XXV Gara Nazionale a Squadre

Semifinale 1 – Venerdì 3 Maggio 2024

Ministero dell'Istruzione e del Merito

- Per ogni problema, indicare sul cartellino delle risposte un intero compreso tra 0000 e 9999.
- Se la quantità richiesta non è un numero intero, dove non indicato diversamente, si indichi la sua parte intera.
- Se la quantità richiesta è un numero negativo, oppure se il problema non ha soluzione, si indichi 0000.
- Se la quantità richiesta è maggiore di 9999, si indichino le ultime quattro cifre della sua parte intera.
- I problemi più impegnativi (a nostro giudizio) sono contrassegnati da una o più stelle [$\star$].
- Nello svolgimento dei calcoli può essere utile tener conto dei seguenti valori approssimati:

$$\sqrt{2} = 1.4142 \qquad \sqrt{3} = 1.7321 \qquad \sqrt{5} = 2.2361 \qquad \sqrt{7} = 2.6458 \qquad \pi = 3.1416.$$

Scadenze importanti

- **10 minuti dall'inizio**: termine per la scelta del problema Jolly (dopo verrà dato d'ufficio il primo problema).
- **30 minuti dall'inizio**: termine per rivolgere domande sul testo.
- **90 minuti dall'inizio**: termine della gara.

1. Festa al castello

SherLog Hodge, il famoso detective, osserva di nascosto i 33 partecipanti ad una festa. Sa che alcuni sono dalla sua parte, gli altri invece sono fedeli al suo acerrimo nemico Mongearty. Alcuni partecipanti si stringono la mano, ma solo se non si conoscevano prima. Sapendo che gli appartenenti ad una stessa fazione già si conoscevano, al massimo quante strette di mano ha potuto osservare SherLog?

2. Tentativo di cattura

SherLog Hodge ed il fido Wolfram costruiscono una trappola per incastrare Mongearty. Si tratta di un rettangolo $ABCD$ con AB lungo $48\,dm$ e BC lungo $20\,dm$. Sulla diagonale AC viene costruito un rettangolo in modo tale che AC sia un lato ed il lato ad esso opposto passi per B. Allo stesso modo su BD si costruisce un rettangolo passante per A. Se Mongearty entrerà nell'area costituita dall'unione dei tre rettangoli, la trappola scatterà. Wolfram si chiede se l'area sia sufficiente. Quanto vale l'area, in dm^2?

3. Quesito nel romanzo

La nota scrittrice di libri gialli Jessica Fourier ama piazzare qualche quesito matematico nei suoi romanzi. Nella sua ultima fatica chiede al lettore quante siano le coppie (x, y) di interi con $|y| \leq 4000$ per cui esiste un intero positivo k che soddisfa la relazione $x^2 + y^2 + 2^{2k-1} + 2^k x - 2^k y = 0$. Qual è la risposta?

4. La strada verso il rifugio

L'ispettore Gauget si trova alla base di una montagna conica di apotema lungo 600 m e raggio di base 150 m. Deve catturare un fuggitivo, nascosto nel rifugio che si trova sul lato della montagna a esattamente 150 m da lui verso la vetta della montagna. Per arrivare al rifugio, l'ispettore percorre la strada più corta che faccia anche un giro completo intorno alla montagna; osserva che curiosamente, la strada percorsa è per un primo tratto in salita e poi in discesa. Quanti metri è lungo il tratto in salita?

5. Pizzini per MontyHallbano

Il boss dei Sin(agra) impartisce ordini in codice utilizzando sequenze di esattamente tre lettere, tutte distinte, prese da un alfabeto che ha in tutto n lettere. Il commissario MontyHallbano non sa tradurre gli ordini scritti sui pizzini, ma sa che il numero totale di possibili sequenze è multiplo di 11 e di 19. Quanto vale n, come minimo?

