

XIV GARA NAZIONALE A SQUADRE

Semifinale A – 10 Maggio 2013



ZANICHELLI

Istruzioni Generali

- Per ogni problema, indicare sul cartellino delle risposte un intero compreso tra 0000 e 9999.
- Se la quantità richiesta non è un numero intero, ove non altrimenti indicato, si indichi la sua parte intera.
- Se la quantità richiesta è un numero negativo, oppure se il problema non ha soluzione, si indichi 0000.
- Se la quantità richiesta è un numero intero maggiore di 9999, se ne indichino le ultime quattro cifre.
- Nello svolgimento dei calcoli può essere utile tener conto dei seguenti valori approssimati:

$$\sqrt{2} = 1.4142 \quad \sqrt{3} = 1.7321 \quad \sqrt{5} = 2.2361 \quad \sqrt{7} = 2.6458 \quad \sqrt{13} = 3.6056 \quad \pi = 3.1416.$$

Scadenze importanti

- **10 minuti dall'inizio:** termine ultimo per la scelta del problema Jolly (dopo verrà dato d'ufficio il primo problema).
- **30 minuti dall'inizio:** termine ultimo per rivolgere domande sul testo.
- **90 minuti dall'inizio:** termine della gara.

1. Scacchi folli

Radice insegna alla sua gattina Emmy un nuovo gioco. Su una scacchiera infinita (ebbene sì, nella loro casa ci sono anche delle scacchiere infinite!), ha posto due pedine, allineate verticalmente sulla stessa colonna, con esattamente due caselle vuote tra le due. Le due giocatrici muovono a turno la propria pedina, con Radice che comincia muovendo quella più in basso. Lo scopo di Radice è di catturare la pedina di Emmy, raggiungendo la stessa sua casella alla fine di una mossa; per farlo, ad ogni suo turno può scegliere se fare esattamente 4 passi oppure 5, però con queste regole: spostarsi di una casella in alto o a destra costa 1 passo, spostarsi in basso o a sinistra costa 2 passi. Per esempio, al suo primo turno può spostarsi in alto di 4 caselle, sorpassando così la pedina di Emmy, oppure di una casella a destra, una a sinistra ed una in basso (totale 5 passi), ma non può spostarsi solo di una casella in alto e poi una in basso, perché in tal caso farebbe solo 3 passi. Emmy invece sposta la sua pedina di una sola casella per turno, in una delle 4 direzioni, stando attenta però a non finire sulla stessa casella della pedina di Radice. Emmy, che è una gattina sveglia, ha imparato in fretta qual è la strategia migliore per far durare il gioco più a lungo possibile, nonostante gli sforzi di Radice. Dopo quante mosse finirà la partita?

2. Attraverso lo specchio

Dopo ore perse a giocare con la sua gattina, Radice è così stanca che si è quasi addormentata! Al di là dello specchio, vede un tavolino a forma di tetraedro regolare di lato 1 m su cui è disegnata una scacchiera. Il tavolino appoggia a terra in equilibrio su uno dei vertici, che si trova sul suolo a esattamente 1 m di distanza dallo specchio. Il piano del tavolo, composto da una delle facce del tetraedro a forma di triangolo equilatero, è parallelo al suolo. Uno dei suoi vertici "punta" esattamente verso lo specchio, in modo che il lato opposto sia parallelo ad esso. Esattamente sopra il centro del tavolo, ma a un'altezza dal suolo doppia rispetto all'altezza del tavolino, si trova una lampadina accesa. Radice osserva che sotto il tavolo si formano quindi due ombre: una causata dalla luce diretta della lampadina e l'altra dalla luce riflessa nello specchio. Sapendo che lo specchio è perfettamente verticale, sapresti calcolare l'area dell'intersezione tra le due ombre? *Dare la risposta in cm².*

3. Ma che succede?

Radice si trova ora nell'angolo A di una stanza quadrata $ABCD$ di lato 4161 cm, e fa rotolare sul pavimento una pallina molto piccola in modo che raggiunga il punto del lato BC che si trova a 1 cm da B . Ogni volta che incontra una parete, non solo la palla rimbalza perfettamente, ma nello stesso momento la stanza si ingrandisce: la parete opposta a quella colpita dalla palla si sposta, allontanandosi istantaneamente da quella colpita in modo che la loro distanza raddoppi. Le altre due pareti rimangono alla stessa distanza. Quanti rimbalzi farà la pallina prima di finire di nuovo in un vertice della stanza?

4. I fiori nel prato

Radice, ancora sorpresa per quello che sta succedendo, esce di casa, e si ritrova a camminare in un prato fiorito infinitamente lungo e largo 200 cm. Sul prato la osservano tanti fiori, stupiti dal vedere un fiore che si muove! Ognuno di essi ha la forma di un poligono regolare di petalo, oops, lato 1 cm. Quanti petali/lati ha il fiore più grande che Radice può incontrare nel prato?

5. Minima distanza

Radice, stando ferma in un punto, vede in lontananza il Re Bianco muoversi in linea retta passando per tre punti allineati B, C, D . Sapendo che B e D distano 3 km da Radice, mentre C solo 2 km, quanti metri distano come minimo B e D ?

6. Una Torre sinistra

Da lontano, Radice vede un prato con tante siepi che lo separano in quadrati, come le caselle di una scacchiera 8×8 . La Regina Rossa ordina alla Torre di spostarsi da una casella d'angolo nella casella d'angolo opposta. La Regina le spiega che dovrà impiegare esattamente 6 mosse per raggiungerla. Inoltre, ordina che ad ogni mossa cambi direzione svoltando a sinistra di 90° . Se sulla scacchiera non ci sono altri pezzi oltre alla Torre, quanti sono i possibili percorsi che può seguire? La Torre può passare più volte sulla stessa casella; in particolare, può toccare la casella di destinazione anche prima della sesta mossa. *Una mossa della Torre consiste nello spostarsi di un qualsiasi numero intero di caselle (da 1 a 8) in orizzontale o in verticale.*

7. Il mio regno per un pedone

"Posso partecipare anch'io alla partita?", chiede Radice alla Regina Rossa. "Certo, mia cara, abbiamo giusto bisogno di una pedina bianca.

Però devo assicurarmi che tu sappia leggere, scrivere e far di conto. Ho qui 2013 triangoli, di basi $b_1, b_2, \dots, b_{2013}$ e altezze $h_1, h_2, \dots, h_{2013}$, tali che $b_{n+1} = b_n - 4h_n$ per ogni n tra 1 e 2012 (e ovviamente $b_n > 4h_n$ per questi valori di n). Il 2013-esimo triangolo ha altezza $h_{2013} = 7$ e area 14. Inoltre, la Regina Bianca, là dall'altro lato della scacchiera, ha 2012 triangoli di altezze $h_1, h_2, \dots, h_{2012}$ e basi rispettivamente $b_2, b_3, b_4, \dots, b_{2013}$. “Come, non c'è b_1 ?” chiese Radice. “No no; ti posso solo dire che b_1 vale 236... ma non è questo che mi interessa! Sai dirmi qual è la somma delle aree di tutti i 4025 triangoli?”

8. La scorpiata di ostriche

Il Trisecco e il Cartantieri hanno raccolto molte ostriche; vorrebbero disporle in fila per 2, ma il loro numero non è divisibile per 2. Delusi, decidono quindi a malincuore di mangiarne 2. Riprovano a mettere le rimanenti in fila per 3, ma il loro numero non è divisibile per 3, quindi ne mangiano 3. Continuano in questo modo, ogni volta mangiandone n perché il numero di quelle rimaste non è divisibile per n . Quando Radice li incontra, sono in lacrime: le stanno ora disponendo in fila per 71, e non hanno ancora finito! Quante ostriche c'erano, come minimo, all'inizio del banchetto?

9. Le perle della Regina

Dopo l'indecorosa scorpiata di ostriche, il Trisecco e il Cartantieri hanno disposto in questo modo le perle che hanno trovato. Si suddivide, con linee parallele ai lati, un triangolo equilatero di lato 60 in tanti triangolini di lato 3. Si pongano poi delle perle su ogni punto che è un vertice di questi triangolini, nonché due perle su ognuno dei loro lati, in modo che ogni perla sia a distanza 1 dalle sue vicine più prossime. Quante perle hanno utilizzato per comporre la figura?

10. Le carte danno alla testa

CuboQuadro ha rubato il compasso di QuadroCubo! Per risolvere la questione, come loro solito, ognuno di loro pesca due carte da uno stesso mazzo da 52 e somma i loro valori. CuboQuadro, che ha pescato un 6 e un 8, restituirà il mazzo solo se la somma dei valori delle due carte del fratello è maggiore o uguale della somma delle sue, cioè 14. Qual è la probabilità che questo avvenga? *Si indichi la somma di numeratore e denominatore della probabilità espressa come frazione ridotta ai minimi termini. Il mazzo è composto da quattro insiemi di 13 carte l'uno, di valore rispettivamente 1, 2, ..., 13.*

11. Il vocabolario di HardyDardy

Quando Radice incontra quella testa d'uovo di HardyDardy, egli afferma spocchioso: “L'ottagono ha il doppio dei lati del quadrato. L'ettagono ha più lati dell'esagono, che a sua volta ne ha di più del pentagono. Il numero di lati dell'esagono è la media tra quello del triangolo e quello dell'ennagono”. Radice si mostra subito d'accordo, ma un momento dopo HardyDardy le spiega che ha scambiato tra loro i nomi dei poligoni da 3 a 9 lati in modo che a nessun poligono corrisponda il suo vero nome. Aiutate Radice a capire come HardyDardy ha modificato le parole. *Si indichi come risposta in sequenza il numero di lati di triangolo, pentagono, ettagono, ennagono.*

12. Radici per Radice

Radice arriva su un campo di battaglia, su cui il Giaguaro e il Ronzino si stanno sfidando, per fortuna solo a colpi di quesiti! Mentre si avvicina, sente il Ronzino porre questo problema: “Siano a, b, c le radici del polinomio $p(x) = 2x^3 + 11x^2 - 427x + 414$. Quanto vale $p(a + b + c)$?”

13. Un attimo di pausa

Dopo essersi sfidati sul campo di battaglia, il Giaguaro e il Ronzino si rilassano insieme a Radice prendendo un tè. Aitka, il cappellaio, offre loro 94 biscotti, numerati da 1 a 94. Il Re Bianco ordina a Radice di mangiarne un certo numero intero a , al Giaguaro b , e al Ronzino c . Chiaramente $a, b, c \geq 0$ e $a + b + c = 94$. “Curioso—nota Aitka—il numero di modi diversi in cui potete dividervi i biscotti rispettando gli ordini del Re è multiplo di 3”. Quante terne ordinate (a, b, c) hanno questa proprietà?

14. I divisori del cavaliere

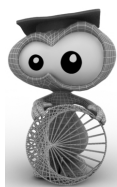
Radice si trova ora di fronte il Cavaliere Bianco, che, riposandosi dalla battaglia, medita su di un foglio. “Qui ho scritto tutti i divisori positivi di un certo intero N , inclusi 1 e lui stesso. Ti dirò solo che ci sono 606 quadrati perfetti, e esattamente 165 numeri che sono anche divisori di 10^{14} . Ah, e i multipli di 5 sono in numero dispari. Quanti numeri ci sono sul foglio?”

15. Il triangolo palindromo

Radice ha raggiunto l'ottava traversa, e sta per diventare anche lei Regina! La Regina Rossa le pone però un ultimo quesito prima dell'incoronazione: “Sia ABC un triangolo isoscele ($AB = AC$) di base BC lunga 62 e altezza AH . Siano K il punto medio di AH e D il punto di intersezione tra il segmento perpendicolare a BK , passante per K , e la retta parallela a BC passante per A . Quanto vale l'area di BKD , sapendo che l'area di ABC è un numero palindromo di 4 cifre e l'altezza è un numero intero pari?”

16. Piccola conversazione

Un grande banchetto viene organizzato nel castello della neo-Regina Radice. Tra l'arrosto e il dessert, la Regina Rossa improvvisamente chiede a Radice: “Prendi tutti i numeri fino a 200, e suddividili tra quelli il cui quadrato più vicino è dispari e quelli il cui quadrato più vicino è pari. Di quanto differiscono le somme dei numeri in questi due insiemi?”



