UNIONE MATEMATICA ITALIANA

MINISTERO DELL'ISTRUZIONE

Olimpiadi della Matematica

Gara di Febbraio

19 febbraio 2025

Da riempirsi da parte dello studente:

Nome:__________ Cognome:__________ Genere: [F] [M]

Data di nascita:__________ Taglia per eventuale maglietta: [S] [M] [L] [XL]

Scuola:__________ Anno di corso: [1] [2] [3] [4] [5]

Città :__________

1. Non sfogliare questo fascicoletto finché l'insegnante non ti dice di farlo. NON È AMMESSO L'UTILIZZO DI CALCOLATRICI, LIBRI DI TESTO E TAVOLE NUMERICHE. È proibito comunicare con altri concorrenti o con l'esterno; IN PARTICOLARE, È VIETATO L'USO DI TELEFONI CELLULARI.
2. La prova consiste di 17 problemi divisi in 3 gruppi. All'interno di ogni gruppo, i problemi appaiono in *approssimativo* ordine crescente di difficoltà.
3. Nei problemi dal numero 1 al numero 12 sono proposte 5 risposte possibili, indicate con **A, B, C, D, E**. **Una sola** delle risposte è corretta. La lettera corrispondente alla risposta corretta dovrà essere riportata, per ogni quesito, in questa pagina nella relativa finestrella più in basso. Ogni risposta **giusta vale 5 punti**, ogni risposta **errata vale 0 punti** e ogni problema lasciato **senza risposta vale 1 punto**.
4. I problemi 13 e 14 richiedono una risposta che è data da un numero intero. Questo numero intero va indicato in questa pagina nella relativa finestrella più in basso. Ogni risposta **giusta vale 5 punti**, ogni risposta **errata vale 0 punti** e ogni problema lasciato **senza risposta vale 1 punto**.
5. I problemi 15, 16 e 17 richiedono invece una dimostrazione. Ti invitiamo a formulare le soluzioni in modo chiaro e conciso usufruendo dello spazio riservato e consegnando soltanto i fogli di questo fascicoletto. Tali problemi verranno valutati con un punteggio **da 0 a 15**.
6. Quando l'insegnante dà il via, comincia a lavorare. Hai **3 ore** di tempo. Buon lavoro!
7. Per correttezza nei confronti di coloro che facessero la gara in momenti diversi della mattina, ti chiediamo di non diffondere informazioni sul testo e sulle risposte prima delle 14.30. Grazie!

Risposte ai primi 14 quesiti

(Non sono ammesse correzioni o cancellature)

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14

Da riempirsi a cura dell'insegnante:

Valutazione esercizi dimostrativi

15	16	17

Punteggio totale
(da foglio di calcolo)

Visitate il sito internet delle olimpiadi: `http://olimpiadi.dm.unibo.it`
ed il forum delle olimpiadi: `http://www.oliforum.it`

Problemi a risposta multipla – 5 punti

1. Giuseppe vuole colorare di verde alcune caselle di una griglia 3×3 in modo che ciascuna riga e ciascuna colonna contengano un numero dispari di caselle verdi. In quanti modi può farlo?

   (A) 4 **(B)** 6 **(C)** 9 **(D)** 16 **(E)** nessuna delle precedenti.

2. Una formica passeggia nel piano cartesiano. Il primo giorno parte dall'origine e si sposta di 1 verso destra, il secondo giorno (partendo da dove si è fermata il giorno prima) si sposta di 2 verso l'alto, il terzo giorno di 3 verso sinistra, il quarto di 4 verso il basso, il quinto di 5 verso destra e così via. Quali saranno le coordinate della formica dopo 2025 giorni?

   (A) $(1013, -1012)$ **(B)** $(1013, 1013)$ **(C)** $(2025, -2024)$ **(D)** $(2025, -2025)$ **(E)** nessuna delle precedenti.

3. Alberto e Barbara si trovano in due punti distinti all'interno di una piazza quadrata. Entrambi affermano: "Tre delle quattro distanze del punto in cui mi trovo dai lati della piazza valgono 20, 50 e 80 metri; la quarta distanza è diversa dalle altre tre". Sapendo che entrambi affermano il vero, quanti metri distano al massimo fra di loro Alberto e Barbara?

   (A) 90 **(B)** 60 **(C)** $30\sqrt{5}$ **(D)** $60\sqrt{2}$ **(E)** $30\sqrt{10}$

4. Dato un intero positivo n chiamiamo $f(n)$ la somma tra la somma delle cifre di n e il prodotto delle cifre di n. Ad esempio, abbiamo $f(143) = 1 + 4 + 3 + 1 \cdot 4 \cdot 3 = 20$. Quanti sono gli interi positivi m di tre cifre per i quali $f(m) = f(m-1) + 25$?

   (A) 18 **(B)** 20 **(C)** 32 **(D)** 36 **(E)** 40

5. Su 100 righe di quaderno, Federico scrive 100 numeri calcolati in questo modo: sull'n-esima riga, scrive quanti sono i numeri primi minori o uguali di n se n è pari, e quanti fra i numeri interi positivi minori o uguali di n **non** sono primi se n è dispari. Infine, somma tutti e 100 i numeri scritti. Che risultato ottiene?

   (A) 2450 **(B)** 2451 **(C)** 2500 **(D)** 2501 **(E)** 2502

6. Sia ABC un triangolo con lati di lunghezze $AB = 16$ e $BC = CA = 17$. Siano B', C' i punti simmetrici di B e C rispetto all'incentro di ABC. Quanto misura l'area del triangolo $AB'C'$?

   (A) $\frac{75}{2}$ **(B)** 40 **(C)** $\frac{192}{5}$ **(D)** $\frac{325}{6}$ **(E)** $\frac{256}{3}$

7. Ada, Bea e Caia hanno appena consegnato un test composto da 30 quesiti vero-o-falso, in cui ricevono un punto per ogni risposta corretta e zero per ogni risposta sbagliata. Tutte e tre hanno dato una risposta a tutti i quesiti. Si confrontano sui risultati: Ada e Bea hanno dato la stessa risposta a (esattamente) 17 domande, Ada e Caia a 15 domande, Bea e Caia a 12. Quanto può valere, al massimo, la somma dei tre punteggi che le ragazze otterranno?

   (A) 52 **(B)** 62 **(C)** 67 **(D)** 70 **(E)** 72

8. Alberto scrive su un foglio una sequenza di interi $a_1, a_2, \ldots, a_{100}$ e, successivamente, scrive su una lavagna i 100 interi $b_1 = a_1, b_2 = a_1 + a_2, b_3 = a_1 + a_2 + a_3, \ldots, b_{100} = a_1 + a_2 + \ldots + a_{100}$. La sequenza $a_1, a_2, \ldots, a_{100}$ scritta inizialmente sul foglio si dice *completa* se nella sequenza $b_1, b_2, \ldots, b_{100}$ scritta sulla lavagna compaiono almeno una volta tutti gli interi compresi tra 0 a 49 (estremi inclusi). Quante sono le sequenze complete composte da 50 termini uguali a 1 e 50 termini uguali a -1?

