



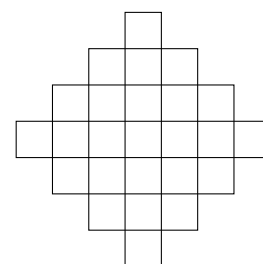
X Gara Nazionale per le Classi Prime

Mercoledì 5 febbraio 2025

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
Test n. 1	A	C	A	B	E	E	C	A	B	B	B	E	A	D	A	C	C	D
Test n. 2	C	D	A	D	C	B	A	D	A	A	B	C	C	E	B	B	C	E
Test n. 3	D	E	B	E	A	B	D	D	B	A	E	D	A	E	C	E	C	A
Test n. 4	C	B	D	C	B	E	E	D	B	C	E	E	D	B	A	A	B	D

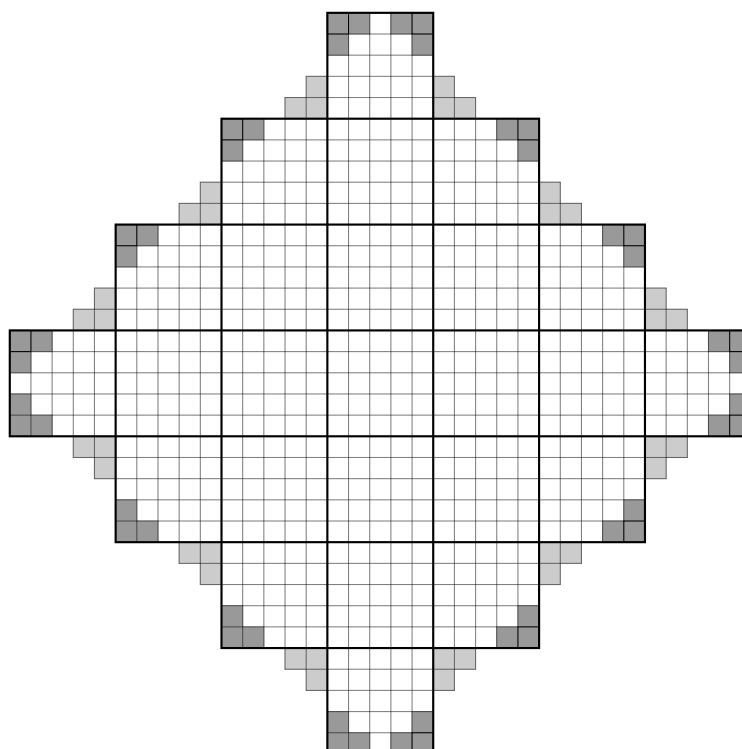
Soluzioni (Test n. 1)

1. Usando dei tasselli quadrati di lato 1 cm, Raffaella costruisce il mosaico mostrato in figura. Luca decide di farne uno che ha la stessa forma, ma con tasselli di lato 5 cm. Claudia, invece, ne costruisce uno usando ancora tasselli di lato 1 cm e mantenendo la stessa struttura romboidale di Raffaella, ma con le diagonali di 35 quadretti anziché di 7. Qual è la differenza, in cm^2 , tra le aree delle figure di Claudia e Luca?



(A) 12 (B) 0 (C) 24 (D) 25 (E) 13

Immaginiamo di sovrapporre il mosaico di Luca a quello di Claudia, come mostrato in figura. Visto che la zona bianca è in comune, la differenza fra le due aree coincide con la differenza tra le 16 zone di colore grigio scuro e le 12 zone di colore grigio chiaro, ovvero 4 zone ciascuna di 3 cm^2 , per un totale di 12 cm^2 .



2. Hai 100 sacchetti: il primo contiene una moneta d'oro, il secondo ne contiene due, e così via, fino al centesimo che ne contiene 100. Puoi riempire il tuo forziere vuotando, uno dopo l'altro, alcuni sacchetti nel forziere, ma quando il numero di monete del tuo tesoro sarà pari e non nullo ti dovrai fermare. Quante monete, al massimo, potrai inserire nel forziere?

