

MISCELLANEA

Note Title

29/09/2024

① Idea: Ridurre ai polinomi omogenei.

$$Q(x) = \bar{Q}(x) + Q'(x)$$

Componente omogenea di grado max
e resto

Quindi

$$P(x,y) = \bar{P}(x,y) + P'(x,y)$$

Componente omogenea resto

Possiamo assumere a meno di logici monomi "irrilevanti" che

$$\deg(P(x,y)) = \deg(P(x,y) - P(y,x))$$

$$\underbrace{x^4}_4 + \underbrace{yx^3}_3 + \underbrace{x^2y^2}_2 + \underbrace{x^2}_2 + \underbrace{yx}_2 + \underbrace{y^3}_3$$

$$P(x,y) = x^d P(x,y)$$

Fatto fondamentale: la componente omogenea di grado massimo di un prodotto di 2 polinomi è il prodotto delle componenti omogenee di grado massimo dei 2 polinomi.

$$A = \sum_{i=0}^{d_A} A_i \quad B = \sum_{j=0}^{d_B} B_j \quad (AB)_k = \sum_{i=0}^{\min(k, d_A)} A_i B_{k-i}$$

omogen

la componente di grado $d_A + d_B$

$$Q(x) - Q(y) = (P(x,y) - P(y,x)) + H(x,y)$$

↓

$$\bar{Q}(x) - \bar{Q}(y) = (\bar{P}(x,y) - \bar{P}(y,x)) \bar{H}(x,y)$$

$$cx^p - cy^p = c(x^p - y^p)$$

$$\bar{P}(x,y) = \sum a_i x^i y^{d-i} = y^d \sum a_i \left(\frac{x}{y}\right)^i$$

$$c y^p \left(\left(\frac{x}{y}\right)^p - 1 \right)$$

IRRIDUCIBILE

polinomio in $\frac{x}{y}$

$$(t^p - 1) = (t - 1)(t^{p-1} + t^{p-2} + \dots + 1)$$

$$(x, x) \text{ in } \bar{P}(x, x) = \bar{P}(x, x) = 0$$

$y^1 \cdot \tilde{P}(t)$

$\text{SI ANNULLA IN } t=1$

quindi $\bar{P}(x, y) - \bar{P}(y, x) = (x - y) \cdot \text{costante}$

Parte 2.

$$x^n - y^n \rightarrow y^n (t^n - 1)$$

$n=2$ $(t-1)(t+1)$ ✓

$$P(x, y) - P(y, x)$$

$n=3$ $(t-1)(t^2+t+1)$ ← $\tilde{P}(t)$
(t-1)

Anche in questo caso P ha grado 2.

Vediamo che ogni altro n non funziona

$$x^{2n} - y^{2n} = (x^2 - y^2) \cdot \text{qualcosa}$$

$$P(x, y) = x^2$$

funzione P che ha grado 2

n dispari

prendiamo $n=p$ primo

$$x^p - y^p = y^p (t^p - 1)$$

↑
 Si fattorizza in $\mathbb{R}$ come $(t-1) \cdot \prod$ polidi grado 2

Adesso preso un qualsiasi $R(t)$ di grado 2 che divide $t^p - 1$

$$P(t) = (t-1) \mid (t^r-1) \quad \mathbb{Q}$$

ha grado 3 = $b_3 t^3 + b_2 t^2 + b_1 t + b_0$

$$y^3 \left(b_3 \left(\frac{x}{y} \right)^3 + b_2 \left(\frac{x}{y} \right)^2 + b_1 \left(\frac{x}{y} \right) + b_0 \right) =$$

$$= b_3 x^3 + b_2 x^2 y + b_1 x y^2 + b_0 y^3$$

$$P(x,y) = a_0 y^3 + a_1 y^2 x + a_2 y x^2 + a_3 x^3$$

$$P(x,y) - P(y,x)$$

$$P(x,y) - P(y,x) = x^3 (a_3 - a_0) + x^2 y (a_2 - a_1) + x y^2 (a_1 - a_2) + y^3 (a_0 - a_3)$$

e quindi possiamo scrivere polinomi con $b_3 = -a_0$
 $b_2 = -a_1$

Dovete trovare di fare coi coeff simmetrici x esercit'io

Caso generale in n generico $(t^m - 1) = (t^p - 1) \cdot \text{qualcosa}$
in p | m

e quindi se $P(x,y) - P(y,x) \mid (x^r - y^r)$ allora divide anche
 $x^m - y^m$ per ogni motivo.

