Unione Matematica Italiana
Ministero dell'Istruzione

Olimpiadi della Matematica

Gara di Febbraio

16 febbraio 2022

Problemi a risposta multipla – 5 punti

1. Viale Marconi è lungo 800m; a 200m da un estremo c'è un parchimetro, a 100m dall'estremo opposto c'è un negozio di vestiti. Astolfo vuole parcheggiare la sua macchina, prendere un biglietto al parchimetro, tornare alla macchina per esporlo sul parabrezza, visitare il negozio e infine ritornare alla macchina. Inoltre è pigro e quindi vuole camminare il meno possibile; dove deve parcheggiare per farlo? Indicare l'insieme dei punti del viale che minimizzano la distanza che Astolfo deve percorrere a piedi.

   (A) Il punto davanti al parchimetro **(B)** Il punto davanti al negozio **(C)** Il punto medio tra il parchimetro e il negozio **(D)** Tutti i punti del viale **(E)** Tutti i punti del tratto di viale compreso tra il parchimetro e il negozio.

2. Il risultato della divisione di 57 per 111 è un numero della forma $0,\ldots$ con infinite cifre dopo la virgola. Quanto vale la somma delle prime 2022 cifre dopo la virgola?

   (A) 3033 **(B)** 4044 **(C)** 5055 **(D)** 6066 **(E)** 7077

3. Tre circonferenze di raggio unitario sono tangenti tra loro e una quarta circonferenza è tangente a tutte e tre, e non le racchiude. Quanto vale il raggio della quarta circonferenza?

   (A) $\frac{\sqrt{3}+1}{24}$ **(B)** $\frac{1}{8}$ **(C)** $\frac{\sqrt{3}}{12}$ **(D)** $\frac{2\sqrt{3}}{3}-1$ **(E)** $\frac{\sqrt{3}-1}{4}$

4. Il polinomio $p(x)$ ha la seguente proprietà: per ogni terna di interi a, b, c tali che $a+b+c=2022$ si ha che $p(a)+p(b)+p(c)=p(674)$. Si sa inoltre che $p(0)=-2696$. Quanto vale $p(2022)$?

   (A) -2696 **(B)** 674 **(C)** 5392 **(D)** 8088 **(E)** Non è possibile determinarlo con i dati forniti.

5. Lucia vuole scrivere tre interi positivi a, b, c in modo che ognuno di essi sia un divisore di 30 e che i massimi comuni divisori fra due termini consecutivi (cioè $\mathrm{MCD}(a, b)$ e $\mathrm{MCD}(b, c)$) siano numeri primi. In quanti modi può farlo?

   (A) 69 **(B)** 72 **(C)** 105 **(D)** 2^7 **(E)** Nessuna delle precedenti.

6. Sia ABC un triangolo isoscele con $AB = AC$. L'altezza uscente da A misura 15 mentre l'altezza uscente da B misura 24. Quanto vale l'area di ABC?

   (A) 180 **(B)** 300 **(C)** $240\sqrt{2}$ **(D)** $200\sqrt{3}$ **(E)** 320

7. Alla lavagna è scritta la moltiplicazione $x \times y$, dove x e y sono numeri interi positivi di tre cifre. Nicolò, un po' sbadato, non ha notato il simbolo di moltiplicazione e ricopia sul suo quaderno il numero di sei cifre ottenuto giustapponendo x e y. L'insegnante, passando fra i banchi, fa notare a Nicolò che il numero da lui scritto è uguale a 7 volte il prodotto xy. Quanto vale la somma $x + y$?

   (A) 125 **(B)** 286 **(C)** 312 **(D)** 487 **(E)** 513

8. In una partita di *palla Riemanniana* si affrontano due squadre; in ogni momento, ciascuna schiera in campo $k > 1$ giocatrici. Alla fine di ogni azione viene assegnato un punto a una delle due squadre; inoltre, ciascuna squadra può effettuare un numero arbitrario di sostituzioni prima che abbia inizio l'azione successiva. Alice e Barbara fanno parte della squadra delle *Geodetiche*. Alla fine della partita di oggi, Alice osserva che, mentre lei era in campo, le *Geodetiche* hanno vinto

7 azioni in più di quante ne abbiano perse. Quando Barbara era in campo, invece, hanno perso 2 azioni in più di quante ne abbiano vinte. Ciascuna delle altre giocatrici delle *Geodetiche* ha partecipato a tante azioni vincenti quante perdenti. Quanto vale k?