(A) 5050 (B) 3080 (C) 2746 (D) 2649 (E) 2048

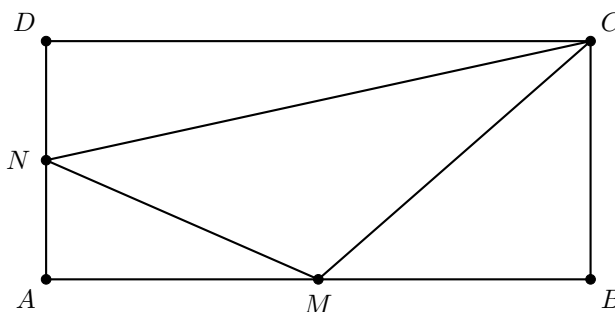
Per massimizzare il numero di monete da inserire nel forziere, conviene dapprima inserirne 99, poi inserire ogni volta un numero pari di monete (ottenendo così, dopo ciascun inserimento, una quantità dispari di monete) fino a raggiungere un totale di monete pari a

$$99 + 2 + 4 + 6 + \cdots + 98 + 100 = 99 + 50 \cdot 51 = 99 + 2550 = 2649$$

A questo punto, rimanendo fuori dal forziere solo sacchetti contenenti un numero dispari di monete, ne inserisco al suo interno altre 97, per un totale di $2649 + 97 = 2746$.

3. In un rettangolo $ABCD$ di area 288 cm^2 , siano M ed N rispettivamente i punti medi dei lati AB e AD . Determinare l'area del triangolo MNC .

(A) 108 cm^2 (B) 144 cm^2 (C) 96 cm^2 (D) 72 cm^2 (E) 192 cm^2



L'area del triangolo MNC si può determinare come la differenza fra l'area del rettangolo $ABCD$ e le aree dei triangoli AMN , MBC e NCD . Indicati, per semplicità, $AB = b$ e $AD = h$, con $bh = 288 \text{ cm}^2$, si ha

$$bh - \frac{1}{2} \frac{b}{2} \frac{h}{2} - \frac{1}{2} \frac{b}{2} h - \frac{1}{2} b \frac{h}{2} = bh - \frac{1}{8}bh - \frac{1}{4}bh - \frac{1}{4}bh = \frac{3}{8}bh,$$

da cui l'area cercata è uguale a $\frac{3}{8} \cdot 288 \text{ cm}^2 = 108 \text{ cm}^2$.

4. Cecilia, usando solo le cifre 2, 5, x , y , con $x \neq 0 \neq y$ e tale che ciascuna delle quattro cifre sia diversa dalle altre, ha scritto alla lavagna tutti i possibili numeri interi di due cifre distinte. Se si vuole che la somma totale dei numeri scritti sia uguale a 396, quanto deve valere $x + y$?

(A) 4 (B) 5 (C) 8 (D) 9 (E) 12

Tutti i possibili numeri scritti da Cecilia alla lavagna sono:

$$\begin{array}{ccc} 25 & 20 + x & 20 + y \\ 52 & 50 + x & 50 + y \\ 10x + 2 & 10x + 5 & 10x + y \\ 10y + 2 & 10y + 5 & 10y + x \end{array}$$

la cui somma è uguale a

$$33x + 33y + 231.$$

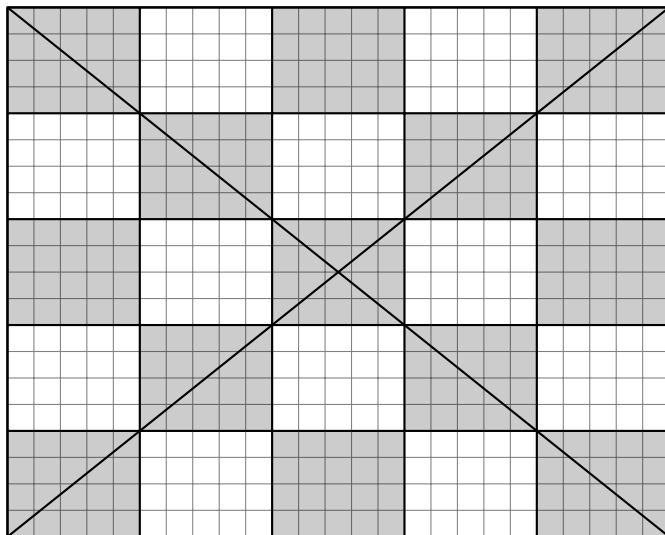
Posto $33x + 33y + 231 = 396$, si ha $33x + 33y = 165$, da cui