XIV GARA NAZIONALE A SQUADRE

Semifinale A – Soluzioni – 10 Maggio 2013



ZANICHELLI

Nr.	Problema	Soluzione
1	Scacchi folli	0000
2	Attraverso lo specchio	1293
3	Ma che succede?	0022
4	I fiori nel prato	0628
5	Minima distanza	4472
6	Una Torre sinistra	0784
7	Il mio regno per un pedone	6974
8	La scorpacciata di ostriche	4095
9	Le perle della Regina	1491
10	Le carte danno alla testa	0377
11	Il vocabolario di HardyDardy	9485
12	Radici per Radice	2762
13	Un attimo di pausa	4479
14	I divisori del cavaliere	2222
15	Il triangolo palindromo	8556
16	Piccola conversazione	0990

Semifinale A - Classifica finale squadre

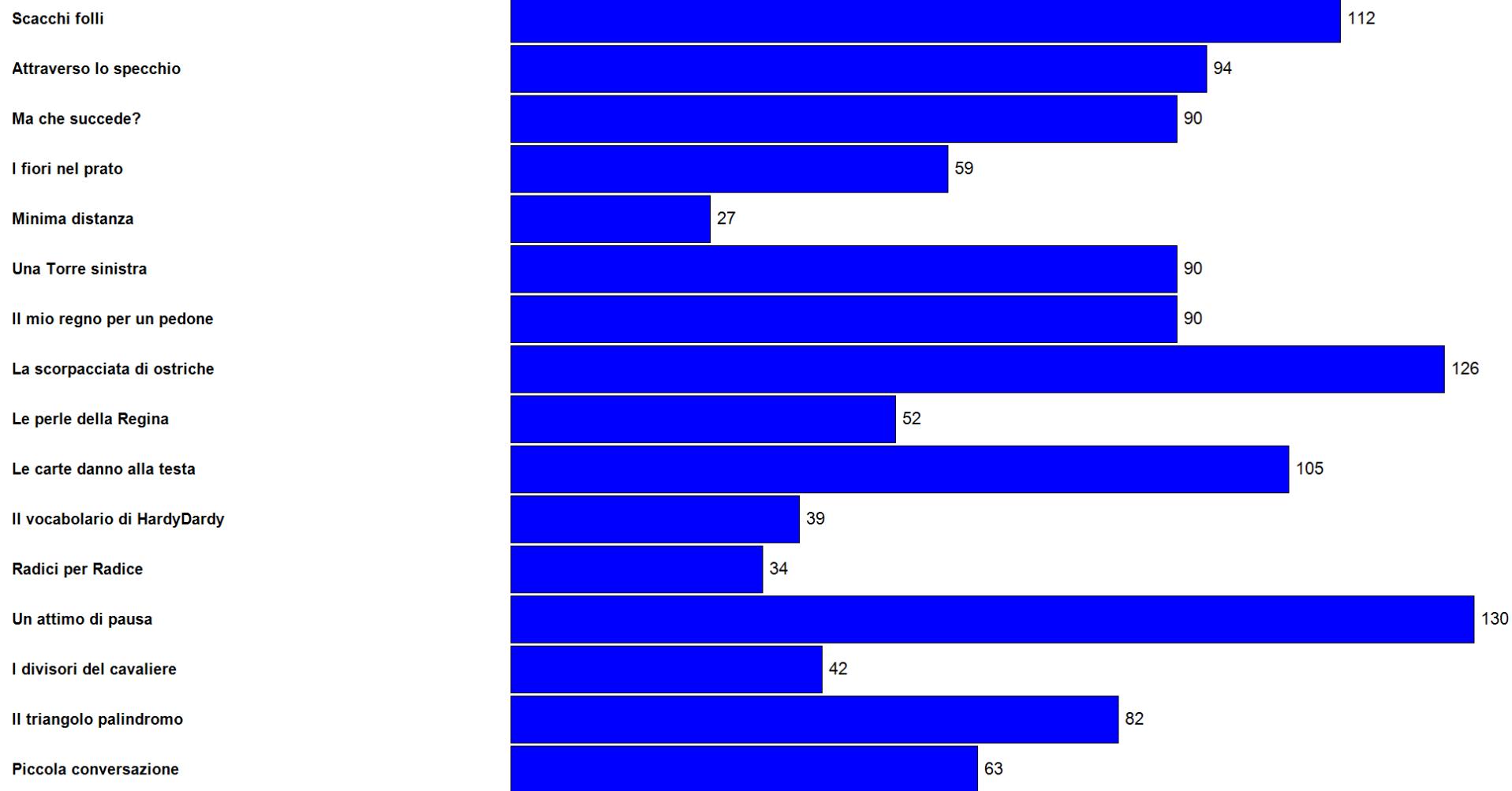
00:00

		Cassini, Genova	767
		D'Arzo, Montecchio Emilia	641
		Alessi, Perugia	640
		Galilei, Catania	632
		Rossi, Massa	598
		Cattaneo, Torino	584
		Newton, Roma	584
		Amaldi, Novi Ligure	572
		Galilei, Trento	536
		Milani, Montichiari	520
		Lanfranconi, Genova	455
	448	Volta, Colle di Val d'Elsa	
	433	Paschini, Tolmezzo	
	418	Gioia, Piacenza	
	397	Copernico, Bologna	
	382	Fermi, Padova	
	381	Fermi, Brindisi	
	372	Zanelli, Reggio Emilia	
	342	Galilei, Belluno	
	334	Severi, Frosinone	
	279	Buzzi, Prato	
	273	Corbino, Siracusa	
	271	Cannizzaro, Palermo	
	263	Roiti, Ferrara	
	240	De Ruggieri, Massafra	
	237	Bonghi-Rosmini, Lucera	
	234	Pacinotti, Cagliari	
	155	Barsanti e Matteucci, Viareggio	
	25	Corridoni-Campana, Osimo	
		Fazekas, Budapest	665

Semifinale A - Stato squadre

00:00

01) Cassini	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
02) Fermi	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
03) Galilei	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
04) Cattaneo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
05) Volta	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
06) Galilei	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
07) Cannizzaro	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
08) Buzzi	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
09) Alessi	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
10) Fermi	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
11) Roiti	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
12) Pacinotti	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
13) Corbino	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
14) Galilei	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
15) De Ruggieri	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
16) Newton	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
17) Corridoni-Campana	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
18) Gioia	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
19) Barsanti e Matteucci	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
20) Copernico	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
21) Zanelli	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
22) Rossi	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
23) Paschini	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
24) Milani	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
25) Severi	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
26) Lanfranconi	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
27) D'Arzo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
28) Amaldi	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
29) Bonghi-Rosmini	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
30) Fazekas	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16



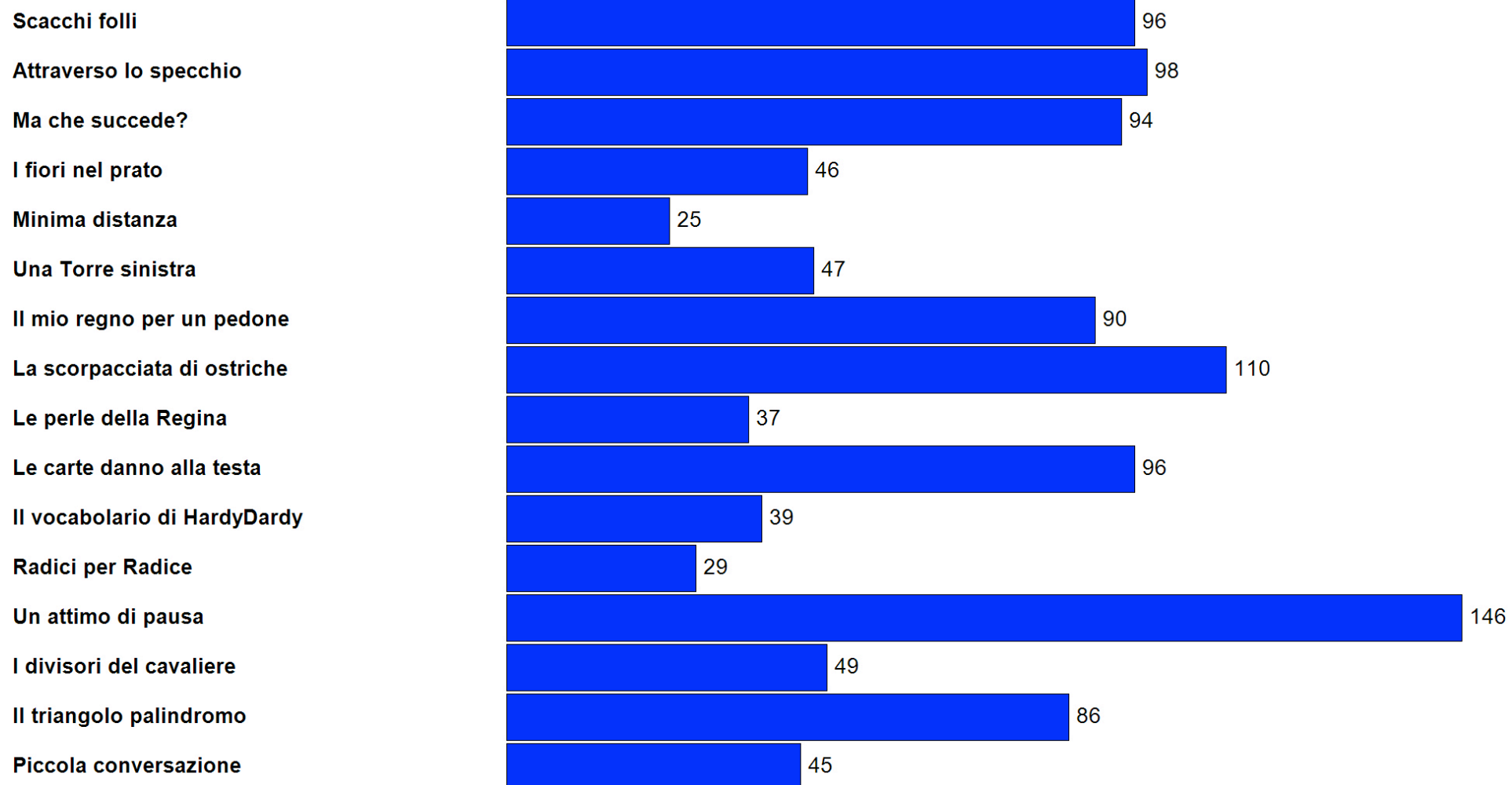
	Mascheroni, Bergamo	877
	Marconi, Carrara	820
	Marconi, Conegliano	717
	Dini, Pisa	600
	Redi, Arezzo	584
	Belfiore, Mantova	538
	Ribezzo, Francavilla Fontana	525
	Moro, Reggio Emilia	509
	Da Vinci, Firenze	506
	Majorana, Mirano	491
	Levi, Montebelluna	482
	Vian, Bracciano	457
	Ferraris, Torino	452
	Gandini, Lodi	443
	Volta, Foggia	441
	Copernico, Torino	423
	Galilei, Pescara	405
	Majorana, Isernia	398
	Fermi, Montesarchio	310
	Parodi, Acqui Terme	306
	Rambaldi-Valeriani, Imola	275
	Calabrese-Levi, San Pietro In Cariano	268
	Leonardo, Giarre	252
	Saffo, Roseto Abr.	234
	Fermi, Nuoro	227
	Grigoletti, Pordenone	197
	Galilei, Macerata	136
	Da Procida, Salerno	131

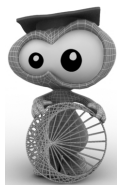
blueStone

Semifinale C - Stato squadre

00:00

01) Marconi	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
02) Da Vinci	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
03) Galilei	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
04) Volta	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
05) Moro	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
06) Fermi	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
07) Redi	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
08) Galilei	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
09) Mascheroni	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
10) Marconi	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
11) Majorana	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
12) Ribezzo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
13) Fermi	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
14) Rambaldi-Valeriani	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
15) Da Procida	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
16) Saffo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
17) Dini	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
18) Calabrese-Levi	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
19) Copernico	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
20) Leonardo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
21) Majorana	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
22) Grigoletti	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
23) Parodi	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
24) Vian	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
25) Belfiore	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
26) Gandini	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
27) Ferraris	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
28) Levi	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16





XIV GARA NAZIONALE A SQUADRE

Semifinale B – 10 Maggio 2013



ZANICHELLI

Istruzioni Generali

- Per ogni problema, indicare sul cartellino delle risposte un intero compreso tra 0000 e 9999.
- Se la quantità richiesta non è un numero intero, ove non altrimenti indicato, si indichi la sua parte intera.
- Se la quantità richiesta è un numero negativo, oppure se il problema non ha soluzione, si indichi 0000.
- Se la quantità richiesta è un numero intero maggiore di 9999, se ne indichino le ultime quattro cifre.
- Nello svolgimento dei calcoli può essere utile tener conto dei seguenti valori approssimati:

$$\sqrt{2} = 1.4142 \quad \sqrt{3} = 1.7321 \quad \sqrt{5} = 2.2361 \quad \sqrt{7} = 2.6458 \quad \sqrt{13} = 3.6056 \quad \pi = 3.1416.$$

Scadenze importanti

- **10 minuti dall'inizio:** termine ultimo per la scelta del problema Jolly (dopo verrà dato d'ufficio il primo problema).
- **30 minuti dall'inizio:** termine ultimo per rivolgere domande sul testo.
- **90 minuti dall'inizio:** termine della gara.