(A) 3 **(B)** 5 **(C)** 6 **(D)** 9 **(E)** I dati non sono sufficienti per determinarlo.

9. Poniamo $a_1 = 1$ e, per ogni $n \geq 2$,

$$a_n = n(a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}).$$

Qual è il più piccolo valore di n per cui a_n è divisibile per 2022?

(A) 47 **(B)** 289 **(C)** 337 **(D)** 2022 **(E)** 2023

10. Maddalena scrive su un foglio tutte le potenze di 2 da 1 a 2^{100} (estremi inclusi). Quanti dei numeri che ha scritto iniziano per 1?

(A) 28 o meno **(B)** 29 **(C)** 30 **(D)** 31 **(E)** 32 o più.

11. I πcchi sono animali che vivono in famiglie di 1, 2 o 3 individui. Originariamente fu importata in Italia una famiglia di 3 πcchi. Una famiglia di n πcchi si riproduce crescendo di $2n - 2$ nuovi individui, formando un totale di $3n - 2$, e dividendosi in nuove famiglie (non necessariamente due famiglie con lo stesso numero di individui si dividono allo stesso modo). Tutte le famiglie si riproducono contemporaneamente ad ogni nidiata. Per esempio, dopo la prima nidiata ci sono per forza sette πcchi, che potrebbero essere divisi in tre famiglie di due e una di uno, o in una di tre e due di due, o in sette di uno, eccetera. Quante sono le possibilità per il numero totale di πcchi dopo la settima nidiata?

(A) 129 **(B)** 253 **(C)** 2^7 **(D)** $\frac{2^7+3^7+1}{2}$ **(E)** 3^7

12. Sia dato un esagono regolare di lato 1. Consideriamo un triangolo equilatero di lato 1 dentro all'esagono, con due vertici vincolati al perimetro dell'esagono. Muoviamo il triangolo equilatero in modo che uno dei due vertici vincolati compia esattamente un giro lungo il perimetro dell'esagono. Quant'è la lunghezza percorsa dal vertice non vincolato?

(A) $\pi/2$ **(B)** $\frac{\pi\sqrt{3}}{3}$ **(C)** $8\sqrt{3} - 12$ **(D)** $(4\sqrt{3} - 6)\pi$ **(E)** Nessuna delle precedenti.

Soluzione dei Quesiti

1. La risposta è **(E)**. Notiamo innanzitutto che la distanza fra parchimetro e negozio è di 500 metri. Se Astolfo parcheggia in un punto compreso fra il parchimetro ed il negozio, diciamo a distanza x dal parchimetro (e quindi distanza $500m - x$ dal negozio), allora dovrà percorrere a piedi una distanza totale data da x (per andare al parchimetro) + x (per tornare alla macchina) + $500m - x$ (per raggiungere il negozio) + $500m - x$ (per tornare alla macchina), ovvero $1000m$, indipendentemente da x. Se invece parcheggia fra il parchimetro e l'estremo di Viale Marconi ad esso più vicino, diciamo a distanza $y > 0$ dal parchimetro, allora dovrà percorrere a piedi una distanza data da y (per andare al parchimetro) + y (per tornare alla macchina) + y (per tornare nuovamente al parchimetro) + $500m$ (per raggiungere il negozio) + $500m$ (per tornare al parchimetro) + y (per tornare alla macchina), per un totale di $1000m + 4y > 1000m$. Infine, se parcheggia fra il negozio e l'estremo di Viale Marconi ad esso più vicino, a distanza $z > 0$ dal negozio, il tratto che dovrà percorrere a piedi sarà di lunghezza