$$x + y = 5.$$

5. In una griglia rettangolare 20×25 vengono tracciate le due diagonali. Quanti quadretti della griglia non vengono tagliati, al loro interno, dalle diagonali?

(A) 320 (B) 326 (C) 400 (D) 418 (E) 422

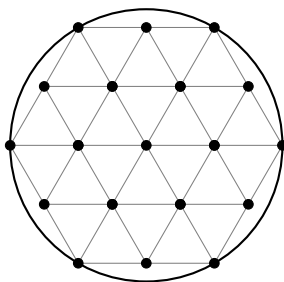
Consideriamo una griglia 20×25 , formata dunque da 500 quadretti, all'interno della quale sono state tracciate le diagonali. La griglia può essere suddivisa in 25 sottogriglie 4×5 , come mostrato in figura. Le diagonali tagliano 14 quadretti della sottogriglia centrale, nonché 8 quadretti di ciascuna delle 8 sottogriglie da esse attraversate (due quadretti adiacenti per ciascuna riga di ciascuna sottogriglia). Ne consegue che a non essere tagliati dalle diagonali sono $500 - 14 - 8 \cdot 8 = 500 - 78 = 422$ quadretti.



6. Quanti punti si possono disegnare, al massimo, all'interno di un cerchio di area $4\pi \text{ cm}^2$ (si può usare anche il bordo) in modo che ciascun punto disti almeno 1 cm da ciascuno degli altri punti?

(A) 7 (B) 10 (C) 12 (D) 16 (E) 19

Il raggio del cerchio vale 2 cm. Posso disporre i punti come nella seguente figura: il primo al centro del cerchio, altri 6 nel primo strato in modo che siano tutti a 1 cm di distanza dal centro e a 1 cm di distanza tra di loro; infine altri 12 nel secondo strato (di cui 6 sul bordo) mantenendo lo stesso schema esagonale. La dimostrazione che non riusciamo a inserire 20 o più punti va oltre gli scopi di questo esercizio, ci limitiamo qui ad osservare che 19 è il numero più alto tra le risposte proposte, e pertanto è la risposta corretta.



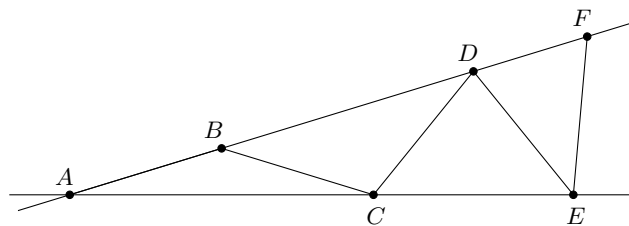
7. Quanti numeri di 6 cifre che sono multipli di 3 posso scrivere utilizzando solo le cifre 1 e 2?

(A) 2 (B) 12 (C) 22 (D) 32 (E) 64

Un numero è multiplo di 3 se e solo se la somma delle sue cifre in base 10 è multipla di 3. Usando soltanto le cifre 1 e 2, le somme che posso ottenere, per numeri di 6 cifre, vanno da 6 a 12 e di queste solo il 6, il 9 e il 12 sono multipli di 3. Oltre ai due casi banali 111111 e 222222, dobbiamo contare in quanti modi la somma può essere 9 e in tal caso o si procede a mano, oppure si contano i modi di permutare tre cifre 1 e tre cifre 2. Il problema equivale a scegliere 3 posizioni, su 6 disponibili, in cui scrivere la cifra 1; la risposta è $\frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 20$ perché posso scegliere in 6 modi la prima posizione, in 5 la seconda e in 4 la terza, poi occorre dividere per i casi che verrebbero contati più volte. Il totale è $2 + 20 = 22$.

