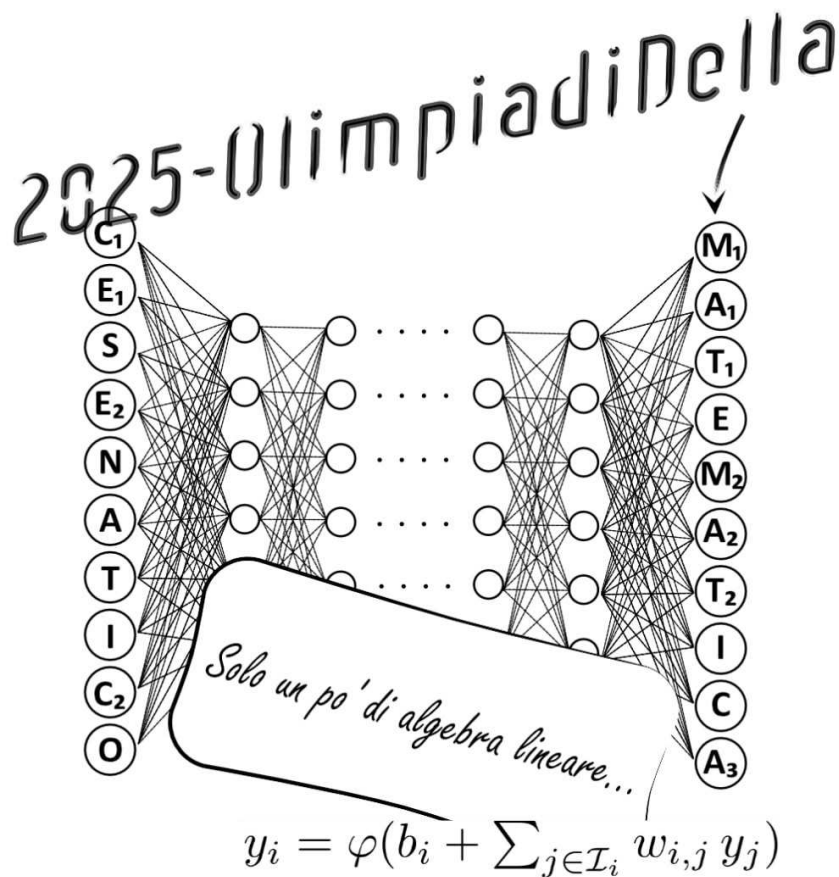


XL Olimpiade Italiana di Matematica

Cesenatico 2025

9 maggio 2025

Criteri di valutazione e schemi di correzione



XLI Edizione



Introduzione

Questo documento contiene gli schemi di correzione usati nella Finale Nazionale 2025 delle Olimpiadi di Matematica (amichevolemente, Cesenatico 2025).

Per ogni esercizio vengono indicati vari passaggi intermedi e i punteggi ad essi attribuiti; inoltre, sono riportati i più comuni errori e le loro penalizzazioni, casi di osservazioni che non valevano punti. Infine, si danno anche esempi di risposte incomplete o incorrette e il loro punteggio.

Lo scopo di queste pagine è triplice:

- 1. fornire a chi si prepara alle gare delle olimpiadi un’idea di cosa viene valutato e cosa no e di come viene corretta una prova;
- 2. fornire ai docenti che preparano i propri studenti una linea guida per il tipo di valutazione che viene utilizzata nelle finali nazionali, sia nell’ottica della preparazione degli studenti, sia nell’ottica della correzione dei loro elaborati in fasi precedenti;
- 3. fornire a chi ha partecipato a questa edizione della Finale Nazionale un modo di interpretare il punteggio ottenuto in ogni singolo esercizio.

Consigliamo di accompagnare la lettura delle soluzioni ufficiali alla consultazione di questo documento.

Indice

Problema 1	2
Problema 2	4
Problema 3	6
Problema 4	9
Problema 5	12
Problema 6	17

Problema 1

Jack scrive sulla lavagna il numero $x_0 = 2024^{2024}$.

Per ogni intero positivo n , indichiamo con $s(n)$ la somma delle cifre di n nell'usuale rappresentazione in base 10. Ad esempio, $s(7) = 7$ e $s(10654) = 16$.

- (a) Determinare il più piccolo intero positivo n tale che $n = 225 \cdot s(n)$.
- (b) Determinare il più piccolo intero positivo n tale che $n = 225 \cdot s(n)^2$.

Soluzione

Punto (a) Dall'uguaglianza $n = 225 \cdot s(n)$ deduciamo che n è multiplo di 225. Poiché 225 è multiplo di 9, anche n è multiplo di 9. Quindi, per il criterio di divisibilità per 9, anche $s(n)$ è multiplo di 9. Proviamo ora valori crescenti di n ottenuti moltiplicando 225 per un multiplo positivo di 9. Il primo valore che proviamo è

$$225 \cdot 9 = 2025.$$

Poiché abbiamo $s(2025) = 9$, otteniamo

$$2025 = 225 \cdot s(2025)$$

e quindi 2025 è il più piccolo intero positivo n tale che $n = 225 \cdot s(n)$.

Punto (b) Con lo stesso argomento del punto (a) deduciamo che $s(n)$ è multiplo di 9. Proviamo ora valori crescenti di n ottenuti moltiplicando 225 per il quadrato di un multiplo positivo di 9. Il primo valore che proviamo è

$$225 \cdot 9^2 = 18\,225.$$

Poiché abbiamo $s(18\,225) = 18$, otteniamo

$$18\,225 \neq 225 \cdot s(18\,225)^2.$$

Quindi 18 225 non è il numero cercato.

Il secondo valore che proviamo è

$$225 \cdot 18^2 = 72\,900.$$

Poiché abbiamo $s(72\,900) = 18$, otteniamo

$$72\,900 = 225 \cdot s(72\,900)^2.$$

Quindi 72 900 è il più piccolo intero positivo n tale che $n = 225 \cdot s(n)^2$.

Marking scheme per una soluzione incompleta

- A1. Dimostrare che la somma delle cifre di un numero cercato è multiplo di 9 **2 punti**
- A2. Determinare che 2025 è il più piccolo intero positivo n tale che $n = 225 \cdot s(n)$ **2 punti**
 - A2a. Osservare che il numero cercato è multiplo di $225 \cdot 9$ 1 punto
 - A2b. Verificare che vale $2025 = 225 \cdot s(2025)$ 1 punto
- A3. Determinare che 72 900 è il più piccolo intero positivo n tale che $n = 225 \cdot s(n)^2$ **3 punti**
 - A3a. Osservare che il numero cercato è multiplo di $225 \cdot 9^2$ 1 punto
 - A3b. Verificare che vale $18\,225 \neq 225 \cdot s(18\,225)^2$ 1 punto
 - A3c. Verificare che vale $72\,900 = 225 \cdot s(72\,900)^2$ 1 punto

Affermazioni e dimostrazioni che valgono punti in assenza di dimostrazioni della rispettiva parte

B1. Affermare che la somma delle cifre di un numero cercato è multiplo di 9 **1 punto**

B2. Dimostrare che il numero cercato nel punto (b) è un quadrato perfetto **1 punto**

Punteggio tipico

Il punteggio tipico, attribuito a oltre l'80% dei partecipanti, è stato di 7 punti. La maggior parte delle dimostrazioni complete ha fatto uso del criterio di divisibilità per 9. In alternativa, in particolare per il punto (a), sono stati elencati i primi multipli positivi di 225 o sono stati considerati generici numeri naturali con un numero di cifre fissato.