6. La generosità di Zenonigata

Zenonigata è talmente ossessionato da Lupin/3 che ha promesso che, quando lo catturerà, regalerà ai colleghi tanti MathYen quanto vale la somma delle cifre della somma delle cifre della somma delle cifre di 2023^{2024}. Quanti MathYen sono?

7. La sfida di Jessica Fourier

Jessica Fourier ha il classico blocco dello scrittore matematico. Per distrarsi sfida il Dr. Sette: entrambi hanno un foglio con disegnata un'identica circonferenza e devono ritagliare un quadrilatero. Entrambi i quadrilateri devono avere la stessa area. Il Dr. Sette ritaglia il quadrato inscritto nella circonferenza. Jessica invece traccia una corda AB a distanza $400\,mm$ dal centro C e le tangenti nei punti A e B alla circonferenza che si intersecano in P. Quindi ritaglia il quadrilatero $CAPB$. Quanto misura il raggio delle due circonferenze identiche in mm?

8. Vicini di tavola

Attorno ad una tavola rotonda siedono 10000 persone, ma purtroppo ognuna di esse potrebbe essere un membro della famigerata Organizzazione Nera. Di queste persone, 4248 pronunciano la seguente frase: "Tra me e le due persone al mio fianco si nascondono almeno due membri dell'Organizzazione"; tutte le altre invece dichiarano :"Tra me e le due persone al mio fianco si nasconde al più un membro dell'Organizzazione". Il detective Kolmogoro, dietro "suggerimento" di coNaN, conclude: "Assumendo che i membri dell'Organizzazione mentano sempre e che tutti gli altri dicano sempre la verità, è possibile che il numero di membri dell'Organizzazione sia...".

Con quanti numeri diversi Kolmogoro avrebbe potuto terminare la frase?

9. Il disegno di Fuzzy [$\star$]

L'ispettore Giuseppe Fuzzy, collaboratore di MontyHallbano, disegna un triangolo ABC isoscele in A. Prende poi i punti D ed E rispettivamente sui lati AC e AB tali che DE è parallelo a BC. Detta P l'intersezione fra i segmenti BD e CE, osserva che $\widehat{BPC} = 60°$. Sa, inoltre, che le circonferenze inscritte nel quadrilatero $ADPE$ e nel triangolo BPC hanno raggi congruenti, e che l'altezza del triangolo ABC relativa al vertice A misura 1200. Chiede quindi al commissario MontyHallbano: quanto misura il lato AC?

10. Il quesito del tenente

Il tenente Coulomb ha già capito chi è il colpevole, per cui gioca di psicologia per farlo confessare. La domanda che Coulomb pone, e che fa crollare il sospettato, è la seguente: in quanti dei sottoinsiemi non vuoti di $\{1,2,\dots,12\}$ il prodotto degli elementi ha zero come cifra delle unità?

11. Gioco perverso [$\star$]

Mongearty ha catturato il povero Wolfram e lo ha piazzato nel centro di un poligono regolare di 2024 vertici. Per deridere SherLog Hodge, Mongearty fa un gioco perverso: sceglie a caso un sottoinsieme C di 100 vertici tali che non ve ne siano due opposti rispetto al centro del poligono. Poi costruisce tutti i possibili triangoli con vertici in C: se Wolfram è esterno a tutti questi triangoli avrà salva la vita. SherLog ha già calcolato quale sia la frazione f, ridotta ai minimi termini, corrispondente alla probabilità che Wolfram sopravviva. Quanto vale il numeratore di f?

12. Foglietto con indizio

Sulla scena del crimine, Hermite Poinsot trova un foglietto recante una sequenza di numeri: il primo termine è 1 mentre l'n-esimo termine è la somma del k-esimo termine (dove k è la parte intera della radice di n) e del valore assoluto della differenza tra n e il quadrato perfetto ad esso più vicino. Hercule nota che la differenza tra gli ultimi due numeri è 10: quanto è lunga al minimo la sequenza? *Fornire l'esponente di 2 nella fattorizzazione in fattori primi.*

13. Scansionando numeri

Un numero n ha una scrittura consecutiva se esiste una sequenza di almeno due interi positivi consecutivi tali che la loro somma sia n. Tra i vari gadget dell'ispettore Gauget vi è il *consecutivometro*: dato un numero n, il *consecutivometro* restituisce il numero di scritture consecutive di n. Per risolvere l'ultimo caso l'ispettore usa il *consecutivometro* su tutti i numeri da 1 a 101 e somma tutti i valori ottenuti. Quanto vale questa somma?

