



# XXVI Gara Nazionale a Squadre

Semifinale 2 – Venerdì 9 Maggio 2025



- Per ogni problema, indicare sul cartellino delle risposte un intero compreso tra 0000 e 9999.
- Se la quantità richiesta non è un numero intero, dove non indicato diversamente, si indichi la sua parte intera.
- Se la quantità richiesta è un numero negativo, oppure se il problema non ha soluzione, si indichi 0000.
- Se la quantità richiesta è maggiore di 9999, si indichino le ultime quattro cifre della sua parte intera.
- I problemi più impegnativi (a nostro giudizio) sono contrassegnati da una stella [★].
- Nello svolgimento dei calcoli può essere utile tener conto dei seguenti valori approssimati:

$$\sqrt{2} = 1.4142 \quad \sqrt{3} = 1.7321 \quad \sqrt{5} = 2.2361 \quad \sqrt{7} = 2.6458 \quad \pi = 3.1416.$$

## Scadenze importanti

- **10 minuti dall'inizio:** termine per la scelta del problema Jolly (dopo verrà dato d'ufficio il primo problema).
- **30 minuti dall'inizio:** termine per rivolgere domande sul testo.
- **90 minuti dall'inizio:** termine della gara.

### 1. Cifre da scambiare

L'agente segreto James Bound ha appena completato brillantemente l'ultima missione affidatagli. In essa doveva contare quanti sono i numeri interi positivi di esattamente tre cifre tali che, scambiando tra loro la seconda e la terza cifra contate da sinistra, la differenza (in valore assoluto) tra il numero di partenza e il numero ottenuto con lo scambio sia pari a 9. Quanti ne ha contati? *Ad esempio, 321 e 312 vanno bene perché  $|321 - 312| = 9$  e vanno contati come distinti.*

### 2. Somme di quadrati

Bound ha numero identificativo 007, dove il doppio zero significa "licenza di risolvere". Ha acquisito tale identificativo sommando i quadrati dei primi 30 numeri interi positivi pari e sottraendo da questi il quadruplo della somma dei quadrati dei primi 29 numeri interi positivi. Quanto ha ottenuto?

### 3. L'agente Mathieu

Talvolta James Bound si avvale della collaborazione dell'agente segreto francese René Mathieu. La prima volta fu quando insieme risolsero il seguente quesito: in quanti modi si possono scegliere due numeri tra 1 e 200 tali che, divisi per ogni numero tra 2 e 200, diano sempre resti distinti?

### 4. In dado veritas

Nel mondo degli agenti segreti non ci si può mai fidare di nessuno. In una stanza ci sono 6 agenti segreti e un dado equo a 6 facce, numerate con gli interi da 0 a 5 (compresi). Ciascun agente, in ordine, lancia il dado ed esclama: «Prima di me, esattamente  $k$  agenti hanno detto la verità!», dove  $k$  è il risultato del lancio del dado. Qual è la probabilità che esattamente due di loro dicano la verità? *Rispondere con la somma di numeratore e denominatore della frazione ridotta ai minimi termini.*

### 5. Disegno spettrale

L'acerrimo nemico di James Bound, e dell'umanità, è un'organizzazione nota come SPECTRAL THEOREM. Il suo logo è un pentagono convesso  $ABCDE$ , tale che  $ABCD$  sia un quadrato di lato 10 e  $ADE$  sia un triangolo isoscele (con base  $AD$ ). Sapendo che l'area del triangolo  $BDE$  è pari a  $\frac{17}{32}$  dell'area di  $ABCDE$ , quanto vale  $AE$ ?

### 6. Puntata dopo puntata

Per questioni di lavoro, James Bound si reca spesso al casinò matematico. Il gioco che sta osservando in questo momento inizia con  $k^2$  dollari sul banco, con  $k$  intero positivo. Ad ogni turno si aggiungono sul banco  $k$  dollari (ad esempio dopo il primo turno ci sono  $k^2 + k$  dollari). Qual è il minimo numero di turni dopo il quale sul banco ci sono esattamente 5712 dollari?