   (A) 50 **(B)** 51 **(C)** 100 **(D)** 101 **(E)** 102

9. Sia $p(x) = x^4 - 3x^3 - 2x^2 + 4x - 1$. Se $q(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ è un polinomio che ha per radici i quadrati delle radici di $p(x)$, quanto vale $q(4)$?

   (A) -207 **(B)** -196 **(C)** -153 **(D)** 96 **(E)** 120

10. Sia $n = 3^{14} \cdot 7^{40}$. Un divisore di n^2 si dice *formaggioso* se è strettamente minore di n ma non è un divisore di n. Quanti sono i divisori formaggiosi di n^2?

    (A) 420 **(B)** 507 **(C)** 532 **(D)** 547 **(E)** 560

11. In un triangolo acutangolo ABC il lato AB misura 13, la mediana uscente da A misura 10 e l'altezza uscente da B misura 12. Quanto vale l'area di ABC?

(A) 60 **(B)** 65 **(C)** 66 **(D)** 78 **(E)** non è possibile determinarlo.

12. Un polinomio $p(x)$ di quarto grado a coefficienti interi ha le seguenti proprietà:

- $p(1) = 1$;
- $p(-1) = -1$;
- il valore assoluto di $p(-2)$ è un numero primo;
- per ogni numero reale a vale $p(a) \geq a^3$.

Quanto vale $p(-2)$ al minimo?

(A) -5 **(B)** 7 **(C)** 13 **(D)** 19 **(E)** 23

Problemi a risposta numerica – 5 punti

13. Una cassettiera contiene 10 cassetti numerati da 1 a 10. Stefano ha 10 palline, a loro volta numerate da 1 a 10, e deve inserirne una in ogni cassetto in modo tale che, se la pallina a si trova nel cassetto b, allora il massimo comun divisore fra a e b sia 1. Quanti modi ha Stefano per abbinare le palline ai cassetti?

14. In un triangolo isoscele ABC di base BC, la bisettrice dell'angolo in B interseca il lato AC in un punto D tale che $AD + BD = BC$. Quanto vale la misura in gradi dell'angolo in A?

15. **ESERCIZIO DIMOSTRATIVO**

Alcibiade ha disegnato sul suo quaderno una griglia 2025×2025 e ha scritto in ogni casella un numero intero. Berenice vuole indovinare il numero scritto in ciascuna casella.

(a) Supponiamo che Alcibiade dichiari a Berenice la somma dei numeri scritti in ciascuna riga e ciascuna colonna (precisando quale somma corrisponde a quale riga o colonna). Dimostrare che esiste un riempimento della griglia per cui la dichiarazione di Alcibiade non consente a Berenice di determinare con certezza i numeri scritti sul quaderno.

(b) Supponiamo adesso che Alcibiade comunichi a Berenice la somma di tutti i numeri nella griglia, e poi la somma dei numeri scritti in ogni coppia di caselle adiacenti, cioè con un lato in comune (precisando, anche in questo caso, la posizione delle caselle di cui sta parlando). Dimostrare che Berenice riesce a determinare con certezza i numeri di Alcibiade.

(c) Supponiamo infine che Alcibiade comunichi a Berenice solo la somma dei numeri scritti in ogni coppia di caselle adiacenti. Può Berenice determinare con certezza i numeri di Alcibiade?

SOLUZIONE:

Nome:________________ Cognome:________________

16. **ESERCIZIO DIMOSTRATIVO**

In un triangolo acutangolo ABC, sia H il piede dell'altezza relativa ad AC e sia K il piede dell'altezza relativa ad AB. Sia poi E il simmetrico di K rispetto alla retta BC e sia P l'intersezione tra EH e BC.

(a) Mostrare che il quadrilatero $CEBH$ è inscrivibile in una circonferenza.

(b) Mostrare che il triangolo PBE è simile al triangolo ABC.

(c) Mostrare che la retta AP è perpendicolare alla retta BC.

SOLUZIONE:

Nome:__________ Cognome:__________

17. **ESERCIZIO DIMOSTRATIVO**

Dati m interi positivi $a_1, \ldots, a_m$ indichiamo con $\mathrm{mcm}(a_1, \ldots, a_m)$ il loro minimo comune multiplo.

(a) Dimostrare che l'equazione $\mathrm{mcm}(a, b) = n(a + b)$ non ha soluzioni intere positive (a, b) per alcun intero positivo n.

(b) Dimostrare che, per ogni intero positivo n, l'equazione $\mathrm{mcm}(a, b, c) = n(a+b+c)$ ha infinite soluzioni intere positive (a, b, c).

SOLUZIONE:

Nome:________________________Cognome:____________________________

Questa gara non sarebbe stata possibile senza la preziosa collaborazione di tutti coloro che hanno proposto, risolto, modificato e testato i problemi:
Federico Antonini, Davide Averoldi, Lorenzo Benedini, Luigi Amedeo Bianchi, Alberto Cagnetta, Lorenzo Capponi, Lorenzo Cortesi, Jacopo D'Aurizio, Stefano Di Iulio, Massimiliano Foschi, Giovanni Interdonato, Alessandro Iraci, Giovanni Italiano, Marcello Mamino, Matteo Musumeci, Ludovico Pernazza, Matteo Protopapa, Giuseppe Romanazzi, Eugenio Trovarelli, Lorenzo Weiss.

Alessandra Caraceni, Davide Lombardo, Federica Bertolotti, Francesca Rizzo

Soluzione dei Quesiti

1. La risposta è **(D)**. Si noti che, comunque siano colorate le prime due colonne della griglia, esiste un unico modo di colorare la terza colonna in modo tale che su ciascuna riga ci sia un numero dispari di caselle verdi: infatti, basta colorare la terza casella di ciascuna riga se e solo se sulla stessa riga ci sono un numero pari di caselle colorate.

   Si noti inoltre che se le prime due colonne della griglia sono colorate in modo che su ciascuna di queste colonne ci sia un numero dispari di caselle verdi e si colora la terza colonna come descritto sopra, allora anche la terza colonna risulterà avere un numero dispari di caselle verdi: infatti, per quanto detto sopra, su ciascuna riga ci sarà un numero dispari di caselle verdi e, essendoci un numero dispari di righe, il numero totale di caselle verdi nella griglia risulta dispari; in particolare, poiché nelle prime due colonne c'è un numero dispari di caselle verdi e il numero totale di caselle verdi nella griglia è dispari, si ha che anche nella terza colonna c'è un numero dispari di caselle verdi.