1. Attraverso lo specchio

Dopo ore perse a giocare con la sua gattina, Radice è così stanca che si è quasi addormentata! Al di là dello specchio, vede un tavolino a forma di tetraedro regolare di lato 1 m su cui è disegnata una scacchiera. Il tavolino appoggia a terra in equilibrio su uno dei vertici, che si trova sul suolo a esattamente 1.5 m di distanza dallo specchio. Il piano del tavolo, composto da una delle facce del tetraedro a forma di triangolo equilatero, è parallelo al suolo. Uno dei suoi vertici "punta" esattamente verso lo specchio, in modo che il lato opposto sia parallelo ad esso. Esattamente sopra il centro del tavolo, ma a un'altezza dal suolo doppia rispetto all'altezza del tavolino, si trova una lampadina accesa. Radice osserva che sotto il tavolo si formano quindi due ombre: una causata dalla luce diretta della lampadina e l'altra dalla luce riflessa nello specchio. Sapendo che lo specchio è perfettamente verticale, sapresti calcolare l'area dell'intersezione tra le due ombre? *Dare la risposta in cm².*

2. Scacchi folli

Radice insegna alla sua gattina Emmy un nuovo gioco. Su una scacchiera infinita (ebbene sì, nella loro casa ci sono anche delle scacchiere infinite!), ha posto due pedine, allineate verticalmente sulla stessa colonna, con esattamente due caselle vuote tra le due. Le due giocatrici muovono a turno la propria pedina, con Radice che comincia muovendo quella più in basso. Lo scopo di Radice è di catturare la pedina di Emmy, raggiungendo la stessa sua casella alla fine di una mossa; per farlo, ad ogni suo turno può scegliere se fare esattamente 4 passi oppure 5, però con queste regole: spostarsi di una casella in alto o a destra costa 1 passo, spostarsi in basso o a sinistra costa 2 passi. Per esempio, al suo primo turno può spostarsi in alto di 4 caselle, sorpassando così la pedina di Emmy, oppure di una casella a destra, una a sinistra ed una in basso (totale 5 passi), ma non può spostarsi solo di una casella in alto e poi una in basso, perché in tal caso farebbe solo 3 passi. Emmy invece sposta la sua pedina di una sola casella per turno, in una delle 4 direzioni, stando attenta però a non finire sulla stessa casella della pedina di Radice. Emmy, che è una gattina sveglia, ha imparato in fretta qual è la strategia migliore per far durare il gioco più a lungo possibile, nonostante gli sforzi di Radice. Dopo quante mosse finirà la partita?

3. Ma che succede?

Radice si trova ora nell'angolo A di una stanza quadrata $ABCD$ di lato 4161 cm, e fa rotolare sul pavimento una pallina molto piccola in modo che raggiunga il punto del lato BC che si trova a 1 cm da B . Ogni volta che incontra una parete, non solo la palla rimbalza perfettamente, ma nello stesso momento la stanza si ingrandisce: la parete opposta a quella colpita dalla palla si sposta, allontanandosi istantaneamente da quella colpita in modo che la loro distanza raddoppi. Le altre due pareti rimangono alla stessa distanza. Quanti rimbalzi farà la pallina prima di finire di nuovo in un vertice della stanza?

4. I fiori nel prato

Radice, ancora sorpresa per quello che sta succedendo, esce di casa, e si ritrova a camminare in un prato fiorito infinitamente lungo e largo 100 cm. Sul prato la osservano tanti fiori, stupiti dal vedere un fiore che si muove! Ognuno di essi ha la forma di un poligono regolare di petalo, oops, lato 1 cm. Quanti petali/lati ha il fiore più grande che Radice può incontrare nel prato?

5. Una Torre sinistra

Da lontano, Radice vede un prato con tante siepi che lo separano in quadrati, come le caselle di una scacchiera 8×8 . La Regina Rossa ordina alla Torre di spostarsi da una casella d'angolo nella casella d'angolo opposta. La Regina le spiega che dovrà impiegare esattamente 6 mosse per raggiungerla. Inoltre, ordina che ad ogni mossa cambi direzione svoltando a sinistra di 90° . Se sulla scacchiera non ci sono altri pezzi oltre alla Torre, quanti sono i possibili percorsi che può seguire? La Torre può passare più volte sulla stessa casella; in particolare, può toccare la casella di destinazione anche prima della sesta mossa. *Una mossa della Torre consiste nello spostarsi di un qualsiasi numero intero di caselle (da 1 a 8) in orizzontale o in verticale.*

6. Minima distanza

Radice, stando ferma in un punto, vede in lontananza il Re Bianco muoversi in linea retta passando per tre punti allineati B, C, D . Sapendo che B e D distano 2 km da Radice, mentre C solo 1 km, quanti metri distano come minimo B e D ?

7. Il mio regno per un pedone

"Posso partecipare anch'io alla partita?", chiede Radice alla Regina Rossa. "Certo, mia cara, abbiamo giusto bisogno di una pedina bianca.

Però devo assicurarmi che tu sappia leggere, scrivere e far di conto. Ho qui 2014 triangoli, di basi $b_1, b_2, \dots, b_{2014}$ e altezze $h_1, h_2, \dots, h_{2014}$, tali che $b_{n+1} = b_n - 4h_n$ per ogni n tra 1 e 2013 (e ovviamente $b_n > 4h_n$ per questi valori di n). Il 2014-esimo triangolo ha altezza $h_{2014} = 7$ e area 14. Inoltre, la Regina Bianca, là dall'altro lato della scacchiera, ha 2013 triangoli di altezze $h_1, h_2, \dots, h_{2013}$ e basi rispettivamente $b_2, b_3, b_4, \dots, b_{2014}$. “Come, non c'è b_1 ?” chiese Radice. “No no; ti posso solo dire che b_1 vale 236... ma non è questo che mi interessa! Sai dirmi qual è la somma delle aree di tutti i 4027 triangoli?”

8. Le carte danno alla testa

CuboQuadro ha rubato il compasso di QuadroCubo! Per risolvere la questione, come loro solito, ognuno di loro pesca due carte da uno stesso mazzo da 52 e somma i loro valori. CuboQuadro, che ha pescato un 9 e un 5, restituirà il maltolto solo se la somma dei valori delle due carte del fratello è maggiore o uguale della somma delle sue, cioè 14. Qual è la probabilità che questo avvenga? *Si indichi la somma di numeratore e denominatore della probabilità espressa come frazione ridotta ai minimi termini. Il mazzo è composto da quattro insiemi di 13 carte l'uno, di valore rispettivamente 1, 2, ..., 13.*

9. La scorpacciata di ostriche

Il Triseco e il Cartantiere hanno raccolto molte ostriche; vorrebbero disporle in fila per 2, ma il loro numero non è divisibile per 2. Delusi, decidono quindi a malincuore di mangiarne 2. Riprovano a mettere le rimanenti in fila per 3, ma il loro numero non è divisibile per 3, quindi ne mangiano 3. Continuano in questo modo, ogni volta mangiandone n perché il numero di quelle rimaste non è divisibile per n . Quando Radice li incontra, sono in lacrime: le stanno ora disponendo in fila per 71, e non hanno ancora finito! Quante ostriche c'erano, come minimo, all'inizio del banchetto?

10. Le perle della Regina

Dopo l'indecorosa scorpacciata di ostriche, il Triseco e il Cartantiere hanno disposto in questo modo le perle che hanno trovato. Si suddivide, con linee parallele ai lati, un triangolo equilatero di lato 90 in tanti triangolini di lato 3. Si pongano poi delle perle su ogni punto che è un vertice di questi triangolini, nonché due perle su ognuno dei loro lati, in modo che ogni perla sia a distanza 1 dalle sue vicine più prossime. Quante perle hanno utilizzato per comporre la figura?

11. Il vocabolario di HardyDardy

Quando Radice incontra quella testa d'uovo di HardyDardy, egli afferma spocchioso: “L'ottagono ha il doppio dei lati del quadrato. L'ettagono ha più lati dell'esagono, che a sua volta ne ha di più del pentagono. Il numero di lati dell'esagono è la media tra quello del triangolo e quello dell'ennagono”. Radice si mostra subito d'accordo, ma un momento dopo HardyDardy le spiega che ha scambiato tra loro i nomi dei poligoni da 3 a 9 lati in modo che a nessun poligono corrisponda il suo vero nome. Aiutate Radice a capire come HardyDardy ha modificato le parole. *Si indichi come risposta in sequenza il numero di lati di ennagono, ettagono, pentagono, triangolo.*

12. Radici per Radice

Radice arriva su un campo di battaglia, su cui il Giaguaro e il Ronzino si stanno sfidando, per fortuna solo a colpi di quesiti! Mentre si avvicina, sente il Ronzino porre questo problema: “Siano a, b, c le radici del polinomio $p(x) = 2x^3 + 15x^2 - 477x + 460$. Quanto vale $p(a + b + c)$?”

13. Un attimo di pausa

Dopo essersi sfidati sul campo di battaglia, il Giaguaro e il Ronzino si rilassano insieme a Radice prendendo un tè. Aitka, il cappellaio, offre loro 94 biscotti, numerati da 1 a 94. Il Re Bianco ordina a Radice di mangiarne un certo numero intero a , al Giaguaro b , e al Ronzino c . Chiaramente $a, b, c \geq 0$ e $a + b + c = 94$. “Curioso—nota Aitka—il numero di modi diversi in cui potete dividervi i biscotti rispettando gli ordini del Re è multiplo di 3”. Quante terne ordinate (a, b, c) hanno questa proprietà?

14. I divisori del cavaliere

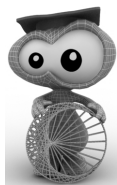
Radice si trova ora di fronte il Cavaliere Bianco, che, riposandosi dalla battaglia, medita su di un foglio. “Qui ho scritto tutti i divisori positivi di un certo intero N , inclusi 1 e lui stesso. Ti dirò solo che ci sono 606 quadrati perfetti, e esattamente 165 numeri che sono anche divisori di 10^{14} . Ah, e i multipli di 5 sono in numero dispari. Quanti numeri ci sono sul foglio?”

15. Il triangolo palindromo

Radice ha raggiunto l'ottava traversa, e sta per diventare anche lei Regina! La Regina Rossa le pone però un ultimo quesito prima dell'incoronazione: “Sia ABC un triangolo isoscele ($AB = AC$) di base BC lunga 62 e altezza AH . Siano K il punto medio di AH e D il punto di intersezione tra il segmento perpendicolare a BK , passante per K , e la retta parallela a BC passante per A . Quanto vale l'area di BKD , sapendo che l'area di ABC è un numero palindromo di 4 cifre e l'altezza è un numero intero pari?”

16. Piccola conversazione

Un grande banchetto viene organizzato nel castello della neo-Regina Radice. Tra l'arrosto e il dessert, la Regina Rossa improvvisamente chiede a Radice: “Prendi tutti i numeri fino a 1300, e suddividili tra quelli il cui quadrato più vicino è dispari e quelli il cui quadrato più vicino è pari. Di quanto differiscono le somme dei numeri in questi due insiemi?”