$$z + 500m + 500m + z + z + z = 1000m + 4z > 1000m,$$

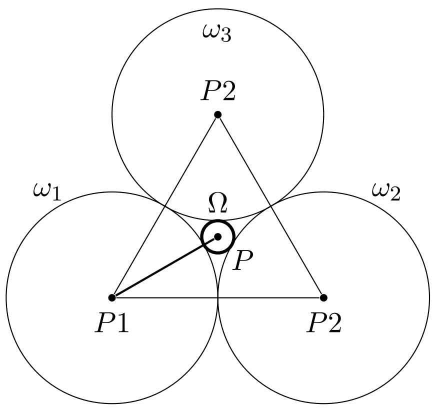
dove i vari addendi corrispondono ai tratti per andare dalla macchina al negozio, dal negozio al parchimetro, tornare dal parchimetro al negozio, tornare dal negozio alla macchina, e infine tornare ancora dalla macchina al negozio e viceversa. Si vede quindi che la distanza minima che Astolfo è costretto a percorrere a piedi è di $1000m$, e che essa è realizzata da tutti e soli i punti del tratto compreso fra il parchimetro e il negozio.

2. La risposta è **(D)**.
Si ha $\frac{57}{111} = \frac{57\cdot 9}{111\cdot 9} = \frac{513}{999}$. Come noto, una frazione $\frac{a}{b}$ con denominatore della forma $b = \underbrace{9\dots 9}_{k \text{ cifre nove}}$ ha uno sviluppo decimale periodico, con periodo di lunghezza k. Inoltre, se il numeratore è inferiore al denominatore, allora il numeratore fornisce esattamente le cifre del periodo. Si ottiene allora

$$\frac{57}{111} = \frac{513}{999} = 0.513513513\dots$$

e quindi ogni gruppo di tre cifre consecutive ha somma $5 + 1 + 3 = 9$. Dal momento che 2022 cifre corrispondono a $2022/3$ gruppi di 3 cifre, la risposta è $\frac{2022}{3} \cdot 9 = 6066$.

Nota. Naturalmente il risultato della divisione si può anche ottenere per calcolo diretto.



3. La risposta è **(D)**. Chiamiamo $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ le prime tre circonferenze e Ω la quarta, e siano P_1, P_2, P_3, P i loro rispettivi centri. Il triangolo $P_1P_2P_3$ è evidentemente equilatero (ognuno dei suoi lati è pari al doppio del raggio delle circonferenze $\omega_1, \omega_2, \omega_3$, cioè è uguale a 2). Il punto P è equidistante da P_1, P_2, P_3, e quindi è il circocentro di $P_1P_2P_3$. La distanza PP_1 è allora uguale al raggio della circonferenza circoscritta ad un triangolo equilatero di lato 2. Siccome in un triangolo equilatero il circocentro coincide con il baricentro, e il baricentro taglia ogni mediana in rapporto $1 : 2$, abbiamo che PP_1 è anche pari a $2/3$ della mediana (o equivalentemente, l'altezza) uscente da P_1. Dal momento che l'angolo in P_2 è di $60°$, la lunghezza di tale altezza può essere calcolata come $\frac{\sqrt{3}}{2}P_1P_2 = \sqrt{3}$. Otteniamo perciò che la lunghezza PP_1 è $\frac{2}{3}\sqrt{3}$. Tale

lunghezza però è anche uguale alla somma dei raggi di ω_1 e Ω, per cui per differenza otteniamo che il raggio di Ω è $\frac{2}{3}\sqrt{3} - 1$.

4. La risposta è **(C)**. Sostituendo $a = b = c = 674$ (interi che effettivamente soddisfano $a + b + c = 2022$) si ottiene $3p(674) = p(674)$, ovvero $p(674) = 0$. Sostituendo allora $a = b = 0$ e $c = 2022$ otteniamo
$$2p(0) + p(2022) = p(674) = 0 \Rightarrow p(2022) = -2p(0) = 5392.$$

5. La risposta è **(C)**. Distinguiamo diversi casi, a seconda del numero di fattori primi di b:

   (a) se b ha 0 fattori primi, allora $b = 1$, e qualunque sia il valore di a si ha $(a,b) = 1$, che non è un numero primo.