   Quindi, per una qualunque colorazione delle prime due colonne in modo tale che in ciascuna di esse compaia un numero dispari di caselle verdi, esiste un unica colorazione della griglia che rispetta le condizioni del problema. Poiché i modi di colorare una colonna con un numero dispari di caselle verdi è 4 (3 colorando una sola casella oppure 1 colorando tutte e tre le caselle), otteniamo che le colorazioni ammissibili sono $4 \cdot 4 = 16$.

2. La risposta è **(A)**. Dividiamo il viaggio della formica in blocchi di 4 giornate: per n intero positivo, la formica nei giorni $4n+1$, $4n+2$, $4n+3$, $4n+4$ si sposta rispettivamente di $4n+1$ verso destra, $4n+2$ verso l'alto, $4n+3$ verso sinistra, $4n+4$ verso il basso; in totale, passate le 4 giornate, si sarà spostata di $2 = (4n+3) - (4n+1)$ verso sinistra e $2 = (4n+4) - (4n+2)$ verso il basso.

   Poiché $2024 = 4 \cdot 506$, dopo 2024 giorni (cioè 506 blocchi da 4 giorni), la formica si sarà spostata di $2 \cdot 506 = 1012$ verso sinistra e di $2 \cdot 506 = 1012$ verso il basso, trovandosi quindi nel punto $(-1012, -1012)$. Infine, il giorno 2025 (il primo giorno del blocco 507), la formica si sposta di 2025 verso destra, andando a finire in $(-1012 + 2025, -1012) = (1013, -1012)$.

3. La risposta è **(E)**. Consideriamo un generico punto P all'interno di un quadrato e notiamo che la somma delle distanze di P dai lati opposti del quadrato è uguale al lato del quadrato. Questo ci permette di ricavare che il lato della piazza può misurare $20+50 = 70$, $20+80 = 100$ oppure $50+80 = 130$ metri. Tuttavia, il primo caso è incompatibile col fatto che la terza distanza è 80 metri, mentre nel secondo caso la quarta distanza sarebbe $100 - 50 = 50$ metri, impossibile in quanto la quarta distanza deve essere diversa dalle altre tre. Quindi il lato della piazza misura 130 metri e le distanze di Alberto e Barbara dai lati della piazza sono 20, 50, 80 e 110 metri.

   Notiamo che i possibili punti in cui possono trovarsi Alberto e Barbara sono 8 e che le rispettive distanze sono:

   - $80 - 50 = 30$,
   - $\sqrt{(50-20)^2 + (50-20)^2} = 30\sqrt{2}$ metri,
   - $\sqrt{(80-20)^2 + (50-20)^2} = 30\sqrt{5}$ metri,
   - $\sqrt{(110-50)^2 + (50-20)^2} = 30\sqrt{5}$ metri,
   - $\sqrt{(110-50)^2 + (80-20)^2} = 30\sqrt{8}$ metri,
   - $110 - 20 = 90$ metri,
   - $\sqrt{(110-20)^2 + (80-50)^2} = 30\sqrt{10}$ metri.

   La massima distanza vale $\sqrt{(110-20)^2 + (80-50)^2} = 30\sqrt{10}$ metri.

   Si osservi che non era necessario ricavare tutte e 7 le distanze, in quanto era possibile dedurre prima di effettuare il calcolo che alcune di esse erano minori di altre.

4. La risposta è **(D)**. Scriviamo $m = 100c + 10d + u$, con $0 \leq d,u \leq 9$ e $1 \leq c \leq 9$. Se $u = 0$ e $d \neq 0$, allora le cifre di $m-1$ sono 9, $(d-1)$ e c, mentre se $u = d = 0$, allora le cifre di $m-1$

sono 9, 9 e $c-1$. In entrambi i casi, il prodotto delle cifre di m vale 0 e la somma delle cifre di m è minore della somma delle cifre di $m-1$. Dunque, $f(m-1) > f(m)$.

Assumiamo quindi $u \neq 0$, così che le cifre di $m-1$ sono date da $(u-1)$, d e c. Quindi l'equazione del testo si scrive come

$$c + d + u + cdu = c + d + (u-1) + cd(u-1) + 25.$$

Semplificando otteniamo $cd = 24$. Gli interi m di tre cifre cercati sono quindi quelli il cui prodotto della cifra delle centinaia c e delle decine d vale 24. Questo vale solo per le coppie di cifre $(c,d) = (3,8), (4,6), (6,4), (8,3)$. In ognuno di questi quattro casi la cifra delle unità u può assumere qualsiasi valore diverso da 0, per un totale di $4 \cdot 9 = 36$ soluzioni.

5. La risposta è **(D)**. Per n naturale positivo chiamiamo $f(n)$ il numero di naturali positivi primi minori o uguali a n e $g(n)$ il numero di naturali positivi non primi minori o uguali a n. Quindi Federico ottiene il risultato dall'espressione

$$g(1) + f(2) + g(3) + f(4) + g(5) + f(6) + \ldots + g(99) + f(100).$$

Poiché tutti i primi tranne 2 sono dispari, se n è pari e maggiore di 2 non può essere primo, di conseguenza i primi minori o uguali a n sono esattamente i primi minori o uguali a $n-1$; in particolare $f(n) = f(n-1)$. Poiché $f(n-1)$ conta i numeri interi primi positivi minori o uguali a $n-1$, mentre $g(n-1)$ conta i numeri interi non–primi positivi minori o uguali a $n-1$, otteniamo che per ogni $n > 2$ pari si ha

$$g(n-1) + f(n) = g(n-1) + f(n-1) = n - 1.$$

Osservando che $g(1) = f(2) = 1$, otteniamo che la somma cercata è data da

$$\begin{aligned} g(1) + f(2) + [g(3) + f(4)] + [g(5) + f(6)] + \ldots + [g(99) + f(100)] &= 1 + 1 + 3 + 5 + \ldots + 99 = \\ &= 1 + \frac{50 \cdot (1+99)}{2} = \\ &= 2501. \end{aligned}$$

6. La risposta è **(C)**. Sia I l'incentro del triangolo ABC e M il punto medio di AB. Poiché ABC è isoscele, CM è anche altezza e bisettrice, quindi I appartiene a CM e

$$\overline{CM} = \sqrt{\overline{AC}^2 - \left(\frac{\overline{AB}}{2}\right)^2} = \sqrt{17^2 - \left(\frac{16}{2}\right)^2} = 15.$$