XIV GARA NAZIONALE A SQUADRE

Semifinale B – Soluzioni – 10 Maggio 2013



ZANICHELLI

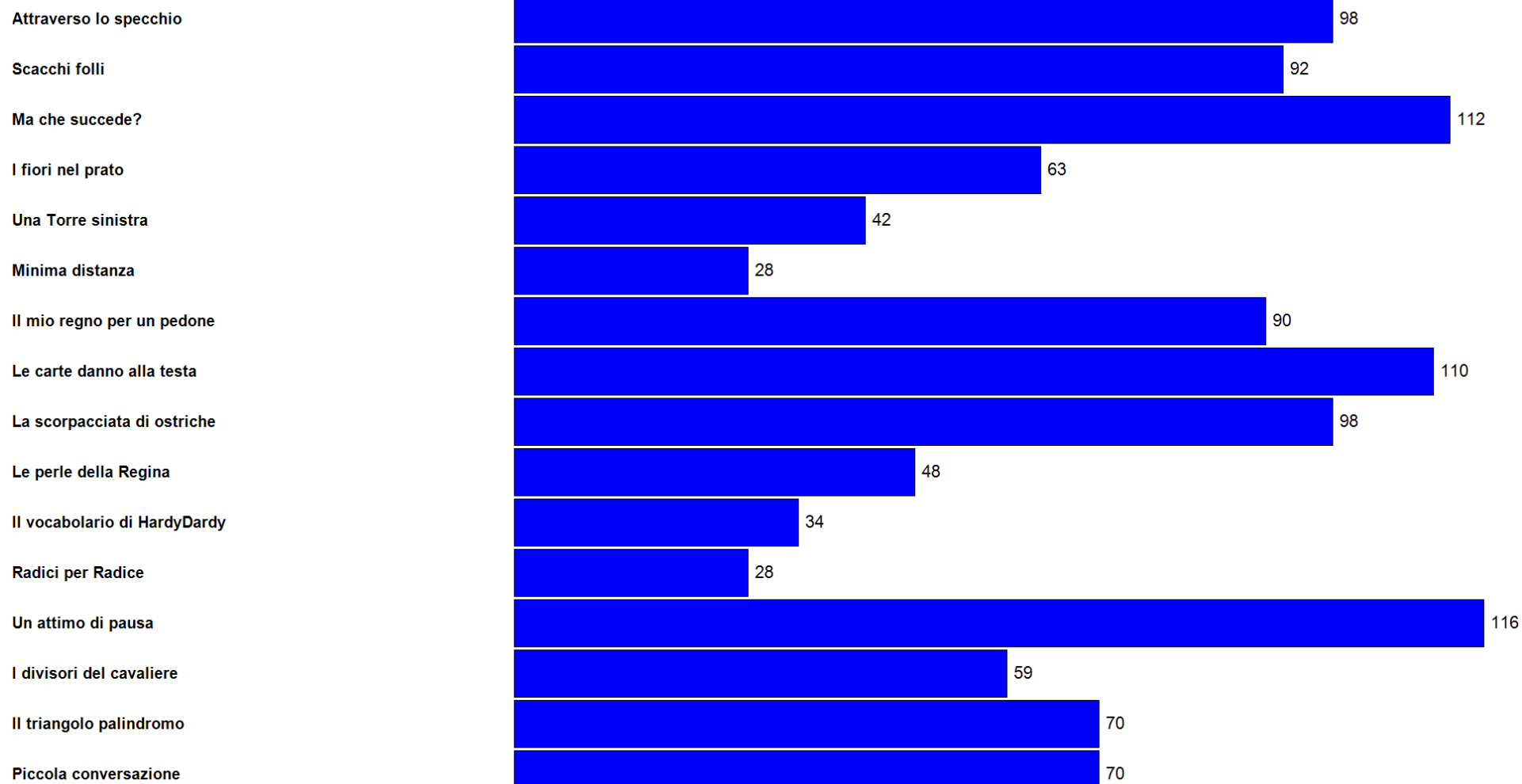
Nr.	Problema	Soluzione
1	Attraverso lo specchio	0931
2	Scacchi folli	0000
3	Ma che succede?	0022
4	I fiori nel prato	0314
5	Una Torre sinistra	0784
6	Minima distanza	3464
7	Il mio regno per un pedone	6974
8	Le carte danno alla testa	0377
9	La scorpacciata di ostriche	4095
10	Le perle della Regina	3286
11	Il vocabolario di HardyDardy	5849
12	Radici per Radice	4037
13	Un attimo di pausa	4479
14	I divisori del cavaliere	2222
15	Il triangolo palindromo	8556
16	Piccola conversazione	6490

		Copernico, Brescia	1076
	Majorana, Brindisi	628	
	Bertoni, Udine	623	
	Da Vinci, Treviso	606	
		601	Douhet, Firenze
		583	Quadri, Vicenza
		579	Einstein, Teramo
		551	Oberdan, Trieste
		528	Newton, Chivasso
		528	Galilei, Palermo
		516	Torricelli, Faenza
		467	Romita, Campobasso
		462	Copernico, Prato
		453	Marzoli, Palazzolo sull'Oglio
		438	Alberti, Cagliari
		403	Sobrero, Casale Monferrato
		400	Corni, Modena
		357	Rummo, Benevento
		347	Vercelli, Asti
		321	Marconi, Parma
		246	Severi, Salerno
		228	Gandhi, Narni
		214	Aldi, Grosseto
		209	Innocenzo XII, Anzio
		205	Ulivi, Parma
		143	Da Ponte, Bassano del Grappa
		104	Cutelli, Catania
		2	Fermi, Cosenza
		550	Skody, Prerov
		275	Westminster, Londra

Semifinale B - Stato squadre

00:00

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
01) Copernico	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
02) Da Vinci	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
03) Romita	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
04) Majorana	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
05) Rummo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
06) Torricelli	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
07) Severi	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
08) Einstein	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
09) Vercelli	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
10) Quadri	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
11) Da Ponte	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
12) Newton	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
13) Aldi	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
14) Cutelli	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
15) Galilei	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
16) Copernico	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
17) Gandhi	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
18) Alberti	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
19) Bertoni	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
20) Fermi	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
21) Innocenzo XII	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
22) Oberdan	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
23) Douhet	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
24) Marconi	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
25) Sobrero	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
26) Corni	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
27) Ulivi	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
28) Marzoli	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
29) Skody	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
30) Westminster	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16

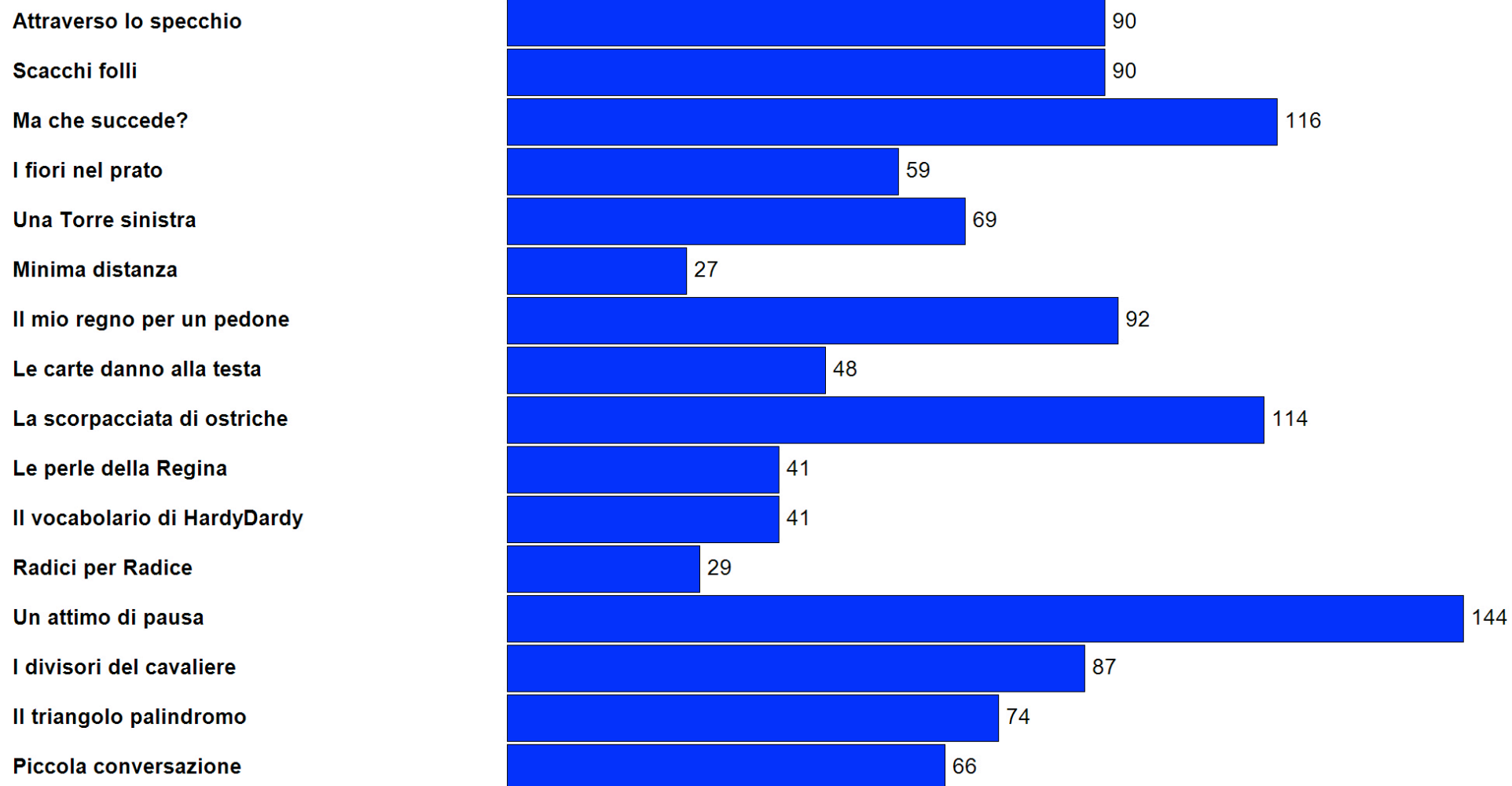


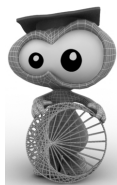
	Calini, Brescia	791
	Righi, Roma	771
	Grassi, Lecco	651
	Marinelli, Udine	648
	Golgi, Breno	541
	Stampacchia, Tricase	510
	Lucrezio Caro, Cittadella	493
	Battaglini, Taranto	482
	Galilei, Perugia	482
	Leonardo, Brescia	438
	Di Savoia, Pistoia	419
	Curie, Pinerolo	412
	Respighi, Piacenza	390
	Galilei, Manfredonia	376
	Fracastoro, Verona	344
	Pagano, Campobasso	315
	Megara, Augusta	294
	Berto, Mogliano Veneto	275
	Spallanzani, Reggio Emilia	249
	Masci, Chieti	235
	Varchi, Montevarchi	216
	Vallisneri, Lucca	200
	Liceo Scientifico, Ceccano	191
	Oliveti-Panetta, Locri	137
	Cobianchi, Verbania	111
	Spano, Sassari	99
	Asproni, Nuoro	97
	Mattei, Urbino	97

Semifinale D - Stato squadre

00:00

01) Galilei	1	2	3	2	5	6	7	8	2	9	1	10	11	12	13	14	15	16
02) Stampacchia	1	2	3	4	5	6	7	8	1	9	10	11	12	13	1	14	15	16
03) Oliveti-Panetta	1	2	3	3	5	1	6	7	8	9	3	10	2	11	12	2	13	1
04) Lucrezio Caro	1	2	3	4	5	6	7	8	2	9	10	11	12	13	14	15	16	1
05) Spano	1	2	3	2	4	1	5	6	7	8	1	9	1	10	11	1	12	3
06) Megara	1	2	3	4	5	6	7	8	1	9	1	10	11	12	13	14	15	1
07) Marinelli	1	1	2	3	4	5	6	7	8	2	9	1	10	11	12	13	1	14
08) Battaglini	1	1	2	3	4	5	6	7	8	1	9	10	11	12	13	2	14	15
09) Righi	1	2	3	4	1	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	1
10) Leonardo	1	2	3	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	1	17	1
11) Vallisneri	1	1	2	3	4	5	6	7	8	5	9	1	10	11	12	13	2	14
12) Masci	1	2	3	4	5	6	7	8	9	2	10	1	11	12	13	2	14	15
13) Galilei	1	2	3	4	5	6	7	8	1	9	2	10	11	12	13	1	14	15
14) Spallanzani	1	2	3	4	5	6	7	8	1	9	1	10	4	11	12	13	1	14
15) Asproni	1	2	3	4	5	6	7	8	3	9	10	11	12	13	2	14	15	1
16) Varchi	1	2	3	4	3	5	6	7	8	9	10	11	12	13	2	14	15	2
17) Mattei	1	2	3	4	1	5	6	7	8	2	9	10	11	12	13	2	14	15
18) Di Savoia	1	2	3	4	5	6	7	1	8	9	10	1	11	12	13	1	14	15
19) Calini	1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	2	10	11	12	13	1	14	15
20) Berto	1	2	3	4	5	4	6	7	8	5	9	1	10	11	12	13	4	14
21) Pagano	1	2	3	4	5	6	2	7	8	1	9	2	10	11	12	13	2	14
22) Cobianchi	1	2	3	4	5	6	7	8	1	9	2	10	3	11	12	5	13	1
23) Golgi	1	2	3	4	5	3	6	7	8	2	9	10	11	12	13	14	15	16
24) Fracastoro	1	2	2	3	4	5	6	7	8	1	9	4	10	11	12	13	14	15
25) Respighi	1	2	3	4	5	1	6	7	8	3	9	10	11	12	13	14	15	16
26) Curie	1	2	3	4	5	6	7	8	1	9	10	11	12	13	14	15	16	1
27) Grassi	1	2	3	4	5	6	7	8	2	9	10	11	12	13	2	14	15	16
28) Liceo Scientifico	1	2	3	4	5	6	7	8	1	9	10	3	11	12	13	1	14	15





XIV GARA NAZIONALE A SQUADRE

Finale Nazionale – 10 Maggio 2013



ZANICHELLI

Istruzioni Generali

- Per ogni problema, indicare sul cartellino delle risposte un intero compreso tra 0000 e 9999.
- Se la quantità richiesta non è un numero intero, ove non altrimenti indicato, si indichi la sua parte intera.
- Se la quantità richiesta è un numero negativo, oppure se il problema non ha soluzione, si indichi 0000.
- Se la quantità richiesta è un numero intero maggiore di 9999, se ne indichino le ultime quattro cifre.
- Nello svolgimento dei calcoli può essere utile tener conto dei seguenti valori approssimati:

$$\sqrt{2} = 1.4142 \quad \sqrt{3} = 1.7321 \quad \sqrt{5} = 2.2361 \quad \sqrt{7} = 2.6458 \quad \sqrt{13} = 3.6056 \quad \pi = 3.1416.$$

Scadenze importanti

- **10 minuti dall'inizio:** termine ultimo per la scelta del problema Jolly (dopo verrà dato d'ufficio il primo problema).
- **30 minuti dall'inizio:** termine ultimo per rivolgere domande sul testo.
- **120 minuti dall'inizio:** termine della gara.