8. Nell'immagine a fianco risulta $AB = BC = CD = DE = EF$. Sapendo che l'angolo \widehat{DEF} misura 44° , l'ampiezza dell'angolo \widehat{BAC} risulta:

(A) ☐ 17° (B) 18° (C) 16° (D) 22° (E) 21°



I triangoli ABC , BCD , CDE e DEF sono, per ipotesi, tutti isosceli. Essendo $\widehat{DEF} = 44^\circ$, si ha

$$\widehat{EDF} = \widehat{DFE} = \frac{1}{2}(180^\circ - 44^\circ) = 68^\circ.$$

Inoltre, posto $\widehat{BAC} = \widehat{ACB} = x$, per il teorema dell'angolo esterno applicato al triangolo ABC , si ha $\widehat{CBD} = 2x$ e quindi anche $\widehat{BDC} = 2x$. Per il teorema dell'angolo esterno applicato al triangolo ACD , risulta $\widehat{DCE} = x + 2x = 3x$ e quindi anche $\widehat{CED} = 3x$. Infine, applicando il teorema dell'angolo esterno al triangolo ADE , si ha $\widehat{EDF} = x + 3x = 4x$. Dall'uguaglianza $4x = 68^\circ$ si ottiene che $x = \widehat{BAC} = 17^\circ$.

9. Quanti sono i numeri interi di tre cifre (tra 100 e 999) che contengono la cifra 3 ma non la cifra 4?

(A) 162 (B) ☐ 200 (C) 216 (D) 243 (E) 450

Contiamo suddividendo per casi denotando abc il generico numero di tre cifre: il primo caso è quando compare solo una volta la cifra 3; le possibilità sono $3bc$, $a3c$, $ab3$. Nel primo sottocaso possiamo scegliere b e c in 8 modi, dato che non possiamo scegliere le cifre 3 o 4. Nel secondo e terzo sottocaso c'è la condizione aggiuntiva che a sia anche diverso da zero, e quindi può assumere solo 7 valori. Il totale del primo caso è dunque $8 \cdot 8 + 7 \cdot 8 + 7 \cdot 8 = 176$. Il secondo caso è quando la cifra 3 compare esattamente due volte e i tre sottocasi sono $33c$, $3b3$, $a33$. La quantità totale del secondo caso è $8 + 8 + 7 = 23$. Il terzo caso è quando la cifra 3 appare esattamente tre volte, ossia il solo 333 che conta una volta. Il totale è

$$176 + 23 + 1 = 200.$$

10. Prendo i 90 numeri della tombola e voglio metterne alcuni all'interno del sacchetto in modo che, se ne estraggo due qualsiasi tra questi, sono sicuro che la loro somma sarà minore o uguale a 25 e il loro prodotto sarà maggiore o uguale a 50. Quanti numeri, al massimo, posso scegliere?

(A) 5 (B) ☐ 7 (C) 9 (D) 11 (E) 6

Il caso peggiore per violare la condizione sulla somma è quando estraggo i due numeri più grandi che ho deciso di mettere nel sacchetto. Infatti posso scegliere al massimo un solo numero maggiore di 12 (se ne scegliessi almeno due, la loro somma sarebbe almeno $13 + 14 = 27 > 25$). Il caso peggiore per violare la condizione sul prodotto si ha quando estraggo i due numeri più piccoli. Infatti posso scegliere al massimo un solo numero minore di 8 (se ne scegliessi almeno due, il loro prodotto sarebbe al massimo $7 \cdot 6 = 42 < 50$). Per massimizzare la quantità di numeri da mettere nel sacchetto scegliamo i numeri da 7 a 13 (che sono 7).