Osserviamo, inoltre, che $\overline{IM}$ è il raggio della circonferenza inscritta in ABC, da cui, detto p il semiperimetro del triangolo ABC, si ha

$$\overline{IM} = \frac{\text{Area}(ABC)}{p} = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{CM}}{\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA}} = \frac{16 \cdot 15}{16 + 17 + 17} = \frac{24}{5}.$$

Prima soluzione: Poiché $\overline{B'I} = \overline{IB} = \overline{IA}$, l'angolo $\widehat{B'AB}$ è retto, perciò la retta $B'A$ è parallela a CI. Di conseguenza, l'altezza del triangolo $AB'C'$ relativa alla base $\overline{AB'}$ è lunga quanto $\overline{AM}$. Inoltre, per il teorema di Talete, si ha

$$\overline{AB'} = \frac{\overline{AB}}{\overline{MB}} \cdot \overline{IM} = 2 \cdot \overline{IM}.$$

Quindi,

$$\text{Area}(AB'C') = \frac{1}{2} \cdot \overline{AB'} \cdot \overline{AM} = \frac{1}{2} \cdot \overline{IM} \cdot \overline{AB} = \frac{1}{2} \cdot \frac{24}{5} \cdot 16 = \frac{192}{5}.$$

Seconda soluzione: Siano H la proiezione di A su $B'C'$, K la proiezione di A su $\overline{BC}$, L la proiezione di I su $\overline{BC}$ e J la proiezione di I su $B'C'$.

Poiché $\overline{B'I} = \overline{BI}$, $\overline{C'I} = \overline{CI}$ e $\widehat{B'IC'} = \widehat{BIC}$, i triangoli $B'IC'$ e BIC sono congruenti. In particolare:

- $\widehat{BCI} = \widehat{B'C'I}$, da cui deduciamo che le rette $B'C'$ e BC sono parallele e il quadrilatero $KLJH$ è un rettangolo;
- $\overline{IJ} = \overline{IL}$, quindi, per il punto precedente, $\overline{HK} = \overline{JL} = 2 \cdot \overline{IL}$;
- $\overline{BC} = \overline{B'C'}$.

L'area di $AB'C'$ è

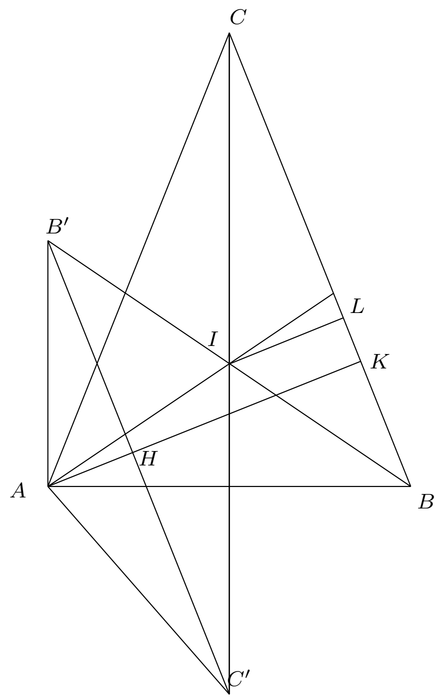
$$\text{Area}(AB'C') = \frac{1}{2}\,\overline{B'C'} \cdot \overline{AH} = \frac{1}{2}\,\overline{BC} \cdot \left(\overline{AK} - \overline{HK}\right) = \frac{1}{2}\,\overline{BC} \cdot \left(\overline{AK} - 2 \cdot \overline{IL}\right).$$

Ora, $\overline{IL} = \overline{IM} = \frac{24}{5}$, in quanto raggi della circonferenza inscritta, e

$$\overline{AK} = \frac{2 \cdot \text{Area}(ABC)}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{CM}}{\overline{BC}} = \frac{16 \cdot 15}{17} = \frac{240}{17}.$$

Da cui concludiamo

$$\text{Area}(AB'C') = \frac{1}{2}\,\overline{BC} \cdot \left(\overline{AK} - 2 \cdot \overline{IL}\right) = \frac{1}{2} \cdot 17 \cdot \left(\frac{240}{17} - 2 \cdot \frac{24}{5}\right) = \frac{192}{5}.$$



7. La risposta è **(C)**. Per ogni quesito si possono verificare due situazioni: tutte tre le ragazze hanno dato la stessa risposta, oppure due delle tre ragazze hanno dato la stessa risposta e la terza ha dato la risposta opposta (essendoci solo due risposte possibili, non può succedere che ci siano state 3 risposte diverse).

   Chiamiamo T il numero di quesiti in cui hanno dato tutte la stessa risposta, A il numero di quesiti in cui Ada ha dato una risposta diversa da quella di Bea e Caia, B il numero dei quesiti in cui Bea è in disaccordo con Ada e Caia e, infine, C il numero di quelli in cui è Caia ad aver dato la risposta diversa da Ada e Bea.

   Dalle informazioni del testo ricaviamo che

$$\begin{cases} A + B + C + T = 30 \\ A + T = 12 \\ B + T = 15 \\ C + T = 17. \end{cases}$$

   Sommando le ultime 3 equazioni e sottraendo la prima otteniamo $T = 7$.

Restringendosi ai quesiti nella categoria T, la massima somma dei punti è $3T$, nel caso in cui tutte le risposte sono giuste. Restringendosi ai quesiti della categoria A, la massima somma dei punti è $2A$, nel caso in cui Bea e Caia rispondono giusto (e di conseguenza Ada risponde sbagliato). Il ragionamento è simile per le altre due categorie.

Allora la massima somma dei punteggi è

$$3T + 2A + 2B + 2C = T + 2(A + B + C + T) = 7 + 2 \cdot 30 = 67.$$

8. La risposta è **(C)**. Sia $a_1, a_2, \ldots, a_{100}$ una sequenza composta da 50 termini uguali a 1 e 50 termini uguali a -1. Consideriamo ora una retta su cui sono segnati i numeri interi e interpretiamo la sequenza $a_1, a_2, \ldots, a_{100}$ come dei passi in avanti $(+1)$ o indietro (-1), partendo da 0. Così facendo, dopo i passi ci troveremo sull'intero b_i. Facciamo due osservazioni:

   (i) Alla fine del percorso ci troveremo su 0, dato che $b_{100} = 50 - 50 = 0$.

   (ii) Se in un dato istante ci troviamo su 49, allora dobbiamo essere passati almeno una volta su tutti gli interi $1, 2, \ldots, 48$, dato che siamo partiti da 0 e $|b_{i+1} - b_i| = 1$.

   Abbiamo quindi ricondotto il problema a contare quante sono le sequenze $a_1, a_2, \ldots, a_{100}$ tali che il corrispondente percorso sulla retta passi per 49. Per calcolare quante sono distinguiamo tre casi:

   (i) $a_i = 1$ per $1 \leq i \leq 49$: il percorso corrispondente passa per 49, dato che $b_{49} = 49$. Questo caso comprende un totale di 51 sequenze, perché possiamo scegliere in 51 modi dove posizionare il restante 1.