14. Chiamate gli artificieri!

MontyHallbano ha avuto una soffiata: una cella terroristica ha nascosto una bomba in una rotonda circolare. Il Commissario è già riuscito a localizzare la rotonda, perché sa che sui bordi ci sono 3 angeli: A e B agli estremi di un diametro e l'altro angelo X forma un angolo $\widehat{XAB} = 30°$. Inoltre, con gli indizi raccolti, Fuzzy sta disegnando la mappa: traccia un altro diametro $XY = 18\,m$ e chiama C, D rispettivamente le intersezioni tra le rette AX e AY con la tangente alla rotonda condotta da B. M e N sono i punti medi di BX e BY. La bomba è stata piazzata nell'intersezione delle rette CM e DN. Gli artificieri hanno bisogno di conoscere la distanza precisa di A dalla bomba. Quanto vale questa distanza in *cm*?

15. Palline magiche

Il sospettato che Hermite Poinsot sorveglia ha inscenato un gioco di magia per confondere il detective. Inizialmente ha in mano 2 palline rosse; ad ogni passaggio compie una tra le seguenti mosse:

- aggiunge una pallina blu ed una pallina rossa;
- aggiunge una pallina blu e toglie una pallina rossa;
- aggiunge due palline verdi.

Dichiara che quando avrà in mano 11 palline blu, 9 rosse e 4 verdi sparirà, inoltre vuole raggiungere l'obiettivo usando il numero minimo possibile di mosse. In quanti modi può farlo?

16. Neanche stavolta

L'ispettore Zenonigata ha messo Lupin/3 all'angolo proponendogli la successione a_n, che rispetta la seguente legge: per ogni $n > 1$ si ha che $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2} + 3a_{n-3} + \ldots + (n-1)a_1$ e inoltre $a_1 = k$ per qualche k intero. Zenonigata chiede beffardo se Lupin/3 sappia calcolare la somma di tutti i valori di k per i quali esiste n tale che $a_n = 2024$. Il ladro, altrettanto beffardo, risponde correttamente e scappa, lasciando Zenonigata a mangiarsi le mani per l'occasione sprecata. Cosa ha risposto Lupin/3?

Unione Matematica Italiana

XXV Gara Nazionale a Squadre

Semifinale 1 – Venerdì 3 Maggio 2024

Ministero dell'Istruzione e del Merito

Soluzioni

Nr.	Problema	Soluzione
1	Festa al castello	0272
2	Tentativo di cattura	1680
3	Quesito nel romanzo	0012
4	La strada verso il rifugio	0480
5	Pizzini per MontyHallbano	0057
6	La generosità di Zenonigata	0004
7	La sfida di Jessica Fourier	0894
8	Vicini di tavola	5751
9	Il disegno di Fuzzy [$\star$]	1212
10	Il quesito del tenente	3040
11	Gioco perverso [$\star$]	0025
12	Foglietto con indizio	1536
13	Scansionando numeri	0176
14	Chiamate gli artificieri!	1385
15	Palline magiche	4290
16	Neanche stavolta	2277