Problema 2

Determinare per quali valori *interi* di a l'insieme degli *interi* x che soddisfano la disuguaglianza

$$10x^2 + a \leq 33x$$

è costituito da esattamente un elemento.

Punto chiave: limitare a

La chiave del problema è trovare un'argomentazione tramite disuguaglianze per **dare una limitazione** esplicita sui valori che può assumere a (o in certi casi x , come nella prima soluzione ufficiale). Il punteggio parziale assegnato per questo passo dipende dalla forza della limitazione trovata, che varia a seconda delle strategie risolutive:

1. **1 punto** per chi trova solo la limitazione $a \leq 27$ studiando il discriminante dell'equazione quadratica

$$10x^2 - 33x + a = 0. \quad (1)$$

2. **3 punti** totali per chi trova la limitazione $18 \leq a \leq 27$, basandosi anche sull'osservazione che bisogna avere $|x_1 - x_2| \leq 2$, dove

$$x_1, x_2 = \frac{33 \pm \sqrt{33^2 - 4 \cdot 10 \cdot a}}{2 \cdot 10} \quad (2)$$

sono le soluzioni della (1). (La sola limitazione dal basso $18 \leq a$ quindi vale **2 punti**.)

3. **3 punti** totali per chi trova la limitazione $0 < x < 4$ dimostrando che $f(x) = 10x^2 - 33x \leq 0$ al di fuori di questo intervallo. Questa limitazione è stata considerata meno forte delle successive, visto che serve un passaggio successivo per trasformare la limitazione su x in una su a . Per ottenere questi punti, non è sufficiente osservare che “la funzione cresce chiaramente al di fuori di questo intervallo” sulla base dei valori numerici, senza alcuna giustificazione.
4. **4 punti** totali per chi dimostra che $24 \leq a \leq 27$, notando che per $a \leq 23$ sia $x = 1$ che $x = 2$ sono soluzioni. (La sola limitazione dal basso $24 \leq a$ quindi vale **3 punti**.)
5. **4 punti** totali per chi scrive la formula risolutiva (2), nota che le soluzioni della disequazione $10x^2 - 33x + a \leq 0$ sono l'intervallo $[x_1, x_2]$, e al crescere della quantità $\sqrt{33^2 - 4 \cdot 10 \cdot a}$ i primi valori interi che vengono raggiunti sono 2 e 1, come nella seconda soluzione ufficiale. Per ottenere questi punti, non è sufficiente asserire soltanto che 2 e 1 sono gli interi più vicini al vertice della parabola, senza giustificare che i punti più vicini al vertice della parabola (differenza sull'asse x) sono anche quelli con il valore inferiore di $f(x)$ (differenza sull'asse y).
6. **4 punti** totali per chi trova che se c'è una sola soluzione essa dev'essere $x = 2$, imponendo che x soddisfi la disuguaglianza e che allo stesso tempo $x \pm 1$ non la soddisfi.

I restanti **3 o 4 punti** vengono assegnati per completare le verifiche rimanenti, in particolare per notare che non ci sono soluzioni intere quando $a = 27$ (**1 punto**) e per calcolare $f(1) = 33 \cdot 1 - 10 \cdot 1^2 = 23$ e $f(2) = 33 \cdot 2 - 10 \cdot 2^2 = 26$ e argomentare che ci sono soluzioni solo quando a è compreso tra questi due valori (**2 punti**).

Soluzioni complete (o quasi)

Dimostrazioni che non seguono questo schema vengono comunque valutate **7 punti** se sono complete e pienamente giustificate.

Un punto particolarmente delicato è osservare che non ci possono essere altre soluzioni al di fuori dei valori di x considerati: per esempio, chi calcola $f(1)$ e $f(2)$ deve escludere che $f(3)$ possa essere maggiore di $f(1)$, calcolandolo direttamente o facendo considerazioni geometriche sull'insieme delle soluzioni. Chi non fa questa osservazione perde **1 punto** in una soluzione altrimenti completa.

Soluzioni complete ma con errori di calcolo che hanno una rilevanza (per esempio, perché cambiano la risposta finale o le argomentazioni necessarie per ottenerla) perdono almeno **1 punto** rispetto ai sette di una soluzione completa: le verifiche che permettono di controllare i ragionamenti fatti calcolando $f(1)$ e $f(2)$ sono particolarmente semplici, e ci si aspetta che i concorrenti verifichino il risultato ottenuto.

Soluzioni vuote (o quasi)

Esibire il solo risultato esatto $a \in \{24, 25, 26\}$ senza nessun tipo di dimostrazione o con una dimostrazione completamente errata vale **1 punto**.

Riformulare il problema notando che si tratta di trovare le intersezioni tra una parabola e una retta vale **0 punti**, in assenza di altri passi verso la soluzione o osservazioni geometriche utili.

Problema 3

Dato un intero positivo n , sia $p(n)$ il numero di primi distinti che dividono n . Ad esempio, $p(12) = 2$ e $p(120) = 3$. Un intero n si dice *bilanciato* se $p(n)$ è pari, e *sbilanciato* se $p(n)$ è dispari.

Dimostrare che esistono infinite coppie di interi positivi *consecutivi* che sono entrambi bilanciati oppure entrambi sbilanciati.

Schema dei punteggi per soluzioni simili alla 1 (vedi soluzioni ufficiali)

- 3 punti** per chi osserva che, procedendo per assurdo, si può assumere la validità della seguente affermazione: a partire da un n_0 sufficientemente grande, i numeri bilanciati e sbilanciati si alternano, ovvero (per n maggiore di n_0) il fatto che n sia bilanciato/sbilanciato dipende soltanto dal fatto che n sia pari o dispari.
- 2 punti** per chi, lavorando nel contesto dell'ipotesi di assurdo, dimostra una fra le seguenti quattro affermazioni:
 - tutti i numeri dispari sufficientemente grandi sono sbilanciati (ad esempio perché i numeri primi maggiori di due sono dispari e bilanciati);
 - tutti i numeri pari sufficientemente grandi sono sbilanciati (ad esempio perché le potenze di 2 sono pari e sbilanciate);
 - tutti i numeri dispari sufficientemente grandi sono bilanciati (ad esempio perché i numeri della forma pq , con p, q primi dispari, sono dispari e bilanciati);
 - tutti i numeri pari sufficientemente grandi sono bilanciati (ad esempio perché i numeri della forma $2p$, con p primo dispari, sono pari e bilanciati).
- 2 punti**, alternativi ai precedenti, per la dimostrazione di una delle seguenti due affermazioni:
 - i numeri pari contengono sia infiniti numeri bilanciati, sia infiniti numeri sbilanciati;
 - i numeri dispari contengono sia infiniti numeri bilanciati, sia infiniti numeri sbilanciati.
- 2 punti** per chi conclude la dimostrazione.

