

$\Rightarrow$ ci basta guardare tra le permutazioni con $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ cicli da 2.

Se $n = 2m$ le perms con m cicli da 2 sono $(2m-1)!!$
 $n = 2m+1$ " " $(2m+1)!!$

Tesi $\Leftrightarrow$ le permutazioni con $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ cicli da 2 illegali sono in numero pari.

Se $n=2m$ scegliere una permutazione di questo tipo significa scegliere (a_i, b_i) ($1 \leq i \leq m$), $a_i < b_i$ e $\{a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_m\} = \{1, 2, \dots, 2m\}$ in modo che $\exists i < j$ con $\frac{b_i}{a_i} = \frac{b_j}{a_j}$

Congettura: è completamente irrilevante che i numeri siano quelli da 1 a $2m$, ma posso sostituirlo con S insieme qualsiasi di cardinalità giusta.

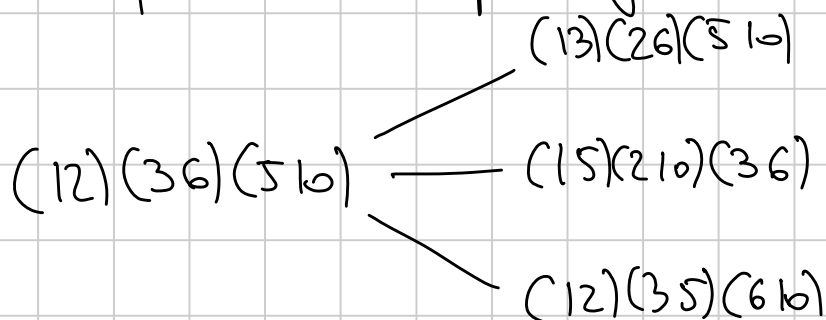
Per ogni $S \subset \mathbb{R}^+$ con $|S| = 2m$ il numero di modi per scegliere (a_i, b_i) con $a_i < b_i$, $\{a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_m\} = S$ e $\exists i < j$ t.c. $\frac{b_i}{a_i} = \frac{b_j}{a_j}$ è pari.

Osservazione incredibile: $\frac{b_i}{a_i} = \frac{b_j}{a_j} \Leftrightarrow \frac{a_j}{a_i} = \frac{b_j}{b_i}$

Euristicamente, questo assomiglia a un accoppiamento delle configurazioni.

Provo a renderlo preciso e farlo diventare un accoppiamento.

Ma questo non può funzionare



L'accoppiamento non funziona. Di fatto abbiamo costruito un grafo tra le permutazioni illegali.

Se riuscissi a dire che hanno tutte grado dispari sarei contento. Ma questa cosa non succede.

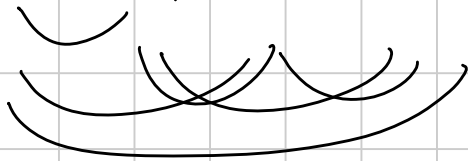
Idea: collego la mia permutazione a tutte quelle che posso ottenere con scambi disgiunti, cioè con operazioni del tipo $(a; b_i)(a_j; b_j) \rightarrow (a; a_j)(b_i; b_j)$ con $a; b_j = a_j; b_i$

(finché le coppie $\{i, j\}$ sono tutte disgiunte)

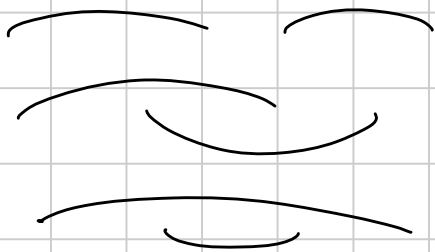
Calcolo il grado di ciascun vertice.

Se ho $k_1, k_2, \dots, k_t$ -uple di coppie con lo stesso rapporto e chiamo $A_k = \{\tau: \{1, 2, \dots, k\}^{\mathcal{P}} \text{ permutazioni con } \tau^2 = \text{Id}\}$, il grado del vertice è $A_{k_1} \cdot A_{k_2} \cdot \dots \cdot A_{k_t} - 1$.

$(12)(36)(510)(714)$



6 scambi a coppie



3 doppie coppie

Claim: le permutazioni $\tau: \{1, 2, \dots, k\}^{\mathcal{P}}$ con $\tau^2 = \text{Id}$ sono in numero pari.

Dim: quelle con $\tau^2 \neq \text{Id}$ si accoppiano $\tau \leftrightarrow \tau^{-1}$ e sono in numero pari.