Osservazione: dato che $6 \cdot 8 < 50$ e $12 + 14 > 25$, l'insieme scelto sopra è l'unico composto da 7 elementi che rispetta i vincoli; ma se questi vincoli vengono modificati un po' (somma minore o uguale a 26 oppure prodotto maggiore o uguale a 47) allora esistono altri sottoinsiemi da 7 elementi che rispettano i vincoli.

11. Quanti sono i numeri interi positivi n che soddisfano le disuguaglianze $(15n)^{20} > n^{40} > 2^{80}$?

(A) 0 (B) ☐ 10 (C) 50 (D) 100 (E) infiniti

Riscriviamo la catena di disuguaglianze così: $(15n)^{20} > (n^2)^{20} > (2^4)^{20}$, da cui deriva $15n > n^2 > 16$, dato che tutte le quantità alla base sono positive. Dato che n è un intero positivo, allora da $15n > n^2$ deriva $15 > n$, mentre da $n^2 > 16$ deriva $n > 4$. Quindi i numeri n che soddisfano entrambe le disuguaglianze sono tutti e soli quelli da 5 a 14 inclusi (10 in totale).

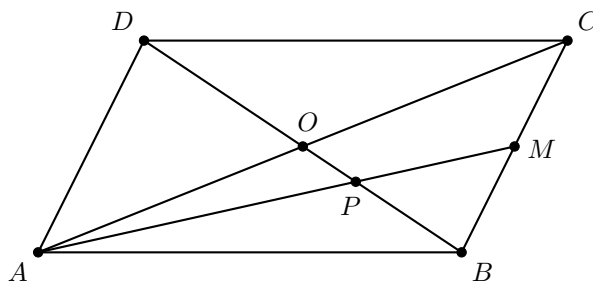
12. I due numeri reali positivi x e y sono tali che $(x + y)^2 = 100x + y = 2025$. Quanto vale il prodotto xy ?

- (A) 250 (B) 400 (C) 450 (D) 480 (E) 500

Dato che $2025 = 45^2$, allora $x + y = 45$. Quindi $100x + y = 99x + x + y = 99x + 45$. Sappiamo anche che $100x + y = 2025$, da cui $99x + 45 = 2025$, che risolta restituisce $x = 20$ e $y = 25$ (ma guarda un po' che coincidenza!). Il risultato è $20 \cdot 25 = 500$.

13. Dato il parallelogramma $ABCD$, sia M il punto medio di BC , O il punto di incontro delle diagonali e P il punto di intersezione tra AM e BD . Sapendo che l'area di APO è 24 cm^2 , quanto vale l'area del parallelogramma $ABCD$?

- (A) 288 cm^2 (B) 240 cm^2 (C) 336 cm^2 (D) 192 cm^2 (E) 216 cm^2



Risulta $BM = MC$ per ipotesi e $AO = OC$ in quanto le diagonali di un parallelogramma si incontrano nel loro punto medio. Quindi AM e BO sono due mediane del triangolo ABC , con P il loro punto di incontro e pertanto il baricentro del triangolo. Poiché il baricentro di un triangolo divide ciascuna mediana in due segmenti, con quello che ha per estremo un vertice del triangolo doppio dell'altro, risulta $BP = 2PO$. Ne consegue che, avendo i triangoli ABP e APO stessa altezza e base una il doppio dell'altra, allora l'area di ABP è il doppio dell'area di APO , vale a dire 48 cm^2 . L'area del triangolo ABO è data dalla somma delle aree di APO e ABP , vale a dire 72 cm^2 . Il triangolo CDO è congruente (e quindi equivalente) al triangolo ABO . Ma anche i triangoli BCO e ADO sono equivalenti al triangolo ABO , pertanto l'area del parallelogramma $ABCD$ è uguale a $72 \cdot 4 \text{ cm}^2 = 288 \text{ cm}^2$.

14. Tutti i 180 studenti delle classi prime di un liceo amano la matematica e/o la fisica. Il numero di allievi che amano solo la matematica è il doppio di quelli che amano solo la fisica; il 20% del totale ama entrambe le materie. Quanti sono gli studenti che amano la matematica?