Altri punteggi

- 1 punto** (parziale alternativo alle osservazioni (2) e (3) della soluzione precedente, cumulabile con la parte (1)) per chi identifica una classe infinita interessante di numeri bilanciati o sbilanciati, ad esempio osservando che tutti i numeri primi sono sbilanciati, oppure che tutte le potenze di 2 sono sbilanciate, oppure che i prodotti di due numeri primi distinti sono bilanciati.

Schema dei punteggi per soluzioni simili alla 2 (vedi soluzioni ufficiali)

- 2 punti** sono attribuiti a chi osservi che, ragionando per assurdo, si può supporre che per ogni primo p sufficientemente grande i tre numeri $p-1, p, p+1$ siano rispettivamente bilanciato, sbilanciato, bilanciato.
- 4 punti** per chi *dimostra* che, se $k-1, k, k+1$ sono tre interi consecutivi con $k-1$ bilanciato, k sbilanciato, $k+1$ sbilanciato (o viceversa), allora si può calcolare la bilanciatazza di k^2-1 in termini della parità di k . Di questi, **2 punti** sono assegnati a chi, senza determinare la bilanciatazza di k^2-1 , scrive la fattorizzazione $k^2-1 = (k+1)(k-1)$ e dichiara di voler confrontare fra loro le bilanciatazze dei numeri $k, k^2, k^2-1, k+1, k-1$. **1 punto** dei due precedenti è assegnato a chi considera l'intero k^2-1 , senza però descrivere una strategia che possa portare verso una soluzione del problema.
- 1 punto** per chi combina le osservazioni precedenti per ottenere una soluzione completa.

Punteggi tipici

1. **1 punto** per chi esibisce solo una classe esplicita e abbastanza semplice di numeri bilanciati o sbilanciati (ad esempio i primi, le potenze di primi, le potenze di 2, i prodotti di due primi distinti), oppure considera interi della forma $k^2 - 1 = (k + 1)(k - 1)$, senza però fare progressi sostanziali verso la soluzione del problema.
2. **2 punti** per chi descrive un approccio alla soluzione che consideri numeri della forma $k^2, k^2 - 1$ ed espliciti la fattorizzazione $k^2 - 1 = (k + 1)(k - 1)$, dichiarando (o comunque facendo capire) di voler mettere in relazione le proprietà di bilanciatezza/sbilanciatezza di $k, k^2, k^2 - 1, k + 1, k - 1$.
3. **3 punti** per chi dichiara di voler procedere per assurdo ed enuncia in modo chiaro e corretto la negazione della tesi: *i numeri interi abbastanza grandi sono alternatamente bilanciati e sbilanciati*, o equivalentemente, *a partire da un certo intero n_0 in poi, tutti i numeri pari sono bilanciati e tutti i dispari sono sbilanciati, oppure viceversa*.
4. **4 punti** per chi combina l'osservazione precedente con l'esibire una classe infinite di numeri bilanciati/sbilanciati; in alternativa, per chi descrive correttamente la bilanciatezza o meno del numero $k^2 - 1$ in termini della bilanciatezza o meno di $k + 1, k - 1$ e della parità di k .
5. **6 punti** per una soluzione altrimenti corretta con qualche imprecisione; ad esempio,
 - soluzioni per induzione senza caso base;
 - soluzioni in cui si produce qualche coppia di interi consecutivi con la medesima bilanciatezza, ma in cui non è evidente che l'argomentazione produca *infinite* coppie;
 - soluzioni in cui non è chiaro che la proprietà di alternanza fra numeri bilanciati e sbilanciati vale solo *da un certo punto in poi*;
 - soluzioni in cui si argomenta che 'per simmetria' si può supporre che certi interi siano pari o dispari, oppure che siano bilanciati o sbilanciati, ma in cui la simmetria a cui si fa appello in effetti non vale;
 - soluzioni che si appoggiano implicitamente, spesso senza farne nemmeno menzione, al cosiddetto *postulato di Bertrand* https://it.wikipedia.org/wiki/Postulato_di_Bertrand (ovvero il fatto che per ogni intero positivo $m > 1$ esista un primo compreso fra m e $2m$);
 - altre soluzioni con piccoli errori facilmente aggiustabili.
6. **7 punti** per ogni soluzione completa e corretta, anche diversa da quelle delineate qui sopra.

Altri commenti

1. L'osservazione che la negazione della tesi implica 'esistono infiniti n tali che nella coppia $(n, n + 1)$ un numero è bilanciato e l'altro è sbilanciato' **non vale punti**.
2. La sola menzione dei numeri di Fermat o Mersenne, senza ulteriori osservazioni utili ai fini del problema, **non vale punti**.
3. La soluzione 1 prospettata sopra può essere presentata anche in modo più costruttivo, appoggiandosi meno sul ragionamento per assurdo. In tal caso, bisogna prestare attenzione a che la dimostrazione costruttiva produca effettivamente *infinite* coppie di numeri consecutivi entrambi bilanciati o entrambi sbilanciati, e non solo *un numero finito* di tali coppie. Un errore di questo tipo all'interno di una soluzione altrimenti corretta può condurre ad un punteggio di **6 punti**.
4. Soluzioni che non chiariscano che i ragionamenti di alternanza nella 'bilanciatezza' dei numeri si applicano solo per numeri *sufficientemente grandi* conducono tipicamente ad una penalizzazione di **1 punto**. In particolare:
 - soluzioni altrimenti complete con questa imprecisione sono state valutate **6 punti**;
 - soluzioni parziali che contengano solo l'osservazione dell'alternanza fra numeri bilanciati e sbilanciati (sotto l'ipotesi di assurdo), ma non chiariscano che tale alternanza vale solo per numeri sufficientemente grandi, sono state valutate **2 punti**.
5. I seguenti sono tutti problemi aperti e il loro uso in un tentativo di soluzione non è quindi stato considerato ammissibile:

- (i) esistono infiniti primi della forma $2^n - 1$ (primi di Mersenne, vedere https://en.wikipedia.org/wiki/Mersenne_prime e https://en.wikipedia.org/wiki/Mersenne_conjectures#Lenstra%E2%80%93Pomerance%E2%80%93Wagstaff_conjecture)
- (ii) esistono infiniti primi della forma $2^n + 1$ (primi di Fermat, vedere https://en.wikipedia.org/wiki/Fermat_number)
- (iii) esistono infinite coppie $(p, p + 2)$ di numeri primi a distanza 2 (numeri primi gemelli, vedere https://it.wikipedia.org/wiki/Numeri_primi_gemelli)
- (iv) esistono infinite coppie di numeri primi della forma $(2k + 1, 3k + 1)$ o espressioni analoghe (vedere https://en.wikipedia.org/wiki/Schinzel%27s_hypothesis_H)

Problema 4

Un insieme S si dice *annoso* se è costituito da 2025 numeri reali positivi (distinti). Per ogni insieme annoso S , indichiamo con $d(S)$ il numero di potenze di 2, con esponenti interi positivi *distinti*, che si possono scrivere come somma di due elementi *distinti* di S .