XXV Gara Nazionale a Squadre

Semifinale 2 – Venerdì 3 Maggio 2024

Ministero dell'Istruzione e del Merito

- Per ogni problema, indicare sul cartellino delle risposte un intero compreso tra 0000 e 9999.
- Se la quantità richiesta non è un numero intero, dove non indicato diversamente, si indichi la sua parte intera.
- Se la quantità richiesta è un numero negativo, oppure se il problema non ha soluzione, si indichi 0000.
- Se la quantità richiesta è maggiore di 9999, si indichino le ultime quattro cifre della sua parte intera.
- I problemi più impegnativi (a nostro giudizio) sono contrassegnati da una o più stelle [$\star$].
- Nello svolgimento dei calcoli può essere utile tener conto dei seguenti valori approssimati:

$$\sqrt{2} = 1.4142 \qquad \sqrt{3} = 1.7321 \qquad \sqrt{5} = 2.2361 \qquad \sqrt{7} = 2.6458 \qquad \pi = 3.1416.$$

Scadenze importanti

- **10 minuti dall'inizio**: termine per la scelta del problema Jolly (dopo verrà dato d'ufficio il primo problema).
- **30 minuti dall'inizio**: termine per rivolgere domande sul testo.
- **90 minuti dall'inizio**: termine della gara.

1. Osservando di nascosto

SherLog Hodge, il famoso detective, osserva di nascosto i 35 partecipanti ad una festa. Sa che alcuni sono dalla sua parte, gli altri invece sono fedeli al suo acerrimo nemico Mongearty. Alcuni partecipanti si stringono la mano, ma solo se non si conoscevano prima. Sapendo che gli appartenenti ad una stessa fazione già si conoscevano, al massimo quante strette di mano ha potuto osservare SherLog?

2. Botta e risposta!

L'ispettore Zenonigata ha messo Lupin/3 all'angolo proponendogli la successione a_n, che rispetta la seguente legge: per ogni $n > 1$ si ha che $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2} + 3a_{n-3} + \ldots + (n-1)a_1$ e inoltre $a_1 = k$ per qualche k intero. Zenonigata chiede beffardo se Lupin/3 sappia calcolare la somma di tutti i valori di k per i quali esiste n tale che $a_n = 1000$. Il ladro, altrettanto beffardo, risponde correttamente e scappa, lasciando Zenonigata a mangiarsi le mani per l'occasione sprecata. Cosa ha risposto Lupin/3?

3. Rotonda pericolosa

MontyHallbano ha avuto una soffiata: una cella terroristica ha nascosto una bomba in una rotonda circolare. Il Commissario è già riuscito a localizzare la rotonda, perché sa che sui bordi ci sono 3 angeli: A e B agli estremi di un diametro e l'altro angelo X forma un angolo $\widehat{XAB} = 30°$. Inoltre, con gli indizi raccolti, Fuzzy sta disegnando la mappa: traccia un altro diametro $XY = 9\,m$ e chiama C, D rispettivamente le intersezioni tra le rette AX e AY con la tangente alla rotonda condotta da B. M e N sono i punti medi di BX e BY. La bomba è stata piazzata nell'intersezione delle rette CM e DN. Gli artificieri hanno bisogno di conoscere la distanza precisa di A dalla bomba. Quanto vale questa distanza in cm?

4. Blocco sul raggio

Jessica Fourier ha il classico blocco dello scrittore matematico. Per distrarsi sfida il Dr. Sette: entrambi hanno un foglio con disegnata un'identica circonferenza e devono ritagliare un quadrilatero. Entrambi i quadrilateri devono avere la stessa area. Il Dr. Sette ritaglia il quadrato inscritto nella circonferenza. Jessica invece traccia una corda AB a distanza $600\,mm$ dal centro C e le tangenti nei punti A e B alla circonferenza che si intersecano in P. Quindi ritaglia il quadrilatero $CAPB$. Quanto misura il raggio delle due circonferenze identiche in mm?

5. Il destino di Wolfram [$\star$]

Mongearty ha catturato il povero Wolfram e lo ha piazzato nel centro di un poligono regolare di 10000 vertici. Per deridere SherLog Hodge, Mongearty fa un gioco perverso: sceglie a caso un sottoinsieme C di 2024 vertici tali che non ve ne siano due opposti rispetto al centro del poligono. Poi costruisce tutti i possibili triangoli con vertici in C: se Wolfram è esterno a tutti questi triangoli avrà salva la vita. SherLog ha già calcolato quale sia la frazione f, ridotta ai minimi termini, corrispondente alla probabilità che Wolfram sopravviva. Quanto vale il numeratore di f?