1. Un tranquillo pomeriggio di maggio

Radice è ormai annoiata di stare all'aria aperta senza far nulla, osservando sua sorella più grande Maggiorete leggere un libro scritto fitto fitto. "A cosa serve un libro senza figure né dialoghi?", pensa. Per distrarsi, si immagina una graziosa figura con due rette parallele a e b , distanti tra loro 1. Su a prende 11 punti distinti $A_{-5}, A_{-4}, \dots, A_4, A_5$, su b invece i punti distinti $B_{-5}, B_{-4}, \dots, B_4, B_5$, in modo che $A_i A_{i+1} = B_i B_{i+1} = 1$ per $i = -5, \dots, 4$, e che $A_i B_i = 1$ per $i = -5, \dots, 5$. Considera poi, per ogni $i = -5, \dots, 4$, l'intersezione dei triangoli $A_i A_{i+1} B_0$ e $B_i B_{i+1} A_0$. Quanto vale la somma delle aree di queste 10 figure? *Detta p/q la soluzione, espressa come frazione ridotta ai minimi termini, si risponda indicando $p+q$.*

2. La minuscola serratura

D'un tratto Radice vede un Banachoniglio infilarsi in un angusto, ma normato, spazio di Banachonigli e incuriosita decide di seguirlo. Appena entrata, è completamente coinvolta in una lunga caduta che la conduce in uno stanzino con una piccolissima porta chiusa a chiave. Ha varcato la soglia del Campo delle Mateviglie. La serratura della porta che Radice vorrebbe aprire è l'unione di un triangolo equilatero di vertici ABC con un cerchio passante per A , simmetrico rispetto alla bisettrice uscente da A , e che non interseca BC . Radice è confusa da questa strana figura e il Banachoniglio le spiega che per entrare deve conoscere il valore del raggio del cerchio. Le dice inoltre che $DE = 7453$ (D è l'intersezione tra la circonferenza ed il lato AC , E è l'intersezione tra il lato BC e la tangente alla circonferenza in D). Radice è ancora perplessa, pertanto il Banachoniglio le dà un ultimo, importante suggerimento: l'area della serratura è uguale alla metà del prodotto tra il raggio del cerchio e il perimetro della serratura. Quale risposta dovrà dare Radice?

3. Drink me, Eat me

Radice trova nello stanzino una piccola ampolla con scritto BEVIMI, contenente un liquido che fa rimpicciolire di un fattore $\frac{243}{512}$ chi ne beve un sorso. Lì vicino si trova anche un pasticcino con scritto MANGIAMI, un morso del quale fa ingrandire le persone di un fattore $\frac{128}{81}$. Radice vuole diventare alta esattamente un terzo rispetto a com'è ora, in modo da riuscire a passare per la piccola porta che ha intravisto. Dal momento che Radice è una persona quadrata, anche se talvolta irrazionale, si mette a riflettere sul da farsi. Quanti morsi dovrà dare al pasticcino?

4. Topo bagnato, topo sfortunato!

Purtroppo Radice ha combinato un disastro: prima si è ingrandita troppo e le è venuto da piangere, poi è diventata minuscola perdendo ampolla e pasticcino. Nuotando nel lago formato dalle sue stesse lacrime, incontra un Topo Logico. Per iniziare una conversazione, Radice comincia a raccontargli della sua adorabile micetta Diny. Non l'avesse mai fatto! Infatti i tre fratelli del Topo Logico morirono uccisi da un gatto. Il Topo Logico è talmente sconvolto che riesce a ricordarsi solo che quando morirono non avevano più di 25 anni e che le loro età, prese a due a due, non erano coprimi, ma considerate tutte e tre insieme lo erano. Radice, allora, per farsi perdonare, scrive tutte le possibili terne di età (non ordinate) su un foglio. Qual è la somma di tutti i numeri scritti da Radice? *Due numeri interi si dicono coprimi se non hanno divisori comuni maggiori di 1*

5. La maratonda

Finalmente Radice riesce a uscire dal lago di lacrime, ma è tutta zuppa. Capitan Liebezout, affinché possa asciugarsi, organizza una maratonda: corre su una circonferenza a velocità costante facendo un giro ogni 12 minuti. Radice vuole raggiungerlo e corre a velocità costante sul perimetro di un pentagono regolare $ABCDE$ inscritto nella circonferenza facendo un giro ogni 11 minuti. All'inizio Radice parte da A e corre verso B sul pentagono, mentre Capitan Liebezout parte dal punto L situato sull'arco minore AB tale che $\angle LBA = 12^\circ$ e corre in direzione di A sulla circonferenza. Dopo quanti secondi si incontrano?

6. La casa del Banachoniglio

Il Banachoniglio ha fretta: deve essere quanto prima dalla Duchessiana. Tuttavia ha dimenticato il suo ventaglio bianco da cerimonia a casa e pertanto ordina a Radice di recuperarlo. La sua abitazione è un cubo e il ventaglio bianco ne è perfettamente al centro, ma in casa sono presenti anche altri ventagli. Se si divide la casa negli 8 cubi uguali che hanno lato metà di quello della casa e un vertice nel ventaglio bianco, ci sono 26 ventagli verdi, uno su ognuno degli altri vertici degli 8 cubi, e 36 ventagli rossi, uno al centro di ogni loro faccia. Radice, vicino al ventaglio bianco, trova una boccettina con scritto EXP e, spinta dalla curiosità, ne beve il contenuto cominciando a crescere a dismisura. Si espande a tal punto che occupa tutti e soli i punti della casa che hanno come ventaglio più vicino quello bianco. Sapendo che il ventaglio più vicino a quello bianco dista 1 m da esso, quanti decimetri cubi di spazio occupa il corpo di Radice?

7. Brucaritmo in trono

Per poter capire meglio dove è finita, Radice si reca dal saggio Brucaritmo. Il rotondeggiante fungo del Brucaritmo è composto da quattro sfere, tutte tangenti tra di loro. Una sfera appoggiata a terra, con il raggio lungo 2000 palmipedoni, ne costituisce il gambo; tre più grosse, con raggio 3000 palmipedoni, sono appoggiate su di esso in modo che i loro tre punti più distanti dal suolo formino un piano parallelo al terreno. Quanti palmipedoni dista questo piano da terra?

8. Una domanda fumosa

Una parte del fungo del Brucaritmo ha il potere di ingrandire la gente, l'altra di farla rimpicciolire. Radice vorrebbe prendere qualche pezzo dal fungo, ma può farlo solo risolvendo l'indovinello che il Brucaritmo le propone: "In tutta la mia lunga vita ho creato moltissimi anelli di fumo con la mia pipa e ne ho sempre tenuto il conto. Ti posso dire che il loro numero è un multiplo di 11 e che (in base 10) è formato da tanti numeri di 2 cifre consecutivi affiancati, a partire dal 10 (come per esempio 10, 1011, 101112, 10111213, ...). Sapendo solo queste informazioni, quanti sono i possibili numeri di anelli di fumo che posso aver fatto?"

9. Serpente, serpente!

Radice calibra male la dose di fungo da mangiare e cresce sempre e sempre più. Questo fa uscire Pigeon dal suo cassetto, dove ha il nido, mettendolo in allarme: teme infatti che Radice sia venuta a mangiare le sue uova. Così si lamenta Pigeon: "Siano a, b, c, d quattro numeri reali tali che $a = \sqrt{44 + \sqrt{71 + a}}$, $b = \sqrt{44 + \sqrt{71 - b}}$, $c = \sqrt{44 - \sqrt{71 + c}}$, $d = \sqrt{44 - \sqrt{71 - d}}$: le mie uova verranno mangiate tra un numero di minuti pari al prodotto $abcd$. Non ti dirò mai il valore di questo numero, viscido serpente!". Quanto vale questo prodotto?

10. Invito a corte

Tornata delle giuste dimensioni, Radice scorge il pesce valletto della $\mathbb{Q}$ di cuori consegnare un prestigioso biglietto alla rana valletto della Duchessiana. Un invito a corte per giocare una partita di croquet non è un privilegio che si riceve tutti i giorni! Persino i biglietti d'invito sono finemente decorati. Sul retro presentano un particolare disegno formato da un triangolo sui cui lati sono costruiti tre rettangoli esternamente ai lati. Inoltre, questi rettangoli sono fatti in modo tale che fra ogni coppia di rettangoli si possa incastrare esattamente un poligono regolare, con un vertice coincidente con uno di quelli del triangolo e due lati coincidenti con quelli dei rettangoli uscenti da esso che non siano anche lati del triangolo. Quante sono le ampiezze diverse che può assumere un angolo del triangolo?

11. Chi dorme pancetta

Radice entra nella casa della Duchessiana, che sta cullando un brutto bambino in lacrime cantandogli questa insolita ninna nanna. *"Due numeri, un giorno, scrissi su un taccuino, se al più grande togli cento, ed uno aggiungi al più piccolo, di uno appena aumenterà il loro prodotto. Ma se seicentonovantacinque volte la somma loro prendi, ragazzotto, ottieni la differenza dei quadrati di quei numeri là. Ora, mi sai dire il loro prodotto quanto fa?"* Sentendo questo, il bambino comincia a strillare e a grugnire, fino a trasformarsi in un porcellino. Quale numero si nasconde dietro la ninna nanna della Duchessiana?

12. Jet lag mateviglioso

Per presentarsi puntuali per la partita di croquet, la Duchessiana ricorda a Radice che occorre tenere presente che nel Campo delle Mateviglie è in uso un calendario differente da quello che usiamo comunemente. In particolare gli anni vengono contati in modo diverso. Quest'anno, nel 2013, succede una cosa buffa: nelle fattorizzazioni in primi delle due date, la nostra e quella del Campo delle Mateviglie, compaiono esattamente le stesse cifre (come ad esempio in 137 e $91 = 13 \cdot 7$). Inoltre, l'anno secondo il calendario del Campo delle Mateviglie è il più piccolo numero per cui valga questa proprietà con 2013. Che anno è nel Campo delle Mateviglie?

13. Un bivio matto

Lasciata la Duchessiana, Radice si trova ora di fronte a un bivio, quando appare il misterioso e affascinante Stregauss. "Ti prego, vorresti dirmi che strada devo prendere?" "Dipende molto dal luogo dove vuoi andare", risponde lo Stregauss. "Poco m'importa dove" dice Radice. "Allora importa poco anche che strada prendi. Facciamo così: ho qui cinque dadi a cinque facce; ora li tiro e se tra i numeri usciti c'è almeno un 1, oppure almeno due 2, oppure almeno tre 3, oppure almeno quattro 4, oppure cinque 5 ti manderò a sinistra dalla Lepre Diofantina, altrimenti a destra dal $\mathcal{K}$ -ellaio Matto". Qual è la probabilità che lo Stregauss mandi Radice dalla Lepre? *Detta p/q la soluzione, espressa come frazione ridotta ai minimi termini, si risponda indicando $p+q$.*

14. L'ora del tè

Radice raggiunge il $\mathcal{K}$ -ellaio Matto, la Lepre Diofantina, il Ghip e il Banachoniglio, che le chiedono di unirsi per la cerimonia del tè. La tavola su cui è servito il tè è rettangolare e ha 20 sedie su ogni lato lungo e una sedia a capotavola (da entrambi i lati). Il $\mathcal{K}$ -ellaio Matto vuole necessariamente sedersi a capotavola. Gli altri quattro vogliono stare tutti seduti vicini tra loro, cioè senza sedie vuote in mezzo (ma non necessariamente vicini al $\mathcal{K}$ -ellaio) e tutti dalla stessa parte del tavolo. Né Radice né il $\mathcal{K}$ -ellaio vogliono però sedere accanto al Ghip. In quanti modi diversi possono sedersi?