Determinare il massimo di $d(S)$ al variare di S tra tutti gli insiemi annosi.

Stima dal basso

La risposta è 2024. Per fornire una stima dal basso, è sufficiente trovare un insieme di 2025 numeri reali positivi S tale che, sommando due numeri distinti in S , si possano ottenere 2024 potenze di 2 distinte.

Soluzione 1 Un esempio di tale insieme è

$$S = \{\varepsilon\} \cup \{2^n - \varepsilon \mid 1 \leq n \leq 2024\}$$

dove ε è un numero reale positivo minore di 1.

Punteggi Un esempio corretto vale **2 punti**.

Diversi concorrenti hanno proposto l'insieme descritto sopra, ma scegliendo $\varepsilon = 1$. In questo caso, l'insieme non contiene 2025 numeri distinti (dato che $1 = 2^1 - 1$), ma per questo errore non sono stati sottratti punti.

Diversi concorrenti hanno invece proposto l'insieme descritto sopra, ma scegliendo $\varepsilon = 0$. In questo caso, gli elementi dell'insieme non sono tutti positivi. Questo errore è stato considerato più significativo e per tali soluzioni è stato assegnato **1 punto**.

Soluzione 2 Un modo di costruire un tale insieme è farlo ricorsivamente. Sia a un qualsiasi numero reale positivo. Definiamo una successione come segue: sia $a_1 = a$, e per ogni $n \geq 1$, sia $a_{n+1} = 2^{\lfloor \log_2(a_n) \rfloor + 2} - a_n$. Sia quindi $S = \{a_n \mid 1 \leq n \leq 2025\}$. Per costruzione, gli elementi di S sono tutti distinti e positivi, e per ogni n , $a_n + a_{n+1}$ è una potenza di 2.

Punteggi Un esempio corretto vale **2 punti**, anche in caso di giustificazioni parziali o imprecise. Lo stesso punteggio è stato assegnato a chi ha fissato un valore di a (ad esempio $a = 1$) e ha costruito l'insieme di conseguenza.

Diversi concorrenti hanno costruito un insieme in maniera simile, ma concludendo il ragionamento scegliendo a in modo che $a_1 + a_{2025}$ fosse una potenza di 2, deducendo erroneamente che la risposta fosse 2025. L'errore consiste nel fatto che, scegliendo a in questo modo, diversi termini della successione risultano essere negativi. Una tale soluzione è stata comunque valutata **1 punto**, in quanto la costruzione dell'insieme è corretta, ed avrebbe prodotto un esempio valido per una scelta opportuna di a .

Stima dall'alto

Soluzione 1 Sia S un insieme di numeri reali positivi, e siano $a, b \in S$ tali che $a + b = 2^n$ per un qualche n intero positivo. Allora se $a < b$, necessariamente $a < 2^{n-1} < b < 2^n$. Questo significa che per ogni $b \in S$ esiste al massimo un

$a \in S$ con $a < b$ tale che $a + b$ sia una potenza di 2, eccetto che per il minimo elemento di S , che ovviamente non ne ammette nessuno.

Quindi è possibile ottenere solamente $|S| - 1$ potenze di 2 distinte. Se S è annoso, $|S| = 2025$, e quindi si possono ottenere al massimo 2024 potenze di 2 distinte.

Punteggi

- (2 pt) Dire che per ogni $b \in S$ esiste al massimo un $a \in S$ con $a < b$ tale che $a + b$ sia una potenza di 2.
- (2 pt) Fornire una dimostrazione corretta di questa affermazione.
- (1 pt) Concludere che la risposta è 2024, dato che il minimo elemento di S non può essere l'elemento più grande di alcuna coppia.

Soluzione 2 Sia S un insieme di numeri reali positivi, e sia m il massimo elemento di S . Allora se $a \in S$ e $a + m = 2^n$ per qualche n intero positivo, necessariamente $a < 2^{n-1} < m < 2^n$.

A questo punto, si dimostra per induzione che, dato un insieme S contenente n numeri reali positivi distinti, esistono al massimo $n - 1$ potenze di 2 distinte della forma $a + b$ con $a, b \in S$.

Se $n = 1$ la tesi è ovvia, dato che c'è un solo elemento e non è possibile quindi formare alcuna coppia. Se $n > 1$, sia m il massimo elemento di S . Per ipotesi induttiva, esistono al massimo $n - 2$ potenze di 2 distinte della forma $a + b$ con $a, b \in S \setminus \{m\}$. Ma per quanto detto sopra, esiste al massimo una potenza di 2 della forma $a + m$ con $a \in S \setminus \{m\}$, e pertanto aggiungere m all'insieme aumenta il numero di potenze di 2 ottenibili di al massimo una unità. Quindi, per induzione, la tesi è vera per ogni n .

Punteggi

- (1 pt) Dire che esiste al massimo un $a \in S$ tale che $a + m$ sia una potenza di 2.
- (2 pt) Fornire una dimostrazione corretta di questa affermazione.
- (2 pt) Concludere correttamente la dimostrazione con un argomento induttivo.

Soluzione 3 Sia S un insieme di numeri reali positivi, e siano $a, b \in S$ tali che $a + b = 2^n$ per un qualche n intero positivo. Allora se $a < b$, necessariamente $a < 2^{n-1} < b < 2^n$. Questo significa che ogni potenza di 2 ottenibile dalla somma di due numeri distinti in S determina un intervallo in cui esiste necessariamente almeno un elemento di S . Dato che questi intervalli sono disgiunti, il numero di potenze di 2 distinte ottenibili dalla somma di due numeri distinti in S è al massimo pari al numero di elementi di S , escluso il minimo che non può appartenere ad alcuno di questi intervalli. Segue che si possono ottenere al massimo 2024 potenze di 2 distinte.

Punteggi

- (2 pt) Osservare che, se $a + b = 2^n$, allora $a < 2^{n-1} < b < 2^n$.
- (2 pt) Dedurre che ogni potenza di 2 definisce un intervallo in cui esiste almeno un elemento di S .
- (1 pt) Concludere la dimostrazione.

Soluzione 4 Costruiamo un grafo i cui vertici sono gli elementi di S , nel seguente modo. Per ogni n intero positivo, se esiste almeno una coppia di elementi di S la cui somma è uguale a 2^n , tracciamo un arco fra una (e solo una) di tali coppie di vertici.

Chiaramente il numero di potenze di 2 distinte ottenibili come somma di due elementi di S è pari al numero di archi del grafo. Vogliamo quindi dimostrare che tale grafo non ammette cicli. Se questo è vero, allora necessariamente il numero di archi è al massimo pari al numero di vertici meno uno, ossia 2024.

Supponiamo per assurdo che esista un ciclo, ossia che esistano k vertici distinti $v_1, v_2, \dots, v_k$ tali che per ogni i , $v_i + v_{i+1} = 2^{\alpha_i}$ per un qualche α_i intero positivo. Supponiamo senza perdita di generalità che α_2 sia l'esponente di valore massimo.