6. Ordini in codice

Mongearty impartisce ordini in codice utilizzando sequenze di esattamente tre lettere, tutte distinte, prese da un alfabeto che ha in tutto n lettere. SherLog Hodge non sa tradurre gli ordini , ma sa che il numero totale di possibili sequenze è multiplo di 13 e di 17. Quanto vale n, come minimo?

7. Domanda risolutiva

Il tenente Coulomb ha già capito chi è il colpevole, per cui gioca di psicologia per farlo confessare. La domanda che Coulomb pone, e che fa crollare il sospettato, è la seguente: in quanti dei sottoinsiemi non vuoti di $\{1, 2, \ldots, 13\}$ il prodotto degli elementi ha zero come cifra delle unità?

8. Riddle, she wrote!

La nota scrittrice di libri gialli Jessica Fourier ama piazzare qualche quesito matematico nei suoi romanzi. Nella sua ultima fatica chiede al lettore quante siano le coppie (x,y) di interi con $|y| \leq 6000$ per cui esiste un intero positivo k che soddisfa la relazione $x^2+y^2+2^{2k-1}+2^kx-2^ky=0$. Qual è la risposta?

9. Quanti soldi...

Zenonigata è talmente ossessionato da Lupin/3 che ha promesso che, quando lo catturerà, regalerà ai colleghi tanti MathYen quanto vale la somma delle cifre della somma delle cifre della somma delle cifre di 2024^{2025}. Quanti MathYen sono?

10. Pizzino per MontyHallbano [$\star$]

L'ispettore Giuseppe Fuzzy, collaboratore di MontyHallbano, disegna un triangolo ABC isoscele in A. Prende poi i punti D ed E rispettivamente sui lati AC e AB tali che DE è parallelo a BC. Detta P l'intersezione fra i segmenti BD e CE, osserva che $\widehat{BPC}=60°$. Sa, inoltre, che le circonferenze inscritte nel quadrilatero $ADPE$ e nel triangolo BPC hanno raggi congruenti, e che l'altezza del triangolo ABC relativa al vertice A misura 240. Chiede quindi al commissario MontyHallbano: quanto misura il lato AC?

11. Il trucco del sospettato

Il sospettato che Hermite Poinsot sorveglia ha inscenato un gioco di magia per confondere il detective. Inizialmente ha in mano 2 palline rosse; ad ogni passaggio compie una tra le seguenti mosse:

- aggiunge una pallina blu ed una pallina rossa;
- aggiunge una pallina blu e toglie una pallina rossa;
- aggiunge due palline verdi.

Dichiara che quando avrà in mano 12 palline blu, 10 rosse e 4 verdi sparirà, inoltre vuole raggiungere l'obiettivo usando il numero minimo possibile di mosse. In quanti modi può farlo?

12. Una trappola per Mongearty

SherLog Hodge ed il fido Wolfram costruiscono una trappola per incastrare Mongearty. Si tratta di un rettangolo $ABCD$ con AB lungo $46\,dm$ e BC lungo $20\,dm$. Sulla diagonale AC viene costruito un rettangolo in modo tale che AC sia un lato ed il lato ad esso opposto passi per B. Allo stesso modo su BD si costruisce un rettangolo passante per A. Se Mongearty entrerà nell'area costituita dall'unione dei tre rettangoli, la trappola scatterà. Wolfram si chiede se l'area sia sufficiente. Quanto vale l'area, in dm^2?