### 7. Regioni dentro quadrato

La direttrice del MI(6), meglio nota come N, attende che l'agente Bound torni e faccia rapporto. Nel mentre disegna un quadrato, sceglie un punto all'interno e traccia le perpendicolari ai lati del quadrato passanti per quel punto. Sceglie poi un secondo punto, che non sia sulle perpendicolari già tracciate, e traccia le perpendicolari ai lati passanti per il secondo punto. Ripete questa operazione, sempre scegliendo punti non su segmenti già tracciati, fino a che ha tracciato le perpendicolari dal 30-esimo punto. Quante regioni si sono formate nel quadrato?

### 8. Bersaglio mobile

Il quartier generale del MI(6), come tutti i servizi segreti, ha un ingresso la cui porta si apre inserendo un codice. Esso è uguale al risultato di  $p + 3q$ , dove  $p$  e  $q$  sono numeri primi, con  $p < q$  tali che  $pq = 83333$ . Quale codice va inserito per aprire la porta?

### 9. It's over 9000!

L'agente segreto Bound, si sa, ha una predilezione per le Aston Martin Gardner. Ora guida l'ultimo modello, la cui potenza è esagerata! Scrivendo in ordine crescente tutti gli interi positivi la cui somma delle cifre sia divisibile per 10, il numero di cavalli dell'auto sarebbe uguale al 2025-esimo numero scritto. Quanti cavalli ha l'auto?

### 10. Disegno per piano

Bound e Mathieu vogliono ideare una trappola per catturare un adepto della SPECTRAL THEOREM. Per mimare la situazione, disegnano sul pavimento due circonferenze:  $\Gamma$  di centro  $O$  e raggio  $4m$ , e  $\Delta$  di centro  $O'$  e raggio  $R > 4m$ . Le due circonferenze si intersecano in  $A$  e  $B$ , il segmento  $OO'$  interseca  $\Gamma$  in  $C$ , mentre la retta  $OB$  interseca  $\Delta$  in  $B$  e  $D$ . Bound si accorge che i segmenti  $CO'$  e  $AD$  si intersecano, e si mette proprio nel loro punto di intersezione  $X$ , mentre Mathieu si mette in un punto  $Y$  sul segmento  $DX$ . Detta  $F$  l'intersezione di  $YC$  con  $\Gamma$  distinta da  $C$ , risulta che  $\widehat{YFO} = \widehat{DOX}$  e  $XO' = 3m$ . Perché la trappola sia infallibile, Bound e Mathieu devono determinare il valore (in metri quadri) del prodotto  $AX \cdot YD$ . Quanto vale tale prodotto?

### 11. Quante figurine!

Il leader della SPECTRAL THEOREM (per tutti: *il cattivo*) gioca ad un solitario con il suo gattone bianco sulle gambe. Deve inserire in ogni casella di una griglia  $2 \times 3$ , inizialmente vuota, una figurina che lo raffigura a capo del mondo (le figurine sono tutte uguali). La prima figurina viene posizionata casualmente; dalla seconda in poi il leader sceglie casualmente una casella che abbia almeno un vertice in comune con la casella in cui ha inserito la figurina precedente.

Il leader si rende conto che è riuscito a inserire tutte le figurine, ma ciò non era affatto scontato. Qual era la probabilità che ciò accadesse? *Rispondere con la somma di numeratore e denominatore della frazione ridotta ai minimi termini.*

### 12. Errori di gioventù

Anche James Bound è stato innamorato! In gioventù ha conosciuto la matematica Vesper Lynear, che lo ha conquistato risolvendo quasi all'istante il seguente quesito: quanti sono i triangoli rettangoli fra loro non congruenti, con lunghezze dei cateti intere positive e che hanno aree numericamente uguali a 5 volte il loro perimetro?