Consideriamo quindi la somma

$$\sum_{i=1}^k (-1)^{i-1} (v_i + v_{i+1}) = \sum_{i=1}^k (-1)^{i-1} 2^{\alpha_i}$$

dove $v_{k+1} = v_1$. Per costruzione, il LHS è uguale a $(1 + (-1)^k)v_1 \geq 0$, mentre il RHS è negativo, dato che 2^{α_2} compare con segno negativo e la somma di tutti gli altri termini è necessariamente minore di 2^{α_2} . Ma questo è impossibile, e quindi il grafo non ammette cicli. Segue che il numero di archi è al massimo pari al numero di vertici meno uno, ossia 2024.

Nota: Molti concorrenti hanno distinto il caso in cui k è pari (in cui il LHS è uguale a zero, concludendo per esempio con l'unicità della scrittura binaria) e il caso in cui k è dispari (che invece necessitava di una disuguaglianza).

Punteggi

- (1 pt) Riformulare il problema in termini di grafi, e dire che la tesi è equivalente a dimostrare che il grafo non ammette cicli.
- (1 pt) Dimostrare che il grafo non ammette cicli di lunghezza pari.
- (3 pt) Dimostrare che il grafo non ammette cicli di lunghezza dispari.

È stato inoltre assegnato **1 punto** a chi dimostrava che il grafo non ammette cicli di lunghezza 3, dato che l'argomentazione è simile a quella per i cicli di lunghezza dispari. È stato sottratto **1 punto** a chi non specificava che bisogna considerare solo un arco per ogni potenza di 2 distinta, dato che altrimenti sarebbero possibili cancellazioni all'interno del RHS, invalidando la dimostrazione.

Infine, diversi concorrenti hanno erroneamente affermato che è possibile assumere, senza perdita di generalità, che $i < j \implies \alpha_i < \alpha_j$. Questo errore non è stato penalizzato nel caso in cui la dimostrazione poi utilizzasse solamente il fatto di conoscere l'esponente di valore massimo, e non l'ordinamento degli esponenti. In caso contrario, è stato invece sottratto **1 punto**.

Problema 5

Sia ABC un triangolo e sia D il piede della bisettrice uscente da A . L'asse del segmento AD interseca la circonferenza circoscritta ad ABC in E ed F , con E e B che stanno da parti opposte rispetto alla retta AD . Sia G l'intersezione tra BE e DF , e sia H l'intersezione tra CF e DE .

Dimostrare che le rette GH e BC sono parallele.

Soluzione.

Sia M il punto medio della bisettrice AD , sia K l'intersezione tra AC ed EF , e sia K' l'intersezione tra AB ed EF .

- Dimostriamo che i quadrilateri $EKHC$ e $FK'GB$ sono ciclici.

Infatti, essendo ME l'asse di AD , avremo che $\angle DEM = \angle AEM$. Inoltre $\angle AEM = \angle AEF = \angle ACF$, in quanto insistono sullo stesso arco AF della circonferenza circoscritta ad ABC . Per transitività ne segue che $\angle HEK = \angle DEM = \angle HCK$, da cui la ciclicità del quadrilatero $EKHC$.

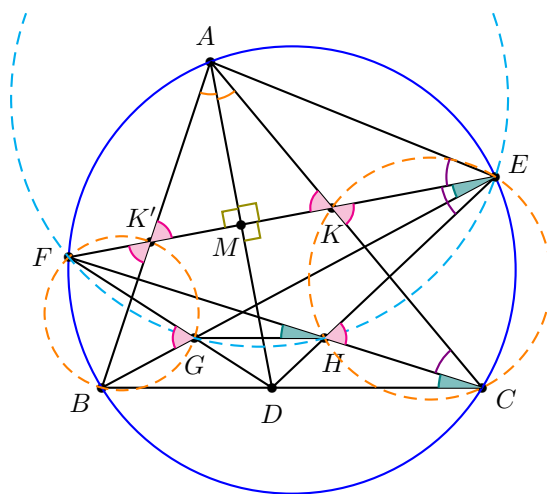
La dimostrazione della ciclicità di $FK'GB$ è analoga.

- Dimostriamo che il quadrilatero $GHEF$ è ciclico.

Per far questo ci basta dimostrare che $\angle EGF = \angle EHF$, il che è equivalente a dimostrare che i loro supplementari sono uguali, cioè $\angle FGB = \angle CHE$. Ora $\angle FGB$ è uguale a $\angle FK'B$ (per la ciclicità di $FK'GB$), il quale a sua volta è uguale a $\angle AK'M$, in quanto opposti al vertice. Analogamente, $\angle CHE$ è uguale a $\angle CKE$, il quale a sua volta è uguale a $\angle MKA$. Ci basta dunque osservare che $\angle AK'M$ è uguale a $\angle MKA$, dal momento che il triangolo $AK'K$ è isoscele sulla base KK' (essendo AM contemporaneamente altezza e bisettrice).

- Dimostriamo che le rette GH e BC sono parallele.

Per far questo ci basta dimostrare che $\angle FCB = \angle FHG$. D'altra parte sappiamo che $\angle FCB = \angle FEB$, in quanto insistono sullo stesso arco FB della circonferenza circoscritta ad ABC , e $\angle FEB = \angle FEG = \angle FHG$ per la ciclicità di $GHEF$, da cui l'uguaglianza richiesta segue per transitività.



Seconda soluzione Sia N l'ulteriore intersezione tra la bisettrice AD e la circonferenza circoscritta al triangolo ABC , sia I l'intersezione tra ED ed FN , e sia J l'intersezione tra FD ed EN .

- Dimostriamo che D è l'ortocentro del triangolo FNE , ed in particolare il quadrilatero $FIJE$ è ciclico (dal momento che i punti I e J vedono FE sotto un angolo retto).

A tal fine, dal momento che NM è già perpendicolare per costruzione a FE , ci basta dimostrare che FJ è perpendicolare a EN , ed EI è perpendicolare a FN . Consideriamo i triangoli DJN e DMF . Gli angoli in D sono opposti al vertice. Inoltre $\angle DNJ = \angle AFE = \angle DFM$, dove la prima uguaglianza segue dal fatto che entrambi gli angoli insistono sullo stesso arco AE della circonferenza circoscritta ad ABC , e la seconda segue dal fatto che FM è asse di AD . Ma allora anche $\angle DJN = \angle DMF$, e quest'ultimo è retto.

La dimostrazione che EI è perpendicolare a FN è del tutto analoga.

Osservazione: essendo il punto D il simmetrico dell'intersezione di un'altezza con la circonferenza circoscritta, il che è una nota proprietà dell'ortocentro, questo passo seguiva anche dalla sola definizione di D , a patto di citare la proprietà correttamente.

- Dimostriamo che $\angle GFH = \angle GEH$, da cui poi segue che il quadrilatero $GHEF$ è ciclico.