13. L'ispettore Gauget in montagna

L'ispettore Gauget si trova alla base di una montagna conica di apotema lungo 1000 m e raggio di base 250 m. Deve catturare un fuggitivo, nascosto nel rifugio che si trova sul lato della montagna a esattamente 250 m da lui verso la vetta della montagna. Per arrivare al rifugio, l'ispettore percorre la strada più corta che faccia anche un giro completo intorno alla montagna; osserva che curiosamente, la strada percorsa è per un primo tratto in salita e poi in discesa. Quanti metri è lungo il tratto in salita?

14. Scena del crimine

Sulla scena del crimine, Hermite Poinsot trova un foglietto recante una sequenza di numeri: il primo termine è 1 mentre l'n-esimo termine è la somma del k-esimo termine (dove k è la parte intera della radice di n) e del valore assoluto della differenza tra n e il quadrato perfetto ad esso più vicino. Hercule nota che la differenza tra gli ultimi due numeri è 11: quanto è lunga al minimo la sequenza? *Fornire l'esponente di* 2 *nella fattorizzazione in fattori primi.*

15. Sinceri o menzogneri

Attorno ad una tavola rotonda siedono 10000 persone, ma purtroppo ognuna di esse potrebbe essere un membro della famigerata Organizzazione Nera. Di queste persone, 4248 pronunciano la seguente frase: "Tra me e le due persone al mio fianco si nascondono almeno due membri dell'Organizzazione"; tutte le altre invece dichiarano :"Tra me e le due persone al mio fianco si nasconde al più un membro dell'Organizzazione". Il detective Kolmogoro, dietro "suggerimento" di coNaN, conclude: "Assumendo che i membri dell'Organizzazione mentano sempre e che tutti gli altri dicano sempre la verità, è possibile che il numero di membri dell'Organizzazione sia...".

Con quanti numeri diversi Kolmogoro avrebbe potuto terminare la frase?

16. La somma per l'ispettore Gauget

Un numero n ha una scrittura consecutiva se esiste una sequenza di almeno due interi positivi consecutivi tali che la loro somma sia n. Tra i vari gadget dell'ispettore Gauget vi è il *consecutivometro*: dato un numero n, il consecutivometro restituisce il numero $s(n)$ di scritture consecutive di n. Per risolvere l'ultimo caso, l'ispettore ha bisogno di calcolare $S=s(1)+s(2)+s(3)+\ldots+s(99)$. Quanto vale S?

Soluzioni

Nr.	Problema	Soluzione
1	Osservando di nascosto	0306
2	Botta e risposta!	1125
3	Rotonda pericolosa	0692
4	Blocco sul raggio	1341
5	Il destino di Wolfram [$\star$]	0253
6	Ordini in codice	0052
7	Domanda risolutiva	6080
8	Riddle, she wrote!	0013
9	Quanti soldi...	0008
10	Pizzino per MontyHallbano [$\star$]	0242
11	Il trucco del sospettato	6006
12	Una trappola per Mongearty	1610
13	L'ispettore Gauget in montagna	0800
14	Scena del crimine	3072
15	Sinceri o menzogneri	5751
16	La somma per l'ispettore Gauget	0173

Unione Matematica Italiana

XXV Gara Nazionale a Squadre

Finale Nazionale – Sabato 4 Maggio 2024

Ministero dell'Istruzione e del Merito

- Per ogni problema, indicare sul cartellino delle risposte un intero compreso tra 0000 e 9999.
- Se la quantità richiesta non è un numero intero, dove non indicato diversamente, si indichi la sua parte intera.
- Se la quantità richiesta è un numero negativo, oppure se il problema non ha soluzione, si indichi 0000.
- Se la quantità richiesta è maggiore di 9999, si indichino le ultime quattro cifre della sua parte intera.
- I problemi più impegnativi (a nostro giudizio) sono contrassegnati da una o più stelle [$\star$].
- Nello svolgimento dei calcoli può essere utile tener conto dei seguenti valori approssimati:

$$\sqrt{2} = 1.4142 \qquad \sqrt{3} = 1.7321 \qquad \sqrt{5} = 2.2361 \qquad \sqrt{7} = 2.6458 \qquad \pi = 3.1416.$$

Scadenze importanti

- **10 minuti dall'inizio**: termine per la scelta del problema Jolly (dopo verrà dato d'ufficio il primo problema).
- **30 minuti dall'inizio**: termine per rivolgere domande sul testo.
- **120 minuti dall'inizio**: termine della gara.