15. Un buon non-compleanno a te!

Durante il tè, Radice è messa a conoscenza di una strana usanza: nel Campo delle Mateviglie si usa festeggiare i propri non-compleanni: qualsiasi giorno diverso dal proprio compleanno è un non-compleanno. Ogni giorno vengono organizzate varie feste di non-compleanno. A ciascuna festa partecipano esattamente 140 festeggiati (ovvero persone che quel giorno festeggiano un non-compleanno) e 6 invitati (ovvero persone che quel giorno non festeggiano un non-compleanno). Ogni abitante del Campo delle Mateviglie, il giorno del proprio compleanno, partecipa (come invitato) ad esattamente 33 feste; in tutti gli altri giorni, invece, partecipa (come festeggiato) ad esattamente una festa. Nel Campo delle Mateviglie gli anni durano tutti lo stesso numero di giorni, che però è diverso da 365. Sapendo che gli abitanti del Campo delle Mateviglie sono in numero finito, quanti giorni ci sono in un anno?

16. Alta orologeria

Dopo una robusta dose di burro e una generosa spruzzata di tè, l'orologio del $\mathcal{K}$ -ellaio ha finalmente ripreso a funzionare. Ora segna mezzanotte e un minuto. Per verificare la sua precisione viene effettuato il seguente test. Ogni volta che scocca un'ora esatta (l'ora è un numero intero compreso tra 1 e 24), la Lepre Diofantina prende il numero dell'ora, lo moltiplica per il suo successivo e dice ad alta voce il risultato. Il $\mathcal{K}$ -ellaio Matto, a quel punto, dice ad alta voce il numero ottenuto aggiungendo 1 al triplo del numero detto dalla Lepre. Il Ghip, quindi, dice

sonneccchiando il numero che si ottiene dividendo il numero detto dal $\mathcal{K}$ -ellaio per il cubo del numero detto dalla Lepre. Infine, Radice è incaricata di calcolare la somma di tutti i numeri detti fino a quel momento dal Ghip. Quale ora indicherà l'orologio del $\mathcal{K}$ -ellaio quando tale somma diventerà, per la prima volta, più grande di $\frac{2012}{2013}$? (Si considerino istantanei i calcoli fatti e le parole dette dai personaggi)

17. C'è crisi anche nel Campo delle Mateviglie

Il Due, il Cinque e il Sette di Picche, soldati della $\mathbb{Q}$ di cuori, hanno deciso di far fruttare l'esperienza accumulata aprendo una fabbrica di rose rosse finte. Fanno così: l'anima del fiore è costituita da un icosaedro regolare di polistirolo, con spigoli della lunghezza di un centimetro; attorno vi è un denso strato di raso che occupa tutto lo spazio disponibile fino a una distanza di 2 centimetri dall'icosaedro. Come ultimo passaggio l'esterno della rosa viene pitturato di rosso. Riescono a reperire gratuitamente il polistirolo e il raso, mentre la vernice rossa costa loro mille Fiorini per ogni centimetro quadrato di superficie da colorare. Il prezzo di vendita, invece, è fissato a mille Fiorini per ogni centimetro cubo di raso (il polistirolo e la vernice non vengono considerati). Con orrore, si accorgono che le spese sono superiori al ricavato della vendita. E nel Campo delle Mateviglie la pena per debiti non pagati è la decapitazione! Quanti Fiorini perdono per ogni rosa?

18. Un circolo esclusivo

Radice raggiunge la $\mathbb{Q}$ di cuori per cominciare la partita di croquet. L'elitario circolo di croquet *Come quando fuori piove* vanta solamente quattro iscritti: il $\mathbb{K}$, la $\mathbb{Q}$ e il $\mathbb{F}$ di cuori più il Banachoniglio. Il giorno in cui fu fondato erano presenti tutti e quattro, poi il $\mathbb{K}$ è venuto ogni 42 giorni, la $\mathbb{Q}$ ogni 35, il $\mathbb{F}$ ogni 45 e il Banachoniglio ogni 28. Il circolo è rimasto aperto solo nei giorni in cui c'era almeno uno degli iscritti. La $\mathbb{Q}$ di cuori spiega a Radice che oggi sarebbe stato il 487° giorno di apertura, ma in suo onore si sono eccezionalmente presentati tutti gli iscritti. Quanti giorni sono passati dalla fondazione del *Come quando fuori piove*?

19. Un macabro testa a testa

Le carte della $\mathbb{Q}$ di cuori sono molto preoccupate: non passa giorno che non si oda il grido "Tagliategli la testa!". Tengono anche un resoconto di quante esecuzioni capitali ci sono ogni giorno. Ultimamente hanno registrato questi dati:

$$d(2002) = 11 \qquad d(2006) = 7 \qquad d(2008) = 5 \qquad d(2009) = 4 \qquad d(2011) = 2$$

dove $d(t) = h$ è la funzione decapitazione e indica che sono state tagliate h teste nel giorno t del resoconto (un numero negativo indica persone graziate). Ultimamente le carte si sono rese conto che per uno schiribizzo della $\mathbb{Q}$ di cuori, d è un polinomio a coefficienti interi. Oggi è il giorno 2013 del resoconto e $\mathbb{Q}$ è molto nervosa per la partita di croquet, per cui il numero sarà inevitabilmente un intero positivo. Quante teste rotoleranno oggi come minimo?

20. La febbre del sarago sera

Radice a lungo andare si annoia della partita di croquet: le palline/riccio si muovono di propria volontà e i fenicotteri/mazze non collaborano. Coglie così l'occasione per chiacchierare con la Falsa Quadratuga e il Grif1. Senza dubbio, il ballo preferito dai suoi interlocutori è la quadriglia delle aragoste. Raccontano a Radice, infatti, che ogni sabato il mare e la spiaggia brulicano di pesci e crostacei ballerini. Lo scorso sabato, ad esempio, per contare i danzatori si sarebbero potuti sommare tutti i numeri interi positivi esprimibili come prodotti di potenze di 2 e 3, purché la somma degli esponenti sia compresa tra 0 e 9, estremi inclusi. Quanti erano i partecipanti alla quadriglia di sabato? *Rispondere indicando le ultime quattro cifre del risultato.*

21. Un'operazione ambiziosa

La Falsa Quadratuga vuole insegnare a Radice le quattro operazioni della Scuola del Mare: Ambizione, Distrazione, Bruttificazione, e Derisione. L'Ambizione, in particolare, si indica con $*$ ed è definita come segue: $x * y = x + y - xy$. Per verificare che Radice abbia capito, la Falsa Quadratuga le chiede di scegliere quattro numeri reali a, b, c, d , tali che $0 \leq a, b, c, d \leq 1$ e $a + 2b + 3c + 4d = 7$, in modo che la quantità $(a * b) * (c * d)$ sia la minima possibile. Qual è il valore di questo minimo? *Nella risposta indicare le prime quattro cifre dopo la virgola del risultato.*

22. Il Fante a processo

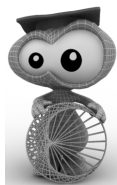
Una notizia inaspettata raggiunge Radice. Il principe ereditario $\mathbb{F}$ di cuori è chiamato in tribunale, accusato di aver barato nel gioco di carte *Non perdere la testa*. Il gioco funziona così: uno dei giocatori fa da mazziere e mischia un mazzo di 52 carte numerate da 1 a 52. Dopodiché, a partire dalla destra del mazziere in senso antiorario, ogni giocatore a turno pesca una carta, tenendola coperta, e il mazziere pesca quindi l'ultima carta. Le carte vengono mostrate tutte insieme e chi ha la carta più bassa esce dal gioco. Per decapitazione. Le carte pescate vengono quindi scartate e si prosegue il gioco come prima, con i giocatori rimasti, utilizzando le carte avanzate nel mazzo. Vince, o meglio sopravvive, l'ultimo giocatore in gara. $\mathbb{F}$ di cuori ha vinto una partita con 9 giocatori (lui compreso) da mazziere, avendo mescolato le carte per circa tre ore. Se m è il numero di modi diversi in cui ha potuto mescolare il mazzo per essere sicuro di vincere, per quanti numeri primi distinti è divisibile m ? *Si ricorda che 1 non è primo.*

23. Tanti testimoni testardi e testoni

Nel processo contro il $\mathbb{F}$ di cuori sono chiamati a testimoniare 7777 abitanti del Campo delle Mateviglie, che vengono fatti sedere attorno a una immensa tavola rotonda. Per legge, un testimone può sempre dire la verità o sempre mentire. Tutti e 7777 prendono a parlare contemporaneamente e, sorprendentemente, pronunciano all'unisono la stessa frase: "Se la persona alla mia destra dice la verità, allora la persona alla mia sinistra mente". Se, sotto queste condizioni, M è il massimo numero possibile di testimoni veritieri e m è il minimo, quanto vale $M + m$?

24. Un brusco risveglio

Durante il processo, Radice si accorge che sta ricominciando a crescere. Tuttavia non si tratta di una crescita graduale, ma avviene in sei passi successivi. La $\mathbb{Q}$ di cuori si spaventa e ordina di tagliarle la testa, gettandole contro tutti i suoi soldati, le ormai minuscole carte del mazzo. In questo turbinio di suoni e di colori, Radice si sveglia accanto alla sua gatta Diny e si accorge di aver sognato tutto. Si ricorda solo che prima del primo passo era alta esattamente come il $\mathbb{K}$ di cuori, che al termine del sesto era alta 12! (dodici fattoriale) volte il $\mathbb{K}$ e che dopo ogni passo la sua altezza è diventata un multiplo intero di quella precedente. È possibile inoltre che durante qualche passo questo multiplo fosse 1, cioè che non sia cresciuta affatto. Se analizziamo le sei altezze al termine di ogni passo, in quanti modi diversi Radice può essere cresciuta? *Nella risposta, indicare le ultime quattro cifre del risultato ottenuto.*