A tal fine iniziamo osservando che

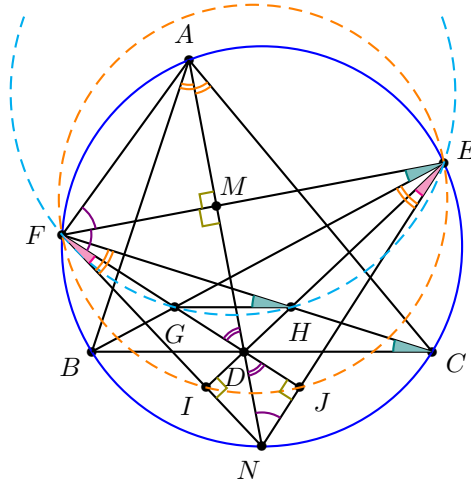
$$\angle NFC = \angle NAC = \angle BAN = \angle BEN.$$

Inoltre $\angle DEJ = \angle IFD$ per la ciclicità del quadrilatero $FIJE$. A questo punto per differenza di angoli uguali

$$\angle GFH = \angle IFC - \angle IFD = \angle BEJ - \angle DEJ = \angle GEH,$$

da cui la tesi.

- Una volta ottenuta la ciclicità del quadrilatero $GHEF$, il parallelismo tra GH e BC segue come nella prima soluzione.



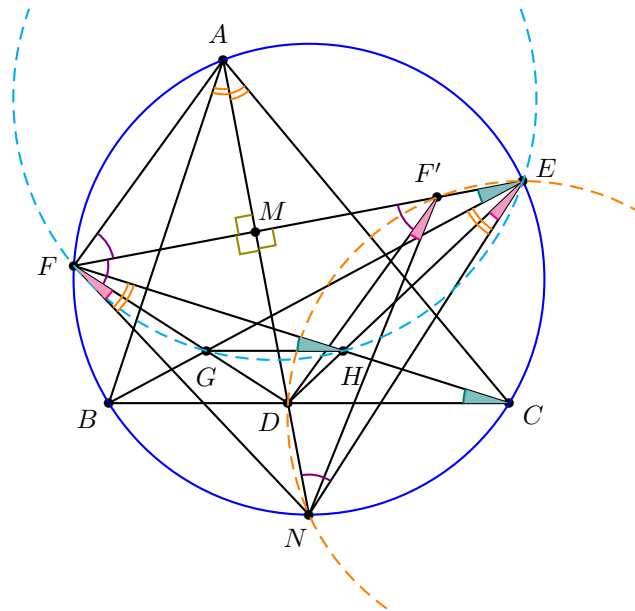
Terza soluzione Sia N l'ulteriore intersezione tra la bisettrice AD e la circonferenza circoscritta al triangolo ABC , e sia F' il simmetrico di F rispetto al punto medio M di AD (stiamo qui supponendo che $AB < AC$, ma l'altro caso è simmetrico).

- Dimostriamo che $\angle DNE = \angle MF'D$, da cui poi segue che il quadrilatero $ENDF'$ è ciclico.

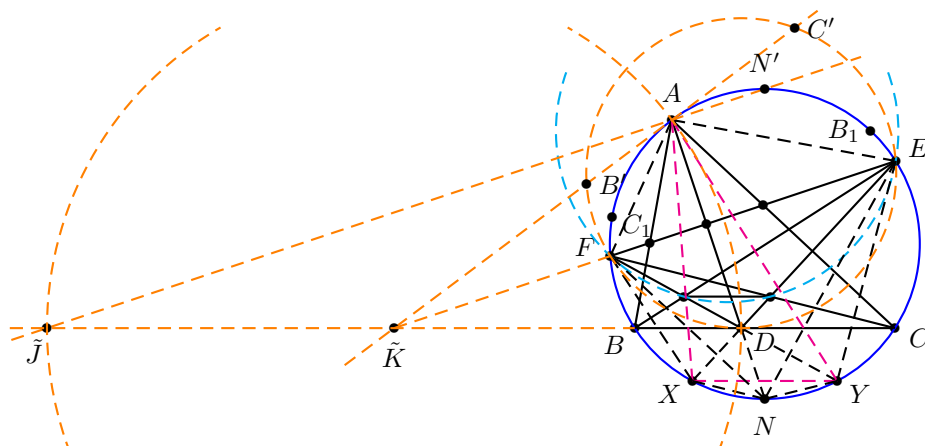
A tal fine basta osservare che $\angle DNE = \angle ANE = \angle AFE$ in quanto insistono sullo stesso arco AE della circonferenza circoscritta ad ABC . Inoltre $\angle AFE = \angle DFM$, poiché MF è l'asse di AD , e infine $\angle DFM = \angle MF'D$ per simmetria rispetto alla retta AN .

- Dimostriamo che $\angle DEN = \angle NFD$, da cui poi la dimostrazione prosegue come nella seconda soluzione.

A tal fine basta osservare che $\angle DEN = \angle DF'N$, grazie alla ciclicità del quadrilatero $ENDF'$, e $\angle DF'N = \angle NFD$ per il fatto che i triangoli NDF' e NDF sono simmetrici rispetto alla retta AN . A questo punto la tesi segue per transitività.



In questa figura vengono evidenziati alcuni altri oggetti che potrebbero essere utili, a seconda della linea dimostrativa scelta:



Esistono infatti molte altre dimostrazioni oltre alle 3 sopra descritte. Tra queste, alcune utilizzano le osservazioni seguenti:

- (I) il punto D è incentro del triangolo AXY , dove X e Y sono le intersezioni dei prolungamenti di ED e FD (rispettivamente) con la circonferenza circoscritta al triangolo ABC ;
- (Ap) se chiamiamo $\tilde{K}$ e $\tilde{J}$ le intersezioni con la retta BC rispettivamente della retta EF e della sua parallela passante per A , la circonferenza con centro $\tilde{K}$ passante per A passa anche per $\tilde{J}$ e D , ed è quindi la circonferenza di Apollonio di D , per cui la circonferenza circoscritta al triangolo DEF è tangente alla retta BC nel punto D (tale tangenza si può peraltro dimostrare direttamente con conti di angoli anche senza passare per la costruzione della circonferenza di Apollonio);
- (ang) molti diversi conti di angoli possono portare a dimostrare la ciclicità del quadrilatero $EFGH$ anche senza passare dai fatti precedenti o dalle dimostrazioni ufficiali sopra presentate;
- (Δ) non solo $AFDE$, ma anche $FXND$ e $EDNY$ sono deltoidi;
- (sim) simmetrizzando rispetto a EF il triangolo ABC viene mandato in un triangolo $DB'C'$ i cui vertici B' e C' appartengono alla tangente alla circonferenza circoscritta in A ;
- (arc) N' , il punto diametralmente opposto a N , appartiene all'ortogonale a AD nel punto A , cioè alla parallela a EF passante per A : da questo si possono impostare alcuni conti di archi ad esempio con B_1 e G_1 , le altre intersezioni delle bisettrici in B e in C con la circonferenza circoscritta a ABC ; in ogni caso anche altri conti di archi possono essere utili a dimostrare che $\angle BEX = \angle YFC$, da cui segue la ciclicità di $EFGH$, tipicamente come differenza degli archi BN e NC da cui togliere gli archi (calcolati uguali) XN e NY .
- il parallelismo della tesi discende anche dall'applicazione del teorema di Pappo-Pascal all'esagono $FYXEBC$, che è inscritto in una conica (la circonferenza).