Prima parte: la crociera degli enigmi

1. Una crociera di relax

Vennma, Daϕne, Fredmath, S-Higgs con il loro fidato amico Scoobe-Zout sono in viaggio per raggiungere i genitori di Fredmath e partire per una rilassante crociera per festeggiare il suo compleanno. Durante il viaggio, tra una chiacchiera e l'altra, Vennma disegna sul suo quadernino un rettangolo $ABCD$ con $AB = 60\,mm$ e $BC = 80\,mm$. Sulla diagonale AC costruisce un rettangolo in modo tale che AC sia un lato ed il lato ad esso opposto passi per B. Allo stesso modo su BD costruisce un rettangolo passante per A. Daϕne prende il rossetto e colora tutta la figura e infine esclama: "Ora è molto meglio!". *Calcolare l'area colorata ovvero l'area dell'unione dei tre rettangoli.*

2. Cocktail di Benvenuto

Finalmente si parte per la crociera, e tutto inizia nel migliore dei modi: con un aperitivo inaugurale. S-Higgs e Scoobe-Zout hanno già l'acquolina in bocca, ma scoprono che per poter partecipare al buffet bisogna trovare un numero n di due cifre uguale alla somma tra il quadrato della cifra delle decine e il cubo della cifra delle unità. *Determinare la somma di tutti i numeri con queste proprietà.*

3. Visita alla nave

Summy Suy Deevysori, la direttrice della crociera, conduce il gruppo di visitatori alla scoperta delle meraviglie della nave: le piscine ottagonali, la stanza dei rompicapo, la palestra della mente e si ferma davanti ad uno stretto corridoio $2\,m \times 6\,m$ che deve ancora essere piastrellato. Summy invita a tassellarlo completamente usando solo materassini da $1\,m \times 2\,m$ o da $1\,m \times 3\,m$, senza sovrapposizioni. *In quanti modi diversi possono raggiungere l'obiettivo?*

4. Biglietto da visita

Summy li saluta dando loro il biglietto da visita del Capitano Kronecker. Sul biglietto è scritta un'espressione letterale. Fredmath osserva che l'espressione è un polinomio e la somma dei coefficienti è 2. Vennma fa notare a tutti che il polinomio calcolato nel doppio NON è uguale al doppio del polinomio. La differenza è il doppio del quadrato della variabile diminuito di 1. Allora Daϕne annota $p(2\text{❀}) = 2p(\text{❀}) + 2\text{❀}^2 - 1$.

Summy ricorda che per poter incontrare il Capitano Kronecker dovranno trovare il valore del polinomio calcolato in 2024. *Quale numero permetterà loro di incontrare il capitano?*

5. Il quesito del capitano

Arrivati dal Capitano Kronecker, egli esordisce dicendo "Come avrete capito dal mio biglietto da visita sono un appassionato di polinomi. Uno dei miei quesiti preferiti è: quanto vale il più grande coefficiente dispari nello sviluppo di $(x+y)^{13}$?" *Quanto vale la risposta?*

6. Incontri inquietanti

Scoobe-Zout ha incontrato sulla nave un tizio con l'impermeabile dall'aria un po' inquietante. Immediatamente fugge e salta tra le braccia di S-Higgs che vedendolo così spaventato decide di costruirgli un amuleto per proteggerlo. All'inizio S-Higgs prende un cubo di legno di $10000\,mm^3$. Tuttavia, poiché Scoobe-Zout preferisce gli ottaedri, S-Higgs usa il suo seghetto di precisione e taglia il cubo ottenendo un ottaedro che ha per vertici i centri delle facce del cubo. Finita l'operazione, però, Scoobe-Zout gli ricorda che nella tradizione inca gli ottaedri sono maledetti. Allora, di tutta fretta, S-Higgs ri-taglia l'ottaedro ottenendo un cubo che ha per vertici i centri delle facce dell'ottaedro. *Quanto vale, in millimetri cubi, il volume dell'amuleto?*