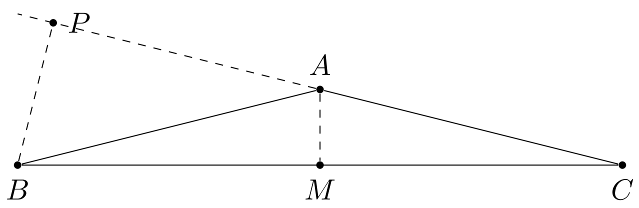
   (b) se b ha esattamente un fattore primo, cioè è esso stesso primo, allora la condizione che (a, b) e (b, c) siano primi vuol dire che entrambi devono coincidere con b. Gli interi a, c possono quindi essere scelti in qualunque modo fra i divisori di $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$ che sono multipli di b. È facile verificare che (qualunque sia il valore di b) ci sono 4 scelte per a e 4 scelte per c (ad esempio, se $b = 2$, allora a e c possono essere scelti nell'insieme $\{2, 6, 10, 30\}$). Tenendo conto che $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$ ha esattamente 3 fattori primi distinti (e quindi ci sono 3 scelte per b in questo caso), abbiamo $3 \cdot 4 \cdot 4 = 48$ possibili scelte per la terna (a, b, c).

   (c) se b ha esattamente 2 fattori primi, diciamo $b = pq$, allora posto $r = 30/b$ si vede facilmente che la condizione che (a, b) e (a, c) siano numeri primi è equivalente al fatto che gli interi a, c appartengano all'insieme $\{p, q, pr, qr\}$. Osserviamo che scegliere b è equivalente a scegliere il primo $r \in \{2, 3, 5\}$, per cui in questo caso abbiamo 3 scelte per b e 4 scelte per ognuno fra a e c, per un totale di $3 \cdot 4 \cdot 4 = 48$ scelte possibili.

   (d) infine, se b ha esattamente 3 fattori primi, allora si ha $b = 30$. Siccome per ipotesi a e c dividono 30 si ha $(a, b) = a$ e $(b, c) = c$, per cui dobbiamo scegliere sia a che c nell'insieme $\{2, 3, 5\}$. Abbiamo allora $3 \cdot 3 = 9$ scelte per la terna $(a, b, c) = (a, 30, c)$.

   In totale, il numero di terne (a, b, c) che rispettano le proprietà volute è $48 + 48 + 9 = 105$.

6. La risposta è **(B)**. Sia M il punto medio del lato BC, che è anche il piede dell'altezza uscente da A (in quanto ABC è isoscele su base BC), e sia P il piede dell'altezza uscente da B. Dal momento che l'altezza uscente da A è più corta di quella uscente da B, l'angolo in A risulta ottuso, per cui il punto P cade fuori dal segmento AC (e si trova dal lato opposto di C rispetto ad A).



I triangoli MCA e PCB sono simili, in quanto hanno due angoli uguali: infatti gli angoli in M e in P sono retti, e l'angolo in C è in comune. Poniamo $x = PC$ e $y = MB = MC$. Dalla similitudine già osservata si ottiene $MC/AM = PC/BP$, ovvero $\frac{y}{15} = \frac{x}{24}$. Il triangolo BPC è rettangolo in P, per cui il teorema di Pitagora fornisce $PB^2 + PC^2 = BC^2$, cioè
$$24^2 + x^2 = (2y)^2.$$
Sostituendo $x = \frac{24}{15}y = \frac{8}{5}y$ otteniamo allora
$$24^2 + \frac{64}{25}y^2 = 4y^2 \Rightarrow 24^2 = \frac{36}{25}y^2 \Rightarrow y = \sqrt{\frac{24^2 \cdot 5^2}{6^2}} = \frac{24 \cdot 5}{6} = 20.$$
L'area di ABC è quindi uguale a $\frac{1}{2} \cdot BC \cdot AM = \frac{1}{2} \cdot 2z \cdot 15 = 20 \cdot 15 = 300$.