In conseguenza di ciò sono stati usati i seguenti criteri per attribuire i punteggi.

1. In ogni caso, ogni dimostrazione corretta vale **7 punti**, e ogni dimostrazione corretta con piccoli errori nell'indicare alcuni angoli o saltando passaggi molto facili vale **6 punti**;
2. dimostrare l'equivalenza tra la ciclicità del quadrilatero $EFGH$ e la tesi vale **2 punti**;
3. enunciare solamente l'equivalenza tra la ciclicità del quadrilatero $EFGH$ e la tesi, ma senza dimostrarla, o dimostrandola in modo errato o lacunoso, vale **1 punto**;

4. dimostrare correttamente la ciclicità del quadrilatero $EFGH$, in qualunque modo, vale **5 punti**; questi punti e eventuali punteggi parziali su questa parte della dimostrazione sono additivi rispetto al punteggio dei punti 2 e 3. Alla dimostrazione di alcuni passi intermedi che possono portare a dimostrare la ciclicità di $EFGH$ vengono attribuiti punteggi parziali, che non sono additivi tra loro: viene invece attribuito il massimo tra i punteggi parziali delle affermazioni dimostrate, tra queste seguenti:
- la dimostrazione corretta che il segmento XY è parallelo al segmento BC vale **4 punti**;
 - la dimostrazione corretta (comunque ottenuta) del fatto che gli archi BX e CY sono congruenti vale **4 punti**;
 - la sola dimostrazione del fatto che la congruenza degli archi BX e CY implica la ciclicità del quadrilatero $EFGH$ vale **1 punto**;
 - la dimostrazione corretta del fatto che il punto D è incentro del triangolo AXY vale **3 punti**;
 - la dimostrazione corretta del fatto che il punto D è ortocentro del triangolo EFN vale **3 punti**;
 - la dimostrazione corretta del fatto che la circonferenza circoscritta al triangolo DEF è tangente alla lato BC (nel punto D) vale **3 punti**;
 - la dimostrazione corretta del fatto che la retta $\tilde{K}A$ è tangente alla circonferenza (nel punto A) vale **2 punti**;
 - la dimostrazione che i punti J, B, D, C formano una quaterna armonica sulla retta del lato BC vale **1 punto**;
 - alcuni conti di angoli o di archi che utilizzano in modo non banale l'uguaglianza degli angoli alla circonferenza che sottendono uno stesso arco, la riflessione attorno alla retta EF , la scomposizione di angoli in somme di angoli noti e l'ortogonalità tra AD e il suo asse EF ottenendo una relazione da cui si potrebbe dedurre che gli archi XN e NY sono congruenti valgono **1 punto o 2 punti** a seconda di quale progresso costituiscono verso la dimostrazione;
5. la dimostrazione corretta che dal parallelismo tra il segmento XY e la retta BC discende la tesi vale **3 punti**;
6. la costruzione di alcuni sottoinsiemi di punti è considerata un primo passo verso un inizio di dimostrazione, per cui (se non sono state dimostrate affermazioni che valgono più punti usando queste costruzioni)
- costruire tutti e tre i punti X, Y, N vale **1 punto**;
 - costruire tutti e due i punti $\tilde{J}, \tilde{K}$ vale **1 punto**;
7. valgono invece **0 punti**:
- le dimostrazioni sulle congruenze di triangoli dentro il deltoide $AFDE$;
 - le uguaglianze di angoli alla circonferenza che sottendono lo stesso arco;
 - la dimostrazione che il quadrilatero $AK'DK$ è un rombo.

Problema 6

Siano α e β due angoli di ampiezza positiva e minore di 90° . Una *formica alfabetica* è un essere che avanza in linea retta sul piano. La formica è estremamente pesante, per cui non può essere spostata da un posto all'altro. Può solo essere ruotata in modo che rimanga nello stesso punto, ma sia orientata in una diversa direzione del piano. Possiamo scegliere noi i punti in cui avviene la rotazione (che possono essere tanti quanti ne vogliamo) e la nuova direzione in cui disporla in ciascuno di essi, ma questa è l'unica operazione concessa.

Quando viene ruotata, la formica si ferma un istante, e può decidere di mantenere la nuova direzione in cui è stata disposta, oppure di girare ulteriormente di α in senso orario, o di β in senso antiorario; poi riprende la sua marcia. Se la formica ripassa per un punto in cui è stata ruotata in precedenza, se ne accorge, si spaventa, si ferma e non procede più.

Dimostrare che per ogni valore ammissibile di α e β è sempre possibile fermare una formica alfabetica con un numero finito di rotazioni.

In sintesi

La grande maggioranza degli elaborati pervenuti non offre che minimi progressi verso la soluzione; tali elaborati hanno ricevuto meno di tre punti. Gli elaborati che conquistano tre o più punti presentano un attacco convincente. In particolare, il caso $\alpha + \beta \leq 90^\circ$ vale quattro punti. Sono pervenute quattro soluzioni complete, nessuna impeccabile. Due di queste hanno ricevuto sette punti.

Schema e rapporto di correzione

Per risolvere l'esercizio occorre esibire una strategia che ferma la formica alfabetica. Tutte le strategie note agli organizzatori della gara, e tutte le soluzioni complete pervenute, anche solo per il caso $\alpha + \beta \leq 90^\circ$, richiedono la seguente *osservazione cruciale*: si possono fissare tre punti A, B, C in modo tale che, da qualunque punto posto su un certo arco della circonferenza per ABC, se la formica viene indirizzata verso B, essa transiterà inevitabilmente per uno dei punti ABC. Questa è l'intuizione fondamentale dell'esercizio. Infatti, un arco di curva (circonferenza) costituisce una barriera che la formica non può superare senza attraversarla: questo rende possibile indirizzare la formica *precisamente* verso ABC pur avendo solo un *controllo parziale* sulla sua traiettoria, a patto cioè che la si possa indirizzare grossolanamente verso la barriera. Per questa ragione, l'osservazione cruciale vale, da sola, **3 punti**. Il resto dell'esercizio consta nell'obbligare la formica, disponendo una o più barriere, a rimbalzare fra un opportuno insieme finito di punti, costringendola così a passare, prima o poi, due volte per il medesimo.

Se un elaborato non contiene l'osservazione cruciale, può ugualmente conquistare qualche punto. In particolare, i seguenti elementi valgono **un punto**. Questi punti non si sommano fra di loro né con altri diversamente conquistati.

1. L'idea di far rimbalzare la formica fra i punti di una circonferenza facendo uso, in un modo qualunque, della corrispondenza fra archi e angoli alla circonferenza. Alcuni elaborati chiamano in causa una circonferenza, ma quale semplice bordo per confinare il moto della formica, senza fare uso degli angoli alla circonferenza. Questi elaborati non ottengono il punto.
2. La soluzione di una famiglia di valori particolari di α e β , ottenuta rimbalzando la formica fra i vertici di un poligono regolare. È possibile risolvere così tutti i casi in cui α e β sono commensurabili con l'angolo giro; non è necessario però descrivere questa famiglia in piena generalità per ottenere il punto. La semplice soluzione di un caso particolare, d'altro canto, non è sufficiente.
3. La soluzione di una famiglia infinita di casi particolari giudicata rilevante. Per esempio, alcuni elaborati hanno trattato i casi con $\alpha = \beta$, potenzialmente sotto limitazioni aggiuntive, per esempio $\alpha + \beta < 60^\circ$.