XIV GARA NAZIONALE A SQUADRE

Finale Nazionale – Soluzioni – 10 Maggio 2013

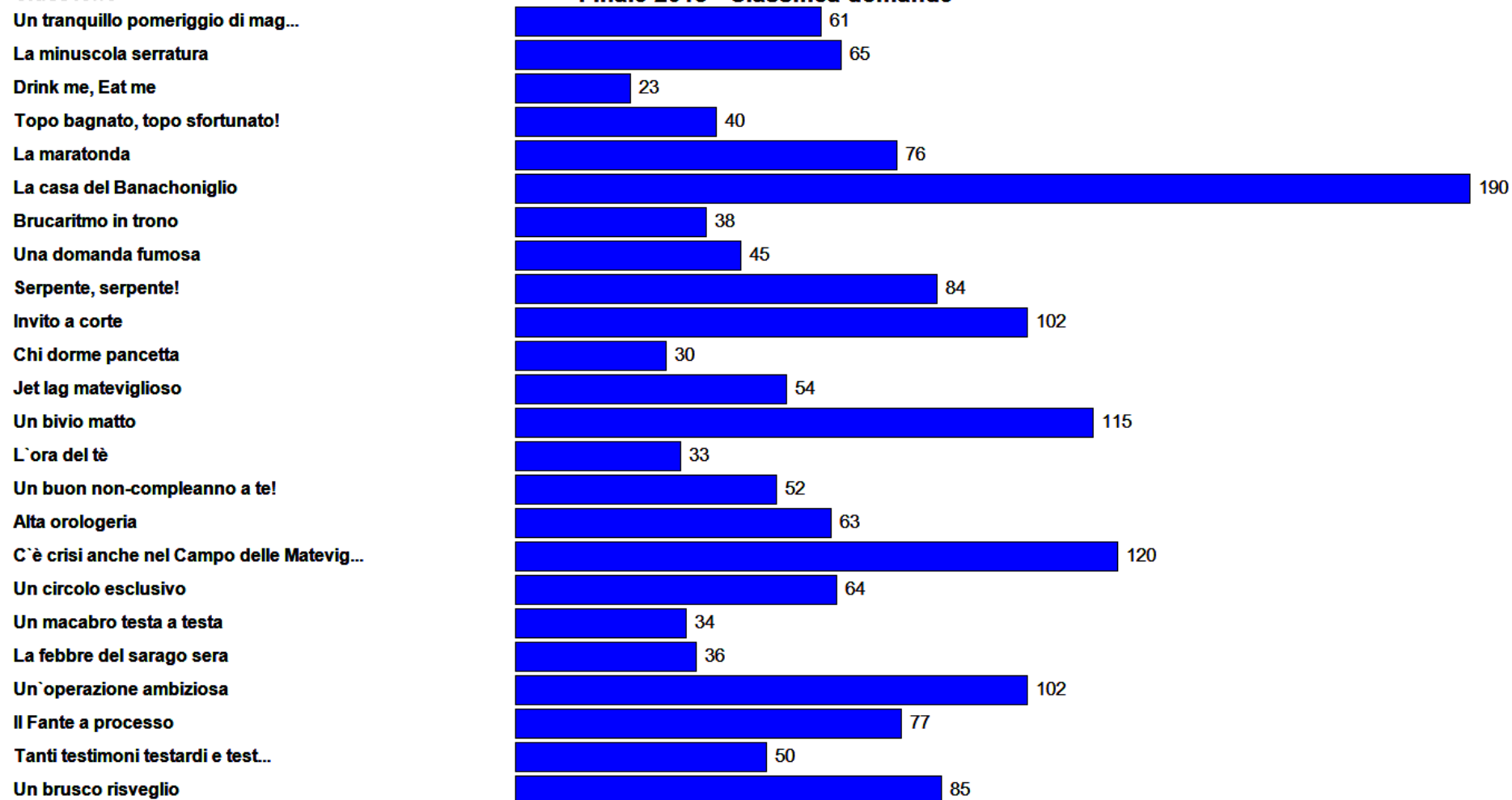


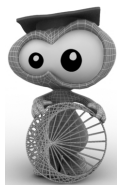
ZANICHELLI

Nr.	Problema	Soluzione
1	Un tranquillo pomeriggio di maggio	1193
2	La minuscola serratura	7453
3	Drink me, Eat me	0009
4	Topo bagnato, topo sfortunato!	0560
5	La maratonda	1056
6	La casa del Banachoniglio	0707
7	Brucaritmo in trono	8605
8	Una domanda fumosa	0016
9	Serpente, serpente!	1865
10	Invito a corte	0014
11	Chi dorme pancetta	4206
12	Jet lag mateviglioso	1793
13	Un bivio matto	1143
14	L'ora del tè	0800
15	Un buon non-compleanno a te!	0771
16	Alta orologeria	0012
17	C'è crisi anche nel Campo delle Mateviglie	8094
18	Un circolo esclusivo	5670
19	Un macabro testa a testa	3080
20	La febbre del sarago sera	6526
21	Un'operazione ambiziosa	9868
22	Il Fante a processo	0015
23	Tanti testimoni testardi e testoni	9073
24	Un brusco risveglio	7536

	Copernico, Brescia	1562
	Mascheroni, Bergamo	1150
	Righi, Roma	1041
	Cassini, Genova	996
	Da Vinci, Treviso	993
	Marconi, Carrara	926
	Calini, Brescia	874
	Cattaneo, Torino	858
	Marinelli, Udine	781
	Belfiore, Mantova	764
	Marconi, Conegliano	753
	Alessi, Perugia	719
	Majorana, Brindisi	639
	Bertoni, Udine	634
	Dini, Pisa	539
	Einstein, Teramo	513
	D'Arzo, Montecchio Emilia	507
	Ribezzo, Francavilla Fontana	492
	Galilei, Catania	486
	Golgi, Breno	473
	Redi, Arezzo	437
	Rossi, Massa	422
	Newton, Roma	400
	Quadri, Vicenza	394
	Stampacchia, Tricase	328
	Amaldi, Novi Ligure	303
	Grassi, Lecco	290
	Lucrezio Caro, Cittadella	275
	Douhet, Firenze	202
	Faszekas, Budapest	1175
	Skody, Prerov	1175
	Westminster, Londra	759

01) Mascheroni	1	2	3	4	5	6	2	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	3								
02) Cassini	1	3	2	1	3	4	5	6	1	7	2	8	9	10	2	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24					
03) Calini	1	2	3	4	5		6	7	8	9		10	11	12	13	14	15	16	17	18	2	19	20	21	22	23		24						
04) Copernico	1	2	3	4	5	6	2	7	8	9		10	1	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	3						
05) Marconi	1	2	1	3	4	1	5	6	1	7	8	9		10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	3	21	22	23	24	4				
06) D'Arzo	1	2	3	1	4	5	6	7	8	9		10	11	2	12	13	1	14	15	16	1	17	18	19	1	20	21	22	23	24				
07) Righi	1	2		3	4	5	2	6	3	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	1	24	4					
08) Majorana	1	2	3	4	5	6	7	8	9		10	1	11	12	2	13	1	14	15	16	17	18	19	20	1	21	22	23	24					
09) Marconi	1	2		3	4	5	2	6	2	7	8	2	9	10	11	12	13	14	2	15	16	17	18	19	20	21	22		23	24				
10) Alessi	1	2	3	4	5	6	7	8	9		10	11	12	13	2	14	15	16	17	18	3	19	20	21	1	22	23	24						
11) Grassi	1	2		3	4	5	6	1	7	8	9		10	1	11	12	13	14	1	15	16	17	18	1	19	20	3	21	22	23	24			
12) Bertoni	1	2	3	4	5	6	4	7	1	8	9		10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24							
13) Dini	1	2	1	3	4	5		6	7	8	9		10	11	12	13	1	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	2	24					
14) Galilei	1	2		3	4	5	6	1	7	8	9		10	2	11	12	13	1	14	15	1	16	17	18	19	20	21	22	23	1	24			
15) Marinelli	1	2		3	4	2	5	6	1	7	8	9		10	11	12	13	14	15	16		17	18	19	20	21	1	22	23	24				
16) Da Vinci	1	2		3	1	4	1	5	6	7	1	8	9		10	11	12	13	3	14	1	15	16	17	18	19	20	21	2	22	23	24		
17) Redi	1	2	3	4	5	6	1	7	8	9		10	11	12	13	14	2	15	16	1	17	18	2	19	20	21	22	23	24					
18) Rossi	1	1	2	3	4	5	6	7	8	9		10	11	12	13	14	2	15	16	17	18	19	20	1	21	22	23	24						
19) Golgi	1	2		3	4	5		6	7	8	1	9		10	11	12	13	2	14	15	16	17	18	1	19	20	21	22	23	24				
20) Douhet	1	1	2	1	3	4	5	6	2	7	8	9		10	11	12	13	1	14	1	15	1	16	17	18	19	1	20	1	21	22	23	3	24
21) Belfiore	1	2	3	4	4	5	6	7	8	9		10	11	12	1	13	1	14	15	16	17	18	19	20	21	1	22	23	24					
22) Cattaneo	1	2	1	3	4	5	2	6	3	7	8	9		10	2	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	1	22	23	24				
23) Stampacchia	1	2	3	4	5	6	1	7	1	8	9		10	11	12	2	13	3	14	1	15	1	16	2	17	18	1	19	20	21	22	23	24	
24) Quadri	1	2	3	4	5	6	2	7	8	1	9		10	11	12	13	2	14	15	16	5	17	1	18	19	20	1	21	22	23	1	24		
25) Newton	1	2	3	4	5	6	1	7	8	9		10	2	11	12	13	14	15	16	17	18	2	19	20	2	21	22	23	1	24				
26) Einstein	1	2	3	4	5	1	6	7	8	9		10	1	11	12	13	2	14	15	16	17	18	19	20	21	1	22	23	24					
27) Amaldi	1	2	3	4	5	6	4	7	8	9		10	2	11	12	13	1	14	15	16	2	17	18	19	20	21	22	23	24					
28) Ribezzo	1	2	1	3	4	2	5	6	1	7	8	9		10	11	12	13	1	14	2	15	16	17	18	19	20	21	22	23	1	24			
29) Lucrezio Caro	1	2	3	4	5	6	2	7	8	1	9		10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1	20	21	22	23	2	24					
30) Faszekas	1	2	3	4	5	6	3	7	8	9		10	11	12	13	14	15	16	1	17	18	1	19	20	21	22	23	24						
31) Westminster	1	2		3	4	5	6	2	7	8	9		10	2	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	1	21	22	23	24					
32) Skody	1	2	3	4	5	6	7	2	8	9		10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	1							





XIV GARA NAZIONALE A SQUADRE

Gara del pubblico – 10 Maggio 2013



ZANICHELLI

Istruzioni Generali

- Per ogni problema, indicare sul cartellino delle risposte un intero compreso tra 0000 e 9999.
- Se la quantità richiesta non è un numero intero, ove non altrimenti indicato, si indichi la sua parte intera.
- Se la quantità richiesta è un numero negativo, oppure se il problema non ha soluzione, si indichi 0000.
- Se la quantità richiesta è un numero intero maggiore di 9999, se ne indichino le ultime quattro cifre.
- Nello svolgimento dei calcoli può essere utile tener conto dei seguenti valori approssimati:

$$\sqrt{2} = 1.4142 \quad \sqrt{3} = 1.7321 \quad \sqrt{5} = 2.2361 \quad \sqrt{7} = 2.6458 \quad \sqrt{13} = 3.6056 \quad \pi = 3.1416.$$

Scadenze importanti

- **10 minuti dall'inizio:** termine ultimo per la scelta del problema Jolly (dopo verrà dato d'ufficio il primo problema).
- **30 minuti dall'inizio:** termine ultimo per rivolgere domande sul testo.
- **90 minuti dall'inizio:** termine della gara.

1. Un libro senza figure

[25]

Radice è ormai annoiata di stare all'aria aperta senza far nulla, osservando sua sorella più grande Maggioret leggere un libro scritto fitto fitto. "A cosa serve un libro senza figure né dialoghi?", pensa. Per distrarsi, si immagina una graziosa figura con due rette parallele a e b , distanti tra loro 1. Su a prende 13 punti distinti $A_{-6}, A_{-5}, \dots, A_5, A_6$, su b invece i punti distinti $B_{-6}, B_{-5}, \dots, B_5, B_6$, in modo che $A_i A_{i+1} = B_i B_{i+1} = 1$ per $i = -6, \dots, 5$, e che $A_i B_i = 1$ per $i = -6, \dots, 6$. Considera poi, per ogni $i = -6, \dots, 5$, l'intersezione dei triangoli $A_i A_{i+1} B_0$ e $B_i B_{i+1} A_0$. Quanto vale la somma delle aree di queste 12 figure? *Detta p/q la soluzione, espressa come frazione ridotta ai minimi termini, si risponda indicando $p + q$.*

2. È tardi! È tardi!

[50]

Radice osserva il Banachoniglio saltellare con gran fretta! Al primo balzo, il Banachoniglio salta di 12 cm; al secondo balzo di 21 cm, e poi continua a saltare in modo che, se a_n è la lunghezza dell' n -esimo salto, si abbia $a_{n+1} = 10a_n - 25a_{n-1} + 176$. Qual è l'ampiezza del 2013° salto del Banachoniglio? (Fornire le ultime 4 cifre)

3. Basta un poco di zucchero

[15]

Radice trova nello stanzino una piccola ampolla con scritto BEVIMI, contenente un liquido che fa rimpicciolire di un fattore $\frac{243}{512}$ chi ne beve un sorso. Lì vicino si trova anche un pasticcino con scritto MANGIAMI, un morso del quale fa ingrandire le persone di un fattore $\frac{128}{81}$. Radice vuole diventare alta esattamente $\frac{2}{81}$ di com'è ora, in modo da riuscire a passare per la piccola porta che ha intravisto. Dal momento che Radice è una persona quadrata, anche se talvolta irrazionale, si mette a riflettere sul da farsi. Quanti morsi dovrà dare al pasticcino?

4. Una famiglia topologica

[50]

Purtroppo Radice ha combinato un disastro: prima si è ingrandita troppo e le è venuto da piangere, poi è diventata minuscola perdendo ampolla e pasticcino. Nuotando nel lago formato dalle sue stesse lacrime, incontra un Topo Logico. Per iniziare una conversazione, Radice comincia a raccontargli della sua adorabile micetta Diny. Non l'avesse mai fatto! Infatti i tre fratelli del Topo Logico morirono uccisi da un gatto. Il Topo Logico è talmente sconvolto che riesce a ricordarsi solo che quando morirono non avevano più di 30 anni e che le loro età, prese a due a due, non erano coprimi, ma considerate tutte e tre insieme lo erano. Radice, allora, per farsi perdonare, scrive tutte le possibili terne di età (non ordinate) su un foglio. Qual è la somma di tutti i numeri scritti da Radice? *Due numeri interi si dicono coprimi se non hanno divisori comuni maggiori di 1.*

5. Serpente, serpente!

[55]

Radice calibra male la dose di fungo da mangiare e cresce sempre e sempre più. Questo fa uscire Pigeon dal suo cassetto, dove ha il nido, mettendolo in allarme: teme infatti che Radice sia un serpente venuto a mangiare le sue uova. A nulla servono le assicurazioni di Radice. Così si lamenta Pigeon: "Esiste un numero reale $p > 1$ con la seguente proprietà. Sia x_n una successione di numeri reali, definita da $x_0 = 1/p$ e $x_{n+1} = 2x_n \sqrt{1 - x_n^2}$; le mie uova verranno mangiate tra k ore, dove k è il più piccolo intero positivo tale che $x_k = 1/p$. Non ti dirò mai quanto vale p , viscido serpente!" Qual è il più grande valore di p per cui le uova verranno mangiate tra 12 ore?