   (ii) Esattamente uno tra $a_1, a_2, \ldots, a_{49}$ è uguale a -1: il percorso corrispondente passa per 49 se e solo se $a_{50} = 1$ e $a_{51} = 1$. Questo caso comprende un totale di 49 sequenze, perché possiamo scegliere in 49 modi dove posizionare il -1 fra i primi 49 numeri (si noti che i numeri fra a_{52} e a_{100} devono tutti essere uguali a -1).

   (iii) Almeno due tra $a_1, a_2, \ldots, a_{49}$ sono uguali a -1: il percorso corrispondente non passa mai per 49, dato che dobbiamo fare almeno due passi indietro prima del 50-imo passo in avanti.

   La risposta al problema è dunque $49 + 51 = 100$.

9. La risposta è **(A)**. Notiamo che il polinomio $p(x)$ è *monico* di grado 4 e, pertanto, dette α, β, γ, δ le sue quattro radici (eventualmente complesse), vale la scomposizione

$$x^4 - 3x^3 - 2x^2 + 4x - 1 = p(x) = (x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma)(x - \delta).$$

   Notiamo che anche $q(x)$ è un polinomio *monico* di quarto grado e, dato che le sue radici sono α^2,β^2,γ^2,δ^2, otteniamo l'ulteriore scomposizione

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = q(x) = (x - \alpha^2)(x - \beta^2)(x - \gamma^2)(x - \delta^2).$$

   Quindi si ottiene che

$$\begin{aligned} q(4) &= (4 - \alpha^2)(4 - \beta^2)(4 - \gamma^2)(4 - \delta^2) \\ &= (2 - \alpha)(2 + \alpha)(2 - \beta)(2 + \beta)(2 - \gamma)(2 + \gamma)(2 - \delta)(2 + \delta) = \\ &= [(2 - \alpha)(2 - \beta)(2 - \gamma)(2 - \delta)][(-2 - \alpha)(-2 - \beta)(-2 - \gamma)(-2 - \delta)] = \\ &= p(2) \cdot p(-2) = (-9)(23) = -207. \end{aligned}$$

10. La risposta è **(E)**.
   Prima soluzione: Notiamo che se d è un divisore di n^2 strettamente minore di n, allora n/d è un divisore di n^2 strettamente maggiore di n. Inoltre i divisori positivi di n^2 sono in totale $29 \cdot 81$ (tutti i numeri della forma $3^i \cdot 7^j$, con i, j interi tali che $0 \leq i \leq 28$ e $0 \leq j \leq 80$); quindi otteniamo che n^2 ha esattamente $1174 = (29 \cdot 81 - 1)/2$ divisori minori di n. Di questi 1174 numeri, i divisori positivi di n strettamente minori di n sono in tutto $15 \cdot 41 - 1$ (tutti i numeri della forma $3^i \cdot 7^j$, con i, j interi tali che $0 \leq i \leq 14$ e $0 \leq j \leq 40$, tranne $i = 14$, $j = 40$), quindi

otteniamo che i numeri formaggiosi sono $1174 - 15 \cdot 41 + 1 = 560$.

Seconda soluzione: Sia d un numero formaggioso. Poiché d divide n^2, si ha $d = 3^i \cdot 7^j$, con i, j interi tali che $0 \leq i \leq 28$ e $0 \leq j \leq 80$. Poiché d non divide n, si ha $i > 14$ oppure $j > 40$. Dividiamo i due casi:

- Se $i > 14$, allora $j < 40$, altrimenti $d > n$. In questo caso poniamo $a = i - 14$ e $b = 40 - j$. Allora $d = 3^{14+a} \cdot 7^{40-b} = n \cdot \frac{3^a}{7^b}$. Da cui $d < n$ se e solo se $3^a < 7^b$;
- Se $j > 40$ allora $i < 14$, altrimenti $d > n$. In questo caso poniamo $a = 14 - i$ e $b = j - 40$. Allora $d = 3^{14-a} \cdot 7^{40+b} = n \cdot \frac{7^b}{3^a}$. Da cui $d < n$ se e solo se $3^a > 7^b$.

In entrambi i casi a e b sono interi positivi tali che $a \leq 14$ e $b \leq 40$.

Riassumendo, tutti e soli i numeri formaggiosi sono della forma

- $n \cdot \frac{3^a}{7^b}$ con $3^a < 7^b$ oppure
- $n \cdot \frac{7^b}{3^a}$ con $3^a > 7^b$,

dove a e b sono interi positivi tali che $a \leq 14$ e $b \leq 40$ (che un numero formaggioso sia di questa forma è stato dimostrato sopra; inoltre, è facile convincersi che se il numero è di questa forma, allora è formaggioso).

Poiché per ogni coppia ordinata (a,b) di interi positivi con $a \leq 14$ e $b \leq 40$ si ha che una e una sola tra le due condizioni $3^a < 7^b$ e $3^a > 7^b$ è soddisfatta, si ha che tale coppia corrisponde ad esattamente un divisore formaggioso. Dunque i divisori del tipo cercato sono in totale $14 \cdot 40 = 560$.

11. La risposta è **(C)**. Sia D il piede dell'altezza uscente da B ed E il punto medio di $\overline{BC}$. Per il Teorema di Pitagora

$$\overline{AD} = \sqrt{\overline{AB}^2 - \overline{BD}^2} = 5.$$

Chiamiamo F la proiezione di E su AC. Poiché entrambe perpendicolari ad AC, le rette EF e BD sono parallele e, per Talete

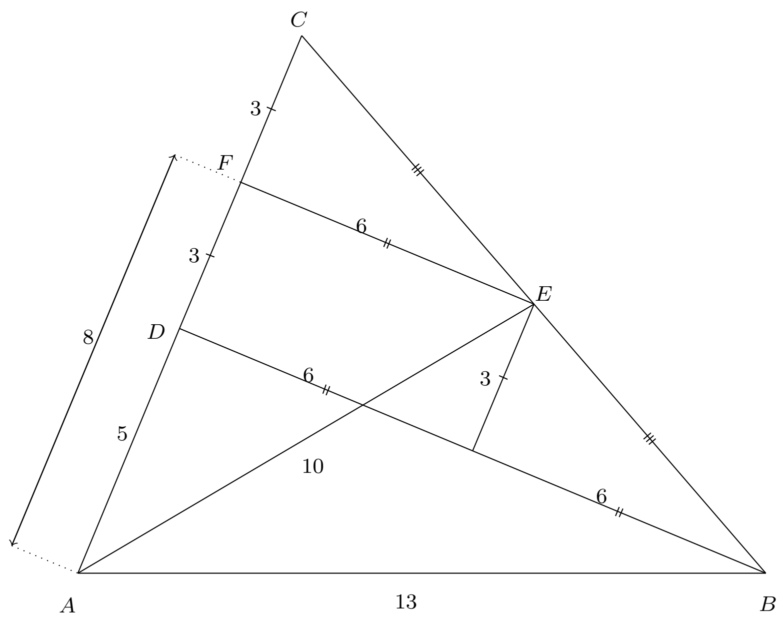
$$\overline{EF} = \frac{\overline{BD}}{2} = 6.$$