4. L'osservazione, sebbene espressa implicitamente, che sia sufficiente individuare un insieme finito di punti, da ciascuno dei quali la formica possa essere orientata in modo tale che tutte e tre le sue possibili direzioni la conducano ad altri punti dello stesso insieme. Anche gli elaborati che asseriscono di aver trovato un siffatto insieme, indipendentemente dalla presenza di errori nella costruzione, conquistano questo punto. È interessante, benché irrilevante ai fini della correzione, notare che ogni strategia capace di fermare la formica descrive implicitamente un insieme finito con questa proprietà.

Uno dei modi per sfruttare la barriera costituita da un arco di circonferenza fa uso del seguente *lemma della convergenza*: dato un punto p del piano, e una lunghezza ϵ positiva, c'è una strategia che porta la formica a distanza minore di ϵ da p . Questo lemma vale **2 punti**, se correttamente dimostrato, solo uno dei quali si somma ad altri punti diversamente conquistati. Dimostrare che è possibile avvicinare indefinitamente la formica a p non basta, perché la formica potrebbe avvicinarsi a passi sempre più piccoli, senza mai scendere sotto una certa distanza. Se la dimostrazione del lemma soffre di questa imperfezione, vale **un punto**.

Come anticipato, l'osservazione cruciale vale **3 punti**. Quindi, in particolare, l'osservazione cruciale combinata col lemma della convergenza vale quattro punti. Il caso $\alpha + \beta \leq 90^\circ$ presuppone l'osservazione cruciale e vale **4 punti**, che includono i tre di quest'ultima. Non si verifica in nessuno degli elaborati, ma lo schema prevede che la combinazione di questo caso con il lemma della convergenza valga cinque punti.

I punteggi cinque, sei e sette vengono assegnati quando si manifestano tutti gli elementi necessari per una soluzione completa. Per quanto riguarda gli elaborati pervenuti, quelli che rientrano in questa categoria offrono dimostrazioni di due tipi: o basate sul lemma della convergenza, oppure su costruzioni ad hoc, di natura iterativa, pensate per condurre la formica verso una barriera. Entrambi gli approcci presentano delle insidie: nel primo occorre descrivere precisamente a quale punto si intenda convergere e quale sia la distanza desiderata, mentre il secondo richiede di lavorare con configurazioni geometriche complesse. Non sono arrivati elaborati privi di imperfezioni: i punteggi sono stati assegnati valutando la gravità di errori e lacune.

Zoologia delle soluzioni

L'esemplare di *Formica alphabetaria* è stato confuso per una tartaruga, intendendo forse una testuggine, e persino una scimmia non meglio descritta. Un elaborato discute e rigetta la classificazione dell'animale, suggerendo che si tratti, invece, di un *mini elefante*: *Elephas minimus*, possiamo supporre. Per quanto esecrabile ed esecrando, ignorare l'entomologia non è stato considerato ragione di penalità.

Numerosi elaborati, invece, si rivelano confusi circa il comportamento dell'animale. La formica alfabetaria si spaventa quando ripassa per un punto in cui è stata ruotata in precedenza, non semplicemente per un punto in cui è già passata. Intendere il comportamento della formica in questa seconda maniera rende l'esercizio drasticamente più semplice, e, chiaramente, compromette irrimediabilmente la validità della soluzione. Non è, tuttavia, detto che un elaborato affetto da questo errore nell'interpretazione del testo non meriti alcun punto, perché alcune delle osservazioni contemplate dallo schema non dipendono dalle circostanze che spaventano la formica. Nella fattispecie, nessuno degli elaborati confusi ha conquistato più di un punto.

Alcuni elaborati tentano di fermare la formica rimbalzandola fra i punti di una griglia finita di qualche genere. Tuttavia, questi tentativi si rivelano efficaci, al più, per alcuni valori particolari di α e β , e, di conseguenza, non guadagnano punti.

Un errore frequente consiste nel costruire strategie geometricamente impossibili. Ossia strategie che richiederebbero ad un determinato punto di trovarsi su una retta sulla quale, in generale, non si trova, oppure ad un certo angolo di assumere un determinato valore, a due segmenti di essere paralleli, etc. Imporre la condizione di coerenza geometrica su queste soluzioni, solitamente, risulta in vincoli artificiali su α e β , che non darebbero diritto ad alcun punto neppure come caso particolare.

Diverso è il caso delle costruzioni che funzionano solo per $\alpha + \beta \leq 90^\circ$. La maniera più semplice di intrappolare la formica, in questo caso, consiste nel dividere idealmente la circonferenza in due semicirconferenze, in ciascuna delle quali si dispongono tre punti che formino archi corrispondenti ad angoli alla circonferenza di α e β . Questi sei punti intrappolano la formica perché, dai tre punti di ciascuna semicirconferenza, basta dirigerla verso il punto centrale di quella opposta. La medesima costruzione non funziona nel caso $\alpha + \beta > 90^\circ$, perché i tre punti in ciascun corno della costruzione occupano più

di una semicirconferenza, intrappolando così un arco di meno di una semicirconferenza, che è troppo corto per contenere i tre punti opposti. Costruzioni come questa sono state valutate quattro punti anche quando l'elaborato non dichiara il vincolo $\alpha + \beta \leq 90^\circ$, e addirittura quando l'elaborato dichiara un vincolo sbagliato.

Le soluzioni complete, malgrado imperfezioni, sono già state trattate. Possiamo, però, illustrare qui una curiosa osservazione che senza dubbio coinvolge questi quattro elaborati, ma non si limita ad essi. La soluzione pubblicata dal progetto olimpiadi prevede di fissare un certo numero di terne di punti, ciascuna terna di punti intrappola un arco di circonferenza nel senso dell'osservazione cruciale, e le terne sono scelte in modo tale che l'unione di questi archi contenga tutti i punti delle terne stesse. In questo modo si ottiene un insieme finito di punti che intrappola la formica. Lo stile di ragionamento, che, condotto nella maniera più elegante, dà luogo alla soluzione pubblicata, è astratto: si fissa, simultaneamente e indipendentemente da qualunque scelta della formica, una molteplicità di punti che verifica la condizione geometrica di essere una trappola (quella espressa al punto 4. qua sopra). La quasi totalità degli elaborati, che include tutte le soluzioni complete, procede, invece, in maniera reattiva: ruoto la formica, vista la prima mossa della formica stabilisco la seconda rotazione, quindi la terza, etc. Questo approccio porta a una progressione del ragionamento incerta, per via del moltiplicarsi delle possibilità corrispondenti alle diverse combinazioni di scelte disponibili alla formica. Le soluzioni così ottenute sono vastamente più complicate di quelle accessibili all'approccio opposto.