6. I vani suggerimenti del Brucaritmo

[30]

Il Brucaritmo ha mostrato a Radice quali funghi la faranno crescere, e di quanto, ma Radice si è distratta ed ha raccolto 37 funghi a caso. Sapendo che ogni fungo la farà crescere di 157 cm con il 50% di probabilità, e di 42 cm con il restante 50%, qual è la probabilità che, dopo aver mangiato i 37 funghi, Radice sia cresciuta di almeno 2013 cm? Fornire le ultime 4 cifre del *numeratore* della frazione ridotta in minimi termini.

7. L'invito della regina

[30]

Tornata delle giuste dimensioni, Radice scorge il pesce valletto della $\mathbb{Q}$ di cuori consegnare un prestigioso biglietto alla rana valletto della Duchessiana. Un invito a corte per giocare una partita di croquet non è un privilegio che si riceve tutti i giorni! Persino i biglietti d'invito sono finemente decorati. Sul retro presentano un particolare disegno formato da un triangolo sui cui lati sono costruiti tre rettangoli esternamente ai lati. Inoltre, questi rettangoli sono fatti in modo tale che fra ogni coppia di rettangoli si possa incastrare esattamente un poligono regolare, con un vertice coincidente con uno di quelli del triangolo e due lati coincidenti con quelli dei rettangoli uscenti da esso che non siano anche lati del triangolo. Quante sono le ampiezze diverse che può assumere un angolo del triangolo?

8. Per dormire meglio**[20]**

Radice entra nella casa della Duchessiana, che sta cullando un brutto bambino in lacrime cantandogli questa insolita ninna nanna. “*Due numeri, un giorno, scrissi su un taccuino, se al più grande togli cento, ed uno aggiungi al più piccolo, di uno appena aumenterà il loro prodotto. Ma se seicentonovantacinque volte la somma loro prendi, ragazzotto, ottieni la differenza dei quadrati di quei numeri là. Ora, mi sai dire il loro prodotto quanto fa?*” Sentendo questo, il bambino comincia a strillare e a grugnire, fino a trasformarsi in un porcellino. Quale numero si nasconde dietro la ninna nanna della Duchessiana?

9. Non importa dove vai**[55]**

Lasciata la Duchessiana, Radice si trova ora di fronte a un bivio, quando appare il misterioso e affascinante Stregauss. “Ti prego, vorresti dirmi che strada devo prendere?” “Dipende molto dal luogo dove vuoi andare”, risponde lo Stregauss. “Poco m’importa dove” dice Radice. “Allora importa poco anche che strada prendi. Facciamo così: ho qui sei normalissimi dadi a sei facce; ora li tiro, e se tra i numeri usciti c’è almeno un 1, oppure almeno due 2, oppure almeno tre 3, oppure almeno quattro 4, oppure almeno cinque 5, oppure almeno sei 6, ti manderò a sinistra dalla Lepre Diofantina, altrimenti a destra dal $\mathcal{K}$ -ellaio Matto”. Qual è la probabilità che lo Stregauss mandi Radice dalla Lepre? Fornire le ultime 4 cifre del *numeratore* della frazione ridotta in minimi termini.

10. L’ora del tè**[25]**

Radice raggiunge il $\mathcal{K}$ -ellaio Matto, la Lepre Diofantina, il Ghip e il Banachoniglio, che le chiedono di unirsi per la cerimonia del tè. La tavola su cui è servito il tè è rettangolare e ha 20 sedie su ogni lato lungo e una sedia a capotavola (da entrambi i lati). Il $\mathcal{K}$ -ellaio Matto vuole necessariamente sedersi a capotavola. Gli altri quattro vogliono stare tutti seduti vicini tra loro, cioè senza sedie vuote in mezzo (ma non necessariamente vicini al $\mathcal{K}$ -ellaio) e tutti dalla stessa parte del tavolo. Radice e la Lepre vogliono però che il Ghip si sieda vicino a loro. In quanti modi diversi possono sedersi?

11. Uno strano cucù**[35]**

Dopo una robusta dose di burro e una generosa spruzzata di tè, l’orologio del $\mathcal{K}$ -ellaio ha finalmente ripreso a funzionare. Ora segna mezzanotte e un minuto. Per verificare la sua precisione viene effettuato il seguente test. Ogni volta che scocca un’ora esatta (l’ora è un numero intero compreso tra 1 e 24), la Lepre Diofantina prende il numero dell’ora, lo moltiplica per il suo successivo e dice ad alta voce il risultato. Il $\mathcal{K}$ -ellaio Matto, a quel punto, dice ad alta voce il numero ottenuto aggiungendo 1 al triplo del numero detto dalla Lepre. Il Ghip, quindi, dice sonnecchiando il numero che si ottiene dividendo il numero detto dal $\mathcal{K}$ -ellaio per il cubo del numero detto dalla Lepre. Infine, Radice è incaricata di calcolare la somma di tutti i numeri detti fino a quel momento dal Ghip. Quale ora indicherà l’orologio del $\mathcal{K}$ -ellaio quando tale somma diventerà, per la prima volta, più grande di 2012/2013? (Si considerino istantanei i calcoli fatti e le parole dette dai personaggi)

12. Un circolo perfetto**[45]**

Radice raggiunge la $\mathbb{Q}$ di cuori per cominciare la partita di croquet. L’elitario circolo di croquet *Come quando fuori piove* vanta solamente quattro iscritti: il $\mathbb{K}$, la $\mathbb{Q}$ e il $\mathbb{F}$ di cuori più il Banachoniglio. Il giorno in cui fu fondato erano presenti tutti e quattro, poi il $\mathbb{K}$ è venuto ogni 42 giorni, la $\mathbb{Q}$ ogni 35, il $\mathbb{F}$ ogni 28 e il Banachoniglio ogni 45. Il circolo è rimasto aperto solo nei giorni in cui c’era almeno uno degli iscritti. La $\mathbb{Q}$ di cuori spiega a Radice che oggi sarebbe stato il 451° giorno di apertura, ma in suo onore si sono eccezionalmente presentati tutti gli iscritti. Quanti giorni sono passati dalla fondazione del *Come quando fuori piove*?

13. Il campo da croquet**[55]**

Radice, la $\mathbb{Q}$ di cuori e da Duchessiana organizzano una partita a croquet, che nel Campo delle Mateviglie si svolge in un campo triangolare ABC di lati $AB = 52$, $BC = 34$, $CA = 50$. Radice, dal vertice A , lancia la sua pallina lungo l’altezza relativa al lato BC . La $\mathbb{Q}$ di cuori, dal vertice B , la lancia lungo la bisettrice uscente da quel vertice, la Duchessiana invece lungo la mediana uscente da C . Determinare l’area del triangolo PQR formato dalle intersezioni a due a due di tali rette. Fornire il *denominatore* della frazione ridotta ai minimi termini.

14. L’operazione della Quadratuga**[50]**

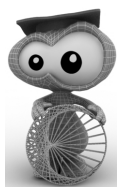
La Falsa Quadratuga vuole insegnare a Radice le quattro operazioni della Scuola del Mare: Ambizione, Distrazione, Bruttificazione, e Derisione. L’Ambizione, in particolare, si indica con $*$ ed è definita come segue: $x*y = x + y - xy$. Per verificare che Radice abbia capito, la Falsa Quadratuga le chiede di scegliere quattro numeri reali a, b, c, d , tali che $0 \leq a, b, c, d \leq 1$ e $a + 2b + 3c + 4d = 7$, in modo che la quantità $(a*b)*(c*d)$ sia la minima possibile. Qual è il valore di questo minimo? *Nella risposta indicare le prime quattro cifre dopo la virgola del risultato.*

15. Obiezione, vostro onore!**[25]**

Nel processo contro il $\mathbb{F}$ di cuori sono chiamati a testimoniare 7999 abitanti del Campo delle Mateviglie, che vengono fatti sedere attorno a una immensa tavola rotonda. Per legge, un testimone può sempre dire la verità o sempre mentire. Tutti e 7999 prendono a parlare contemporaneamente e, sorprendentemente, pronunciano all’unisono la stessa frase: “Se la persona alla mia destra dice la verità, allora la persona alla mia sinistra mente”. Se, sotto queste condizioni, M è il massimo numero possibile di testimoni veritieri e m è il minimo, quanto vale $M + m$?

16. In tanti passi**[35]**

Durante il processo, Radice si accorge che sta ricominciando a crescere. Tuttavia non si tratta di una crescita graduale, ma avviene in cinque passi successivi. La $\mathbb{Q}$ di cuori si spaventa e ordina di tagliarle la testa, gettandole contro tutti i suoi soldati, le ormai minuscole carte del mazzo. In questo turbinio di suoni e di colori, Radice si sveglia accanto alla sua gatta Diny e si accorge di aver sognato tutto. Si ricorda solo che prima del primo passo era alta esattamente come il $\mathbb{K}$ di cuori, che al termine del quinto era alta 12! (dodici fattoriale) volte il $\mathbb{K}$ e che dopo ogni passo la sua altezza è diventata un multiplo intero di quella precedente. È possibile inoltre che durante qualche passo questo multiplo fosse 1, cioè che non sia cresciuta affatto. Se analizziamo le sei altezze al termine di ogni passo, in quanti modi diversi Radice può essere cresciuta? *Nella risposta, indicare le ultime quattro cifre del risultato ottenuto.*



XIV GARA NAZIONALE A SQUADRE

Gara del pubblico – Soluzioni – 10 Maggio 2013



ZANICHELLI

Nr.	Problema	Punti	Soluzione
1	Un libro senza figure	25	6719
2	È tardi! È tardi!	50	8136
3	Basta un poco di zucchero	15	0031
4	Una famiglia topologica	50	0960
5	Serpente, serpente!	55	1304
6	I vani suggerimenti del Brucaritmo	30	2499
7	L'invito della regina	30	0014
8	Per dormire meglio	20	4206
9	Non importa dove vai	55	6337
10	L'ora del tè	25	0272
11	Uno strano cucù	35	0012
12	Un circolo perfetto	45	5250
13	Il campo da croquet	55	0015
14	L'operazione della Quadratuga	50	9868
15	Obiezione, vostro onore!	25	9332
16	In tanti passi	35	7250

Tre tigri contro trentatre trentini		268
Newton		265
Mille e sette Matteo		210
Rosanero		177
Cattaneo, Torino,		172
Gli spigati		152
Robin Hood		144
130 Squadra Spalla		
127 Don Milani, Montichiari,		
107 I ripescati		
101 Liceo Bachmann, Tarvisio,		
96 Galfer		
82 1 2 3... stella		
67 Dini-Pisa		
67 Calini-Cope		
62 L.S. Cittadella		
59 Componenti		
57 PiGreco mezzi		
51 I riportati dalla piena		
42 Frod-giro!		
37 I tre moschettieri		
37 Attraversamento pedonale		
36 Leonardogiovani		
25 A. Volta		
24 Sobrero, Casale Monf.to,		
17 Acqua e parmigiano		
17 La ghirlanda		
12 I pitagorici... più teorici		
8 Alpinooooo		
2 E.Amaldi, Novi Ligure,		
-2 Calvin & Hobbes		
-8 Copernico		
-18 L.S. G. Rummo, Benevento,		
-29 Seventy-Six		
-35 I matenauti		

01) Tre tigri contro trentatre trentini	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
02) Calini-Cope	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
03) Componenti	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
04) Gli spigati	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
05) L.S. Cittadella	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
06) Squadra Spalla	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
07) Acqua e parmigiano	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
08) Mille e sette Matteo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
09) Calvin & Hobbes	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
10) Don Milani	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
11) Seventy-Six	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
12) I riportati dalla piena	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
13) Rosanero	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
14) Sobrero	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
15) E.Amaldi	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
16) Robin Hood	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
17) Cattaneo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
18) Liceo Bachmann	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
19) L.S. G. Rummo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
20) 1 2 3... stella	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
21) I ripescati	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
22) La ghirlanda	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
23) Newton	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
24) Dini-Pisa	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
25) Frod-giro!	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
26) Alpinoooo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
27) I pitagorici... più teorici	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
28) Leonardogiovani	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
29) I matenauti	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
30) PiGreco mezzi	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
31) I tre moschettieri	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
32) Galfer	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
33) Copernico	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
34) Attraversamento pedonale	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
35) A. Volta	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16