Moore; Riduci ai polinomi omogenei per venire di

Ridurre artificialmente il numero di variabili

[M2] Problema ibrido algebra-teoria dei numeri.

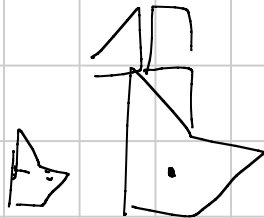
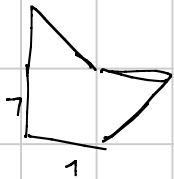
$P(n) \geq 0 \Rightarrow x_{n+1}^2 \leq x_n x_{n+2} \Rightarrow \frac{x_{n+1}}{x_n}$ è debolmente
crescente $\Rightarrow (x_k)$ è costante oppure esponenziale.

$$\begin{cases} X_{n-1}^2 + P(n-2) = X_n X_{n-2} \\ X_n^2 + P(n-1) = X_{n+1} X_{n-1} \\ X_{n+1}^2 + P(n) = X_n X_{n+2} \end{cases} \quad \begin{cases} P(n-2) \equiv -X_{n-1}^2 \pmod{X_n} \\ P(n-1) \equiv X_{n+1} X_{n-1} \pmod{X_n} \\ P(n) \equiv -X_{n+1}^2 \pmod{X_n} \end{cases}$$

$$\Rightarrow X_n \mid (P(n-2)P(n) - P(n-1)^2) \quad \forall n$$

$$\Rightarrow P(n-2)P(n) = P(n-1)^2 \text{ def. in } n \Rightarrow \left. \begin{aligned} P(x-2)P(x) &= P(x-1)^2 \Rightarrow P \text{ costante} \end{aligned} \right\}$$

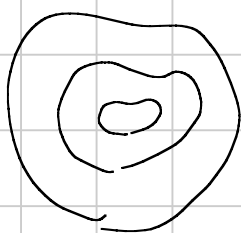
M_3



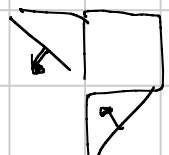
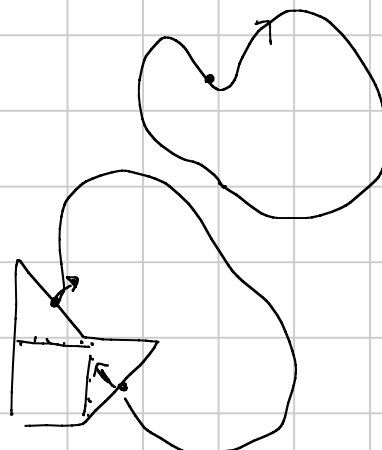
ogni Blocco ha 2 vicini



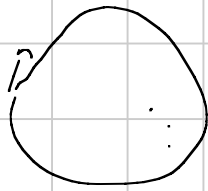
All'interno del ciclo rimangono caselle



Ciclo minimale $\Rightarrow$ Assurdo

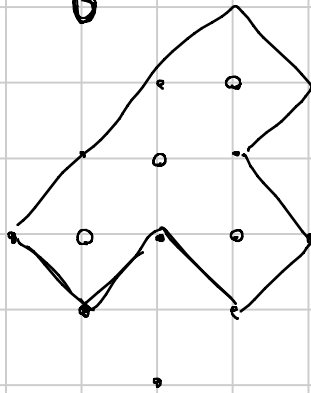


a perni in verso orario b antiorario



$$a - b = 4$$

b



$$\frac{a+b}{2} - 1 = \underline{b+1}$$

$\geq b+1$ caselle

b quadrati ricadono
all'interno