7. La risposta è **(B)**. Le ipotesi del problema si traducono in $1000x+y = 7xy$, e possiamo riscrivere questa equazione come $y = \frac{1000x}{7x-1}$. A questo punto possiamo procedere in (almeno) due modi:

   (a) si ha $y = \frac{1000x}{7x-1} \geq \frac{1000x}{7x} = \frac{1000}{7} = 142.8\ldots$, e d'altro canto

   $$y = \frac{1000x}{7x-1} = \frac{1000(x-1/7)+1000/7}{7x-1} = \frac{1000}{7} + \frac{1000/7}{7x-1} \leq \frac{1000}{7} + \frac{1000/7}{7 \cdot 100 - 1} < \frac{1000}{7} + 1,$$

   per cui y deve essere l'unico intero compreso fra $1000/7$ e $1000/7+1$, ovvero $y = 143$. Da questo si ricava immediatamente che $x = \frac{y}{7y-1000} = 143$ e quindi $x + y = 286$.

   (b) in alternativa, osserviamo che x e $7x-1$ non possono avere fattori primi in comune (in quanto se p divide sia x sia $7x-1$ allora divide anche $(7x-1) - 7 \cdot x = -1$, ma nessun numero primo divide -1). Il fatto che $7x-1$ divida $1000x$ implica allora che $7x-1$ divida 1000; d'altra parte, per ipotesi x ha 3 cifre, per cui $7x-1 \geq 7 \cdot 100 - 1 = 699$. L'unico divisore di 1000 maggiore o uguale a 699 è 1000 stesso, da cui $7x - 1 = 1000 \Rightarrow x = 143$ e $y = \frac{1000 \cdot x}{7x-1} = x = 143$. Ne segue che $x + y = 286$.

8. La risposta è **(B)**. Costruiamo una tabella con una riga per ogni azione giocata e una colonna per ogni giocatrice delle *Geodetiche*. Scriviamo $+1$ in una casella se la giocatrice corrispondente alla riga era in campo durante l'azione corrispondente alla colonna e l'azione è stata vinta dalle *Geodetiche*. Similmente, scriviamo -1 in corrispondenza delle coppie (giocatrice, azione) date dalle azioni perse dalle *Geodetiche* con quella giocatrice in campo. Infine, scriviamo 0 nelle caselle corrispondenti a coppie (giocatrice, azione) per cui la giocatrice non era in campo nella corrispondente azione. Consideriamo ora la somma di tutti i numeri nella tabella.

   Per ipotesi sappiamo che la colonna di Alice somma a $+7$, la colonna di Barbara somma a -2, e tutte le altre colonne sommano a 0. La somma di tutti i numeri nella tabella è quindi 5. D'altro canto, ogni riga della tabella ha somma $+k$ (se l'azione è stata vinta dalle *Geodetiche*) o $-k$ (se l'azione è stata persa): infatti su ogni riga ci esattamente k numeri non nulli (corrispondenti alle k giocatrici in campo), e sono o tutti uguali a $+1$, se l'azione è stata vinta dalle *Geodetiche*, o tutti uguali a -1, altrimenti. Detti allora V e P il numero di azioni vinte e il numero di azioni perse dalle *Geodetiche*, abbiamo ottenuto l'equazione $5 = k(V - P)$. Da questo segue che k divide 5, e siccome $k > 1$ si ha $k = 5$.

   Nota. Non è difficile costruire esempi della situazione descritta nel testo: i punteggi considerati sono effettivamente realizzabili.

9. La risposta è **(C)**. Consideriamo le equazioni

   $$\begin{cases} a_n = n(a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}) \\ a_{n+1} = (n+1)(a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n), \end{cases}$$

   valide per ogni $n \geq 2$. Riscriviamo ora la seconda nella forma

   $$\begin{aligned} a_{n+1} &= n(a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}) + (a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}) + (n+1)a_n \\ &= a_n + \frac{a_n}{n} + (n+1)a_n \\ &= \frac{n^2+2n+1}{n} a_n \\ &= \frac{(n+1)^2}{n} a_n \end{aligned}$$

   dove – usando la prima equazione – abbiamo sostituito dovunque possibile $a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}$ con $\frac{a_n}{n}$. Otteniamo allora

   $$a_n = \frac{n^2}{n-1} a_{n-1} = \frac{n^2}{n-1} \frac{(n-1)^2}{n-2} a_{n-2} = \cdots = \frac{n^2}{n-1} \frac{(n-1)^2}{n-2} \cdots \frac{3^2}{2} a_2.$$