Dal Teorema di Pitagora segue

$$\overline{AF} = \sqrt{\overline{AE}^2 - \overline{EF}^2} = 8$$

e quindi $\overline{DF} = \overline{AF} - \overline{AD} = 3$. Poiché per Talete F è punto medio di $\overline{CD}$, si ha $\overline{CD} = 2 \cdot \overline{FD} = 6$. L'area di ABC è dunque

$$\text{Area}(ABC) = \frac{\overline{BD} \cdot \left(\overline{AD} + \overline{CD}\right)}{2} = 66.$$



12. La risposta è **(D)**. Sia $q(x)$ il polinomio di quarto grado a coefficienti interi definito da

$$q(x) = p(x) - x^3.$$

Dalla prima, seconda e quarta condizione su $p(x)$ si ricava che:

- $q(1) = 0$;
- $q(-1) = 0$;
- per ogni numero reale a vale $q(a) \geq 0$; in particolare, se α è una radice di q, allora il grafico di q è tangente in α all'asse orizzontale, da cui α è radice doppia.

Questo significa che sia 1 sia -1 sono radici doppie di $q(x)$. Essendo $q(x)$ di quarto grado, si ha

$$q(x) = k(x-1)^2(x+1)^2,$$

con k intero positivo. D'altra parte per ogni k intero positivo le tre condizioni sono rispettate. I polinomi $p(x)$ che rispettano la prima, la seconda e la quarta condizione sono quindi quelli nella forma $p(x) = k(x-1)^2(x+1)^2 + x^3$. Allora

$$p(-2) = k(-2-1)^2(-2+1)^2 + (-2)^3 = 9k - 8,$$

e si verifica che $9k - 8$ non è primo per $0 < k < 3$, è uguale a 19 per $k = 3$, ed è maggiore di 19 per ogni valore di k successivo. La risposta è quindi 19.

13. La risposta è 3600. Osserviamo anzitutto che le palline pari devono essere inserite in cassetti dispari e, pertanto, le palline dispari vanno messe nei cassetti pari. Per la simmetria del problema, dunque, basterà contare le possibili disposizioni di palline pari nei cassetti dispari e poi elevare al quadrato.

Notiamo che le palline 2, 4, 8 possono essere messe in qualsiasi cassetto dispari, pertanto rimangono da decidere le posizioni della pallina 6 (che non può andare nei cassetti 3 e 9) e della pallina 10 (che non può andare nel cassetto 5). Le possibili scelte di posizioni per queste due palline, senza tenere conto della condizione da rispettare sul Massimo Comun Divisore, sono $5 \cdot 4 = 20$; a questo numero vanno sottratti i casi in cui la pallina 10 è nel cassetto 5 (che sono 4) e i casi in cui la pallina 10 non è nel cassetto 5 ma la pallina 6 è in uno dei cassetti 3 e 9 (che sono 6). Il totale è quindi di $20 - 4 - 6 = 10$ modi di scegliere le posizioni delle palline 6 e 10 rispettando la condizione sul MCD.

Una volta scelte le posizioni di queste due palline, le altre tre palline pari si possono disporre in $3! = 6$ modi nei cassetti dispari rimanenti. Vi sono dunque $10 \cdot 6 = 60$ modi di inserire le palline pari nei cassetti dispari. Pertanto i modi che ha Stefano di abbinare le palline ai cassetti nella maniera richiesta sono $60^2 = 3600$.

14. La risposta è 100. Consideriamo sul lato $\overline{BC}$ il punto P tale che $\overline{PC} = \overline{AD}$, così che si abbia $\overline{BP} = \overline{BD}$. Utilizzando il teorema della bisettrice troviamo $\frac{\overline{AD}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}$, da cui $\frac{\overline{PC}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}$; Poiché l'angolo $\widehat{ACB}$ è in comune, i triangoli ABC e PDC sono simili e $\widehat{DPC} = \widehat{BAC}$.

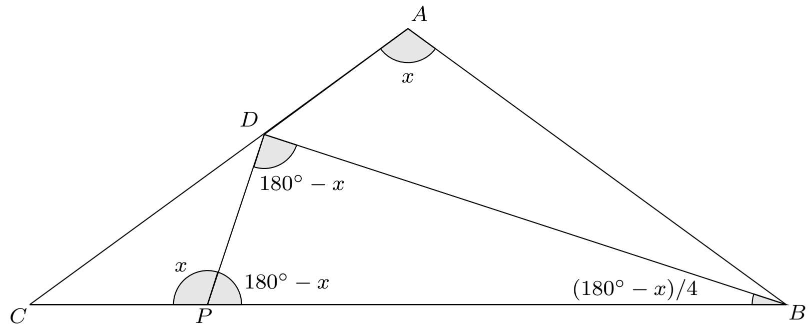
Se chiamiamo $\widehat{BAC} = x$, abbiamo

- $\widehat{DPB} = 180° - \widehat{DPC} = 180° - \widehat{BAC} = 180° - x$;
- $\widehat{ABC} = \frac{180° - \widehat{BAC}}{2}$, essendo, per ipotesi, il triangolo ABC isoscele sul lato $\overline{BC}$;
- $\widehat{DBP} = \widehat{DBC} = \frac{\widehat{ABC}}{2} = \frac{180° - x}{4}$, essendo BD la bisettrice dell'angolo $\widehat{ABC}$;
- $\widehat{BDP} = \widehat{DPB} = 180° - x$, essendo, per costruzione, il triangolo BDP isoscele sul lato $\overline{DP}$.

Infine, imponendo che la somma degli angoli interni a BDP sia 180° si ottiene

$$180° = \widehat{BDP} + \widehat{DPB} + \widehat{DBP} = (180° - x) + (180° - x) + \frac{180° - x}{4},$$

da cui $x = 100°$.



15. (a) Supponiamo che Alcibiade abbia scritto in ogni casella il numero 0 e consideriamo una griglia X riempita come segue: le quattro caselle in alto a sinistra di X sono date da

1	-1
-1	1

e tutte le altre caselle di X sono riempite con il numero 0. Osserviamo che la somma dei numeri scritti in ciascuna riga e in ciascuna colonna di X vale zero, così come nella griglia riempita da Alcibiade. In particolare, con i soli numeri comunicati da Alcibiade, Berenice non ha modo di determinare con certezza che i numeri scritti sul quaderno di Alcibiade siano effettivamente tutti zero.