- (A) 108 (B) 144 (C) 120 (D) 132 (E) 96

Il numero di allievi che ama entrambe le materie è pari a $180 \cdot \frac{20}{100} = 36$. Gli allievi che amano solo la matematica o solo la fisica sono $180 - 36 = 144$, e di questi $\frac{1}{3}$ amano solo la fisica e $\frac{2}{3}$ amano solo la matematica. Ne consegue che gli allievi che amano la matematica sono $144 \cdot \frac{2}{3} + 36 = 132$.

15. Sapendo che $9a^2 + \frac{1}{a^2} = 19$, con a numero reale positivo, quanto vale $3a + \frac{1}{a}$?

- (A) 5 (B) $\sqrt{13}$ (C) 13 (D) $\sqrt{19}$ (E) 9

Svolgendo il quadrato di binomio, si ha

$$\left(3a + \frac{1}{a}\right)^2 = 9a^2 + 2 \cdot 3a \cdot \frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} = \left(9a^2 + \frac{1}{a^2}\right) + 6 = 19 + 6 = 25.$$

Dunque $3a + 1/a = \pm 5$. Ma, essendo a positivo per ipotesi, solo il valore 5 è accettabile.

16. La somma di alcuni numeri interi positivi è 10. Quanto vale al massimo il loro minimo comune multiplo?

- (A) meno di 16 (B) tra 16 e 28 (C) tra 29 e 39 (D) tra 40 e 49 (E) più di 49

Non è specificata la quantità di addendi che possiamo prendere. Si osserva subito che nella scelta degli addendi che massimizza il m.c.m. possiamo supporre che gli addendi stessi siano primi tra loro. A questo punto rimangono da esaminare pochi casi: la soluzione ottimale con due numeri è $3 \cdot 7 = 21$, ma è possibile scegliere una terna che migliora il risultato, ossia $2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$.

17. Nell'usuale base 10, si consideri il numero 1257. Tale numero, in base B , è rappresentato dalla scrittura xyz , vale a dire $1257 = xB^2 + yB + z$. Qual è la base B più piccola per cui risulta $x + y + z = 1 + 2 + 5 + 7$?

(A) 11 (B) 12 (C) 19 (D) 24 (E) 28

La condizione $x + y + z = 1 + 2 + 5 + 7 = 15$ è equivalente a $z = 15 - x - y$. Sostituendo questa nell'uguaglianza $1257 = xB^2 + yB + z$, si ottiene

$$1257 = xB^2 + yB + 15 - x - y = x(B^2 - 1) + y(B - 1) + 15,$$

da cui $x(B + 1)(B - 1) + y(B - 1) = 1242$, ovvero $(B - 1)[x(B + 1) + y] = 2 \cdot 3^3 \cdot 23$. Poiché $B > 10$, come si deduce dal fatto che 1257 può essere scritto usando solo 3 cifre in base B , e dovendo assumere B il più piccolo valore che soddisfa le ipotesi fornite, allora dalla precedente relazione si deduce che $B - 1 = 2 \cdot 3^2 = 18$, cioè $B = 19$. In effetti, per $B = 19$ risulta $(xyz)_{19} = 393$, con

$$1257 = 3 \cdot 19^2 + 9 \cdot 19 + 3 \quad \text{e} \quad 3 + 9 + 3 = 15.$$

18. Lisa vuole moltiplicare 18 per un numero, in modo che il risultato sia contemporaneamente un quadrato perfetto e un cubo perfetto. Qual è il più piccolo numero che può usare Lisa?

(A) 12 (B) 72 (C) 1728 (D) 2592 (E) 46656

Un numero è sia un quadrato che un cubo perfetto se e solo se è una potenza sesta, ovvero se e solo se tutti gli esponenti nella sua scomposizione in fattori primi sono multipli di 6. Essendo $18 = 2 \cdot 3^2$, per ottenere una potenza sesta dobbiamo moltiplicarlo almeno per $2^5 \cdot 3^4$, ovvero per 2592.

Olimpiadi della Matematica Gara delle Classi Prime

Mercoledì 5 febbraio 2025