   Semplificando il denominatore di ogni frazione con il numeratore della successiva e osservando che $a_2 = 2$ otteniamo

   $$a_n = n^2 \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 4 \cdot \frac{3}{2} a_2 = n \cdot \frac{n!}{2}$$

per ogni $n \geq 2$. A questo punto, osserviamo che $2022 = 2 \cdot 3 \cdot 337$ divide $n \cdot \frac{n!}{2}$ se e soltanto se questo numero è divisibile separatamente per $2, 3$ e 337. Da una parte, siccome $n \cdot \frac{n!}{2}$ è un prodotto di numeri minori o uguali ad n e 337 è primo, tale prodotto può essere divisibile per 337 soltanto se $n \geq 337$. D'altra parte, se $n = 337$ abbiamo $a_n = 337 \cdot \frac{1}{2} \cdot 337!$, e $\frac{1}{2} \cdot 337! = 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 337$ è certamente multiplo di 6, per cui $2 \cdot 3 \cdot 337$ divide a_{337}, e quindi 337 è il minimo cercato.

10. La risposta è **(D)**. Iniziamo con un'osservazione più generale. Dato un intero positivo $n \geq 2$, consideriamo la più piccola potenza 2^a di 2 che in base 10 si scriva con almeno n cifre. Siccome 2^{a-1} si scrive con al massimo $n-1$ cifre abbiamo $2^{a-1} \leq 10^{n-1} - 1$, e quindi $10^{n-1} \leq 2^a \leq 2 \cdot 10^{n-1} - 1$, dove la prima disuguaglianza segue dall'ipotesi che 2^a si scriva con almeno n cifre. Le disuguaglianze appena scritte significano esattamente che la scrittura decimale di 2^a inizia con la cifra 1. D'altra parte, la potenza di 2 successiva, ovvero 2^{a+1}, rispetta $2 \cdot 10^{n-1} \leq 2^{a+1} \leq 4 \cdot 10^{n-1} - 2$, e quindi la sua prima cifra decimale è 2 o 3. Da questo segue immediatamente che 2^a è *l'unica* potenza di 2 che in base 10 si scriva con esattamente n cifre e la cui prima cifra sia uguale ad 1. Lo stesso vale ovviamente per le potenze di 2 ad una cifra: l'unica che inizi con 1 è proprio 2^0. Otteniamo quindi che per ogni possibile lunghezza della rappresentazione decimale esiste una ed una sola potenza di 2 la cui rappresentazione decimale abbia quella lunghezza ed inizi per 1.

    Da questo segue che per contare le potenze di 2 volute dobbiamo soltanto capire quante diverse lunghezze assumono i numeri scritti da Maddalena: per ogni lunghezza c'è esattamente una potenza di 2 che inizia con la cifra 1. Siccome 2^0 ha una singola cifra, si tratta di capire quante cifre abbia 2^{100}. Osserviamo che $2^{10} = 1024 > 10^3$, quindi $2^{100} > (10^3)^{10} = 10^{30}$, e quindi 2^{100} ha almeno 31 cifre. Mostriamo ora che 2^{100} ha esattamente 31 cifre, ovvero che $2^{100} < 10^{31}$. Semplificando un fattore 2^{30} da entrambi i lati, la disuguaglianza voluta diventa $2^{70} < 10 \cdot 5^{30}$. Osserviamo ora che $2^7 = 128$ e $5^3 = 125$, per cui la disuguaglianza si riscrive ulteriormente nella forma

$$\left(\frac{128}{125}\right)^{10} < 10.$$

    La validità di tale disuguaglianza può essere verificata in vari modi; una possibilità è quella di osservare che $\frac{128}{125} = 1 + \frac{3}{125} < 1 + \frac{1}{40}$, da cui

$$\left(\frac{128}{125}\right)^2 < \left(1 + \frac{1}{40}\right)^2 = 1 + \frac{1}{20} + \frac{1}{1600} < 1 + \frac{1}{19},$$

    ed elevando nuovamente al quadrato

$$\left(\frac{128}{125}\right)^4 < \left(1 + \frac{1}{19}\right)^2 = 1 + \frac{2}{19} + \frac{1}{361} < 1 + \frac{1}{9}$$

    Continuando in questo modo troviamo immediatamente $\left(\frac{128}{125}\right)^8 < 2$ e quindi $\left(\frac{128}{125}\right)^{10} < \left(\frac{128}{125}\right)^{16} < 2^2 = 4 < 10$ come voluto.