(b) Chiamiamo A la griglia riempita da Alcibiade. Sia S la sottogriglia ottenuta da A togliendo la casella in basso a destra. Notiamo che possiamo tassellare S con dei tasselli 2×1 o tasselli 1×2, tutti disgiunti: infatti possiamo dividere S come unione (disgiunta) di una griglia 2024×2025 e una 1×2024; poiché 2024 è pari, è possibile tassellare la prima delle due griglie con tasselli non sovrapposti di dimensione 2×1, mentre la seconda con tasselli non sovrapposti di dimensione 1×2.

Poiché Berenice può conoscere la somma dei due numeri contenuti in due caselle adiacenti, può conoscere la somma dei due numeri contenuti in ciascun tassello usato per tassellare S. In particolare, sommando i numeri contenuti dentro ciascun tassello, Berenice può determinare la somma dei numeri contenuti nella griglia S.

Sottraendo la somma dei numeri contenuti in S alla somma totale dei numeri contenuti in A, Berenice può conoscere il numero scritta nella casella in basso a destra.

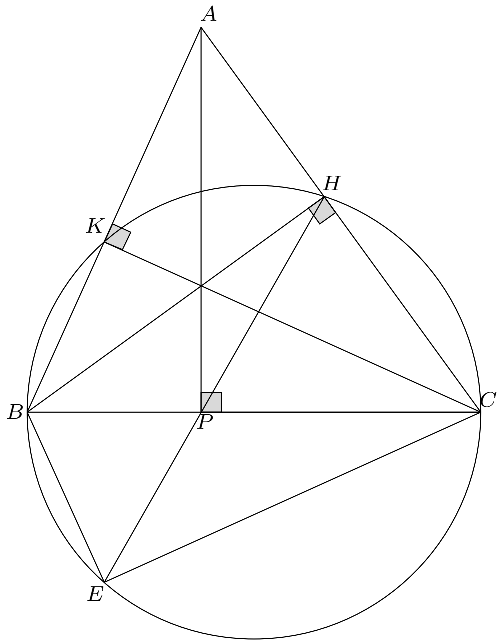
Ora basta osservare che se Berenice conosce il numero c contenuto in una casella, allora può determinare anche il contenuto a di una casella adiacente: infatti può sottrarre c alla somma $a + c$ (comunicato da Alcibiade).

In questo modo Berenice può scoprire i numeri scritti nell'ultima riga: infatti, può iterativamente scoprire i numeri a sinistra di quelli già noti, partendo dall'ultima casella a destra, che ha già determinato grazie al processo sopra descritto. A questo punto, ripetendo lo stesso ragionamento per una qualsiasi colonna della griglia A (di cui si conosce il contenuto dell'ultima casella in basso), Berenice può determinate con certezza i numeri scritti da Alcibiade.

(c) Supponiamo di nuovo che Alcibiade abbia riempito tutte le casella della sua griglia con il numero 0 e consideriamo la griglia Y riempita a scacchiera con i numeri 1 e -1 (cioè, i due numeri si alternano, così che se due caselle sono adiacenti, in una compare il numero 1 e nell'altra il numero -1). Visto che il riempimento di Y è a scacchiera, la somma di due numeri scritti in due caselle adiacenti vale sempre zero, esattamente come nella tabella riempita da Alcibiade.

Poiché i valori che Alcibiade comunica a Berenice coincidono con i valori che comunicherebbe per la griglia Y, deduciamo che Berenice non può determinare con certezza i numeri scritti da Alcibiade.

16. La situazione è la seguente.



Notiamo che, visto che ABC è acutangolo, i punti K, H sono interni ai segmenti $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ rispettivamente.

(a) Per definizione di H, K gli angoli $\widehat{BKC}$, $\widehat{BHC}$ sono retti.

Poiché E è ottenuto riflettendo K rispetto BC, si ha $\overline{BE} = \overline{BK}$ e $\overline{EC} = \overline{KC}$. Quindi, per il terzo criterio di congruenza i triangoli BCE e BCK sono congruenti e, in particolare, $\widehat{BEC} = \widehat{BKC} = 90°$.

Pertanto il quadrilatero $CEBH$ ha due angoli opposti supplementari e quindi è ciclico. Visto che anche $\widehat{BKC} = 90°$, in realtà anche il pentagono $CEBKH$ è ciclico.

(b) Poiché i triangoli BCE e BCK sono congruenti si ha che $\widehat{KBC} = \widehat{CBE}$. Inoltre, per la ciclicità del quadrilatero $BECH$, si ha che $\widehat{BEH} = \widehat{BCH}$, in quanto insistono sulla stessa corda BH. I triangoli PBE e ABC sono allora simili per il secondo criterio di similitudine.

(c) *Prima soluzione:* Per il punto (b), si ha che $\widehat{BPE} = \widehat{BAC}$ e quindi $\widehat{BPH} = 180° - \widehat{BAC}$. Il quadrilatero $BPHA$ ha allora due angoli opposti supplementari e quindi è ciclico. Notiamo che $\widehat{BPA} = \widehat{BHA}$ in quanto insistono entrambi sulla corda AB, ma $\widehat{BHA} = 90°$ in quanto BH è altezza di ABC. Questo conclude.

Seconda soluzione: Per il punto (b) si ha che $\widehat{CBE} = \widehat{ABP}$; inoltre, $\frac{BE}{BC} = \frac{BP}{BA}$. Quindi i triangoli BCE e ABP sono simili e, in particolare, $\widehat{APB} = \widehat{BEC} = 90°$.

17. (a) Dati due interi positivi a, b, ricordiamo che, detti $m = \text{mcm}(a, b)$ e $d = \text{MCD}(a, b)$ vale l'identità $md = ab$. L'equazione $\text{mcm}(a, b) = n(a + b)$ si può riscrivere allora come $\frac{ab}{d} = n(a+b)$, da cui $ab = nd(a+b)$. Ricordiamo che, per definizione di massimo comun divisore d di a, b, esistono interi positivi x, y tali che $a = dx$, $b = dy$ e $\text{MCD}(x, y) = 1$, ossia x, y sono primi tra loro.