### 13. Accesso esclusivo

L'accesso al casinò matematico è esclusivo e riservato agli agenti segreti matematici. All'ingresso sono disegnati una circonferenza di raggio 15, un suo diametro  $BC$  e un punto  $A$  esterno alla circonferenza. La circonferenza interseca i segmenti  $AB$  e  $AC$  rispettivamente in  $D$  ed  $E$ . È noto che  $BD = \frac{1}{3}AB$  e  $CE = \frac{1}{4}AC$ . Per entrare al casinò, bisogna dire quanto vale l'area di  $ABC$ . Qual è la risposta?

### 14. Operazione piovra

Inaspettatamente, Vesper Lynear ha spezzato il cuore di James Bound. Egli aveva definito l'operazione  $\star$  sui numeri razionali in questo modo: per ogni  $x, y$  razionali positivi,

$$x \star y = \frac{x+y}{1+(xy)}.$$

Aveva poi impostato come codice della propria cassaforte il risultato di  $(\dots((2 \star 3) \star 4) \dots) \star 99$ , ma una volta aperta aveva scoperto che Vesper aveva trafugato il contenuto e se n'era andata. Che risultato ha inserito Vesper? *Rispondere con la somma di numeratore e denominatore della frazione ridotta ai minimi termini.*

### 15. Chi trova un indizio vero...

James deve districarsi tra gli indizi dei veri informatori e quelli dei depistatori. Gli indizi a lui forniti sono tutti diversi e sono tutte le possibili coppie di numeri naturali  $(n, d)$  dove  $n < 100$  e  $d \neq 1$  è un suo divisore. James è riuscito a capire che gli indizi veri si possono scovare calcolando il prodotto tra  $n$  e  $d$  diviso per il prodotto dei divisori *primi* di  $n$  e il prodotto dei divisori *primi* di  $d$ :  $(n, d)$  è un vero indizio solo se questa operazione dà come risultato  $n$ . Quanto vale la somma di tutti gli  $n + d$  degli indizi veri?

### 16. No Time to Die

Il cattivo pregusta il dominio sul mondo dopo aver rinchiuso James Bound in una cella a forma di antiprisma quadrato. Senza squadre né compasso, non può misurare i lati. Inaspettatamente, il gatto bianco del cattivo si rivela quale agente segreto del MI(6) e comunica a Bound che la cella ha lato di base lungo  $10m$  e altezza  $30m$ , consentendogli di liberarsi. Il cattivo commenta laconico: «Chi avrebbe mai detto che un animale domestico fosse un agente segreto!?!». Qual è il volume (in  $m^3$ ) della cella?

*Si ricorda che un antiprisma quadrato è un poliedro che ricorda un prisma quadrato, ma in cui una delle basi viene ruotata di 45 gradi attorno all'asse del prisma. Di conseguenza, la superficie laterale non è composta da quattro rettangoli, bensì da otto triangoli isosceli, i cui lati sono formati collegando ciascun vertice delle basi ai due più vicini vertici dell'altra base.*



# XXVI Gara Nazionale a Squadre

Semifinale 2 – Venerdì 9 Maggio 2025



## Soluzioni

| Nr. | Problema                     | Soluzione   |
|-----|------------------------------|-------------|
| 1   | Cifre da scambiare           | <b>0162</b> |
| 2   | Somme di quadrati            | <b>3600</b> |
| 3   | L'agente Mathieu             | <b>0199</b> |
| 4   | In dado veritas              | <b>8677</b> |
| 5   | Disegno spettrale            | <b>0013</b> |
| 6   | Puntata dopo puntata         | <b>0016</b> |
| 7   | Regioni dentro quadrato      | <b>0961</b> |
| 8   | Bersaglio mobile             | <b>1664</b> |
| 9   | It's over 9000!              | <b>0251</b> |
| 10  | Disegno per piano            | <b>0012</b> |
| 11  | Quante figurine!             | <b>0071</b> |
| 12  | Errori di gioventù           | <b>0006</b> |
| 13  | Accesso esclusivo            | <b>0540</b> |
| 14  | Operazione piovra            | <b>9900</b> |
| 15  | Chi trova un indizio vero... | <b>0616</b> |
| 16  | No Time to Die               | <b>3414</b> |