    Siccome i numeri scritti da Maddalena hanno lunghezza variabile fra 1 e 31, otteniamo che le potenze di 2 che iniziano per 1 scritte da Maddalena sono esattamente 31.

11. La risposta è **(B)**. Il numero di πcchi dopo 7 nidiate può assumere qualsiasi valore dispari fra 7 e $2^9 - 1$, e nessun altro. La risposta alla domanda è quindi $\frac{2^9-1-7}{2} + 1 = 2^8 - 3 = 253$, in quanto questa è la quantità di numeri dispari compresi fra 7 e $2^9 - 1 = 511$.

    Giustifichiamo l'affermazione precedente tramite i seguenti fatti:

    (a) una famiglia costituita da 1 solo πcchio continuerà per sempre ad essere costituita da un solo πcchio: evidente;

    (b) una famiglia costituita da 2 πcchi può dar origine, dopo $n \geq 1$ nidiate, a non più di 2^{n+1} πcchi;

    (c) una famiglia costituita da 3 πcchi può dar origine, dopo $n \geq 1$ nidiate, ad un qualsiasi numero di πcchi che sia dispari e compreso fra 7 e $2^{n+2} - 1$.

Dimostriamo le affermazioni (b) e (c) simultaneamente per induzione: assumendo che (b) e (c) valgano per un certo n le dimostreremo per $n+1$. Si osservi che il caso base $n=1$ è evidente per entrambe. Si osservi inoltre che la parità del numero di πcchi non cambia dopo una nidiata, per cui la condizione di parità affermata al punto (c) è effettivamente necessaria. Inoltre:

(b) in questo caso, dopo una nidiata abbiamo 4 πcchi, che possono vivere in quattro famiglie da 1 (e in tal caso a tutte le generazioni successive avremo ancora 4 πcchi), una famiglia da 2 e due da 1, due famiglie da 2, o una famiglia da 3 e una da 1. Nei vari casi, le affermazioni (b) e (c) per n nidiate mostrano che – dopo ulteriori n nidiate – avremo al massimo

$$1+1+1+1, \quad 2^{n+1}+1+1, \quad 2^{n+1}+2^{n+1}, \quad \left(2^{n+2}-1\right)+1$$

πcchi. Siccome ognuno di questi numeri è minore o uguale a 2^{n+2}, questo dimostra l'affermazione (b) per $n+1$ nidiate.

(c) in questo caso, dopo una nidiata i 7 πcchi possono essere distribuiti in famiglie nei modi seguenti:

$$3+3+1, \quad 3+2+2, \quad 3+2+1+1,$$
$$3+1+1+1+1, \quad 2+2+2+1, \quad 2+2+1+1+1,$$
$$2+1+1+1+1+1, \quad 1+1+1+1+1+1+1.$$

Dopo ulteriori n nidiate, usando come sopra l'ipotesi induttiva otteniamo che nei vari casi il numero totale di πcchi è al massimo

$$2\left(2^{n+2}-1\right)+1, \quad \left(2^{n+2}-1\right)+2\left(2^{n+1}\right), \quad \left(2^{n+2}-1\right)+\left(2^{n+1}\right)+1+1,$$
$$\left(2^{n+2}-1\right)+1+1+1+1, \quad 3\cdot\left(2^{n+1}\right)+1, \quad 2\cdot\left(2^{n+1}\right)+1+1+1$$
$$\left(2^{n+1}\right)+1+1+1+1+1, \quad 1+1+1+1+1+1+1.$$