    Sostituendo nell'uguaglianza ottenuta, otteniamo $d^2xy = nd(dx + dy)$, ossia $xy = n(x + y)$. Pertanto $x+y$ divide il prodotto xy. Il numero intero $x+y$ è maggiore o uguale a due, quindi ammette un fattore primo non banale p. Tale primo deve dividere anche $xy = n(x + y)$. Notiamo che la somma $x + y$ è coprima sia con x che con y, in quanto $\text{MCD}(x + y, x) = \text{MCD}(x + y - x, x) = \text{MCD}(y, x) = 1$ e analogamente per y. Pertanto p non divide né x né y e quindi non può dividere il prodotto xy. Da questo assurdo deduciamo che per ogni intero positivo n l'equazione $\text{mcm}(a, b) = n(a + b)$ non ha soluzioni.

    (b) Sia $d = \text{MCD}(a, b, c)$. Per definizione di d, esistono interi x, y, z tali che $\text{MCD}(x, y, z) = 1$ e $a = dx, b = dy, c = dz$. Notiamo che se $x = 1$ la condizione $\text{MCD}(x, y, z) = 1$ è assicurata e in questo caso

$$\text{mcm}(a, b, c) = \text{mcm}(dx, dy, dz) = d\,\text{mcm}(1, y, z) = d\,\text{mcm}(y, z).$$

L'equazione considerata si può riscrivere allora come

$$n = \frac{\text{mcm}(a, b, c)}{a + b + c} = \frac{d\,\text{mcm}(y, z)}{d(1 + y + z)} = \frac{\text{mcm}(y, z)}{1 + y + z}.$$

Se y, z sono primi tra loro, allora $\text{mcm}(y, z) = yz$. Quindi basta verificare che esiste una soluzione all'equazione

$$yz = n(1 + y + z) \tag{1}$$

con y, z coprimi, per ogni n intero positivo. In questo caso il problema sarebbe concluso, perché facendo variare d tra i numeri naturali, otterremmo infinite soluzioni $(a, b, c) = (d, dy, dz)$ per ogni intero positivo n fissato. La (1) si può riscrivere come $yz - n(y+z) = n$, ossia $(y - n)(z - n) = n + n^2 = n(n + 1)$ e quindi una soluzione si ottiene per $y - n = n$ e $z - n = n + 1$, da cui $y = 2n$ e $z = 2n + 1$, che sono effettivamente primi tra loro.

Verifichiamo ora che le soluzioni scritte sopra siano effettivamente soluzioni dell'equazione data: consideriamo quindi $(a, b, c) = (d, 2nd, (2n + 1)d)$. Si ha $\text{mcm}(b, c) = 2n(2n + 1)d$, in quanto $2n$ e $2n+1$ sono coprimi e d è un fattore comune. Notiamo, inoltre, che $2n(2n+1)d$ è multiplo di d. Quindi,

$$\text{mcm}(a, b, c) = 2n(2n + 1)d = n(d + 2nd + (2n + 1)d).$$

Facendo variare d, otteniamo quindi infinite soluzioni per ogni n.

Si noti che ai fini del problema era sufficiente fornire infinite soluzioni per ogni n e verificare che esse soddisfacessero l'equazione data. Non era pertanto necessario esporre il modo in cui tali soluzioni fossero state trovate (come fatto nella prima parte di questa soluzione).

Scale di valutazione degli esercizi dimostrativi

Esercizio 15

Si assegnino **15 punti** a una soluzione interamente corretta, anche diversa da quella proposta. Per soluzioni incomplete che seguano all'incirca la traccia della soluzione ufficiale, si assegnino punti parziali secondo il seguente schema:

- Si assegnino **4 punti** a chi risolve il punto a). *Si assegnino 2* ***punti*** *anche a chi fornisce un esempio su una griglia di taglia $n \times n$ con $n \geq 2$.*
- Si assegnino **8 punti** a chi risolve il punto b). Di questi si assegnino **5 punti** a chi dimostra che Berenice riesce a determinare *uno* dei numeri scritti da Alcibiade (per esempio quello nella casella in basso a destra nella soluzione ufficiale), e **3 punti** a chi dimostra che sapendo uno dei numeri scritti sulla griglia si riescono a determinare tutti gli altri.
- Si assegnino **3 punti** a chi risolve il punto c). *Si assegnino 2* ***punti*** *a chi fornisce un esempio su una griglia di taglia $n \times n$ con $n \geq 2$.*

Esercizio 16

Si assegnino **15 punti** a una soluzione interamente corretta, anche diversa da quella proposta. Per soluzioni incomplete si assegnino punti parziali secondo il seguente schema:

- Il punto (a) vale **5 punti**. Si assegnino **3 punti** a chi dimostra che il quadrilatero $BKCE$ o il quadrilatero $BKHC$ sono iscrivibili in una circonferenza.
- Il punto (b) vale **4 punti**. Si assegnino **2 punti** a chi osservi almeno una fra le uguaglianze $\widehat{BEP} = \widehat{BCA}$ e $\widehat{EBC} = \widehat{KBC}$.
- Il punto (c) vale **6 punti**, così suddivisi (a seconda della soluzione seguita):

  Prima soluzione: si assegnino **4 punti** per la dimostrazione che il quadrilatero $BPHA$ è ciclico ed i restanti **2 punti** per concludere usando la ciclicità. In particolare, si assegnino **2 punti** a chi dimostra che la tesi è equivalente a dimostrare che il quadrilatero $BPHA$ è ciclico.

  Seconda soluzione: Osservare che i triangoli BCE e ABP sono simili vale **4 punti**, e concludere vale **2 punti**.

Esercizio 17

Si assegnino **15 punti** a una soluzione interamente corretta, anche diversa da quella proposta. Per soluzioni incomplete che seguano all'incirca la traccia della soluzione ufficiale, si assegnino punti parziali secondo il seguente schema:

- Il punto (a) vale **8 punti**, divisi nel modo seguente
  - **4 punti** a chi mostra che basta dimostrare che l'equazione non ha soluzione per due numeri primi tra loro (x, y nella soluzione ufficiale);
  - **4 punti** per chi dimostra che non ci sono soluzioni se a e b sono coprimi. Di questi, si assegnino **3 punti** a chi osserva che, se a e b sono coprimi, allora $a + b$ è coprimo con a e con b o fa considerazioni analoghe (per esempio, si accorge che se a divide $a + b$, allora $a = 1$).
- Il punto (b) vale **7 punti** divisi nel modo seguente **4 punti**: a chi esibisce per ogni n una terna (a,b,c) tale che $\text{mcm}(a,b,c) = n(a + b + c)$. Si assegnino solo **3 punti** a chi presenta una terna corretta, senza verificare che sia una soluzione. **3 punti** a chi mostra che se esiste una soluzione per un dato n, allora ne esistono infinite.

  Se il concorrente non ha ottenuto nessuno dei 7 punti precedenti, ma ha comunque trovato una soluzione specifica per un dato n, si assegni **1 punto**; se, inoltre, il concorrente ha mostrato che per un n specifico esistono infinite soluzioni, si assegnino **3 punti** ulteriori.