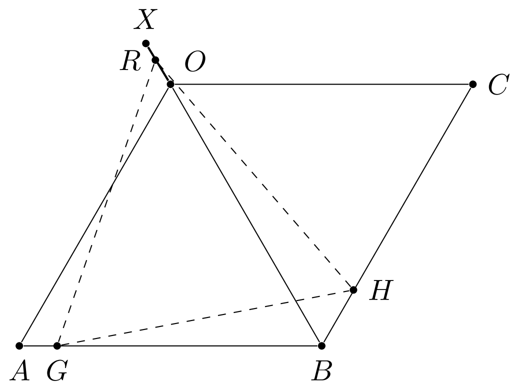
È facile verificare che ognuno di questi numeri è minore o uguale a $2^{n+3}-1$. Infine, se dopo la prima nidiata i 7 πcchi sono organizzati in famiglie come $3+3+1$, allora dopo ulteriori n nidiate il numero di πcchi sarà della forma d_1+d_2+1, dove d_1, d_2 possono assumere *qualsiasi* valore dispari compreso fra 7 e $2^{n+2}-1$. L'espressione d_1+d_2+1 può allora assumere qualsiasi valore dispari compreso fra $7+7+1=15$ e $2\cdot 2^{n+2}-2+1=2^{n+3}-1$. Resta solo da mostrare che il numero di πcchi dopo $n+1\geq 2$ nidiate può essere anche 7, 9, 11 o 13, ma questo è facile. Infatti, se ad un certo punto i πcchi si organizzano in famiglie da 1, da quel punto in poi il loro numero non crescerà più, per cui è sufficiente dimostrare che tali numeri di πcchi sono realizzabili dopo al più due nidiate, ad esempio come segue:

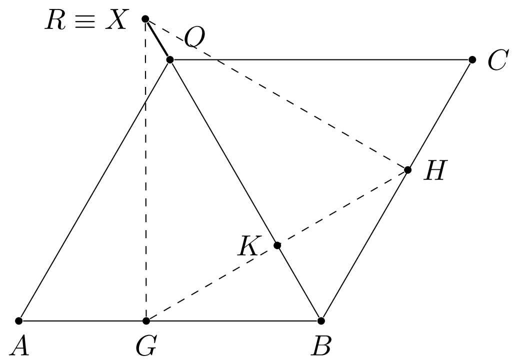
$$3\to 7; \quad 3\to 2+1+1+1+1+1\to 4+1+1+1+1+1=9;$$

$$3\to 2+2+1+1+1\to 4+4+1+1+1=11; \quad 3\to 2+2+2+1\to 4+4+4+1=13.$$

12. La risposta è **(C)**. Mostriamo che, nello spostare il primo vertice vincolato del triangolo da un estremo all'altro di un singolo lato dell'esagono, il vertice non vincolato percorre avanti e indietro un segmento di lunghezza $\frac{2\sqrt{3}}{3}-1$.

In effetti, sia $ABCDEF$ l'esagono, sia O il suo centro; siano G e H sui segmenti AB e BC, rispettivamente, tali che $GH=AB$, e sia R il punto dalla stessa parte di O rispetto alla retta GH tale che GHR sia un triangolo equilatero. Vogliamo dimostrare che R si trova sulla retta OB.





Notiamo che il quadrilatero $GBHR$ è ciclico, poiché la somma degli angoli $\widehat{GBH} = 120°$ e $\widehat{GRH} = 60°$ è un angolo piatto. Segue che $\widehat{GBR} = \widehat{GHR} = 60°$, dunque $\widehat{GBR} = \widehat{GBO}$ come desiderato. Calcoliamo inoltre la distanza di R da O nel caso in cui GH sia ortogonale a BO (ovvero H sia il simmetrico di G rispetto a tale retta). In questo caso, detto K il punto di intersezione fra BO e GH, i triangoli KGB e KHB sono congruenti e rettangoli, ciascuno la metà di un triangolo equilatero, da cui $BK = \frac{1}{\sqrt{3}}GK = \frac{\sqrt{3}}{6}$. Dato che $RK = \frac{\sqrt{3}}{2}$ e $OB = 1$, vale $RO = RK - (OB - BK) = 2\frac{\sqrt{3}}{3} - 1$.

Risulta dunque che, quando un vertice vincolato del triangolo rettangolo si muove da A a B e il secondo vertice vincolato da B a C, il vertice non vincolato percorre avanti e indietro un segmento OX di lunghezza $2\frac{\sqrt{3}}{3} - 1$. In totale, la lunghezza percorsa dal vertice non vincolato è $12 \cdot OX = 8\sqrt{3} - 12$.