7. Per un tuffo in piscina!
Fredmath non vede l'ora di disfare la valigia e mettersi il costume, ma arrivato alla camera scopre che per entrare deve digitare una combinazione: un numero n di esattamente 4 cifre, tutte diverse da zero, tale che $n = a^a + b^b + c^c + d^d$ dove a, b, c, d sono rispettivamente le cifre delle migliaia, delle centinaia, delle decine e delle unità di n. *Qual è la combinazione agognata?*

8. Sbirciando problemi
Vennma arriva vicino alla piscina per incontrare Fredmath, ma si distrae notando che ci sono un po' di persone che chiacchierano sulle sdraio. Riesce a sbirciare un foglio dove legge: "Dato ABC un triangolo con $AB = 1$ e $AC = 2$, sia Γ la sua circonferenza circoscritta, di centro O. Siano D e S rispettivamente le intersezioni dell'altezza da A e del prolungamento di AO con Γ. Inoltre AO interseca la retta BC in E. Sapendo che la circonferenza passante per D, E, S tange la retta BC, determinare 1000 BC". Vennma si avvicina al gruppo ed esclama "Beh, ma è facile, la soluzione è..." ma viene subito zittita da una persona: "Per favore, lasciate risolvere qualche enigma anche a noi!!". *Qual è la soluzione dell'enigma?*

9. Partitina a carte
I genitori di Fredmath stanno giocando con un mazzo di 9 carte numerate da 1 a 9. Summy si avvicina, prende 4 carte e chiede: "Quanti sono i diversi modi di ordinare queste carte?", Scoobe-Zout risponde: "Scambiando la posizione delle 4 carte si possono ottenere 24 numeri di 4 cifre, tutti diversi." Allora S-Higgs chiede: "E se li sommassi tutti e 24 che numero otterrei?" Vennma osserva prontamente: "Dipende dalle carte, ma moltiplicando questa somma per un numero di esattamente tre cifre è possibile ottenere un quadrato perfetto n^2."

Al variare della scelta delle 4 carte iniziali, quanto vale al massimo n?

10. Mandala extra-large
Sul ponte della nave c'è un gigantesco pannello formato da 2024×2024 caselle, inizialmente bianche, con il titolo "Keep calm and color on". Vennma e Daϕne per rilassarsi iniziano a colorarle a turno: Vennma con il blu e Daϕne con il rosso. Vennma seleziona a caso una casella qualsiasi della griglia e la colora. Poi Daϕne sceglie un quadrato 2×2 contenente la casella appena colorata e colora le 3 caselle ancora bianche. Dopodiché Vennma sceglie un quadrato 3×3 contenente tutte e 4 le caselle già scelte e colora le 5 restanti. Continuano così, alternandosi, fino al 2024-esimo passaggio, in cui Daϕne colora le ultime 4047 caselle bianche. Quante sono le possibili colorazioni finali della griglia?

Fornire come risposta la somma degli esponenti della fattorizzazione in fattori primi.

11. L'anello degli indovinelli
Sulla terrazza scoperta c'è un percorso ad anello formato da 20 caselle numerate in ordine da 1 a 20. Fredmath vuole giocare e si posiziona sulla casella 1, lancia un classico dado gigante a 6 facce e avanza di quanto indicato; gli viene posto un indovinello, se risponde correttamente comincia un nuovo turno tirando il dado, se sbaglia, invece, torna indietro di 2 caselle e poi comincia un nuovo turno tirando il dado. Può fare tutti i turni che vuole: è solo una sfida con se stessi. Sapendo che tutti gli indovinelli sono facili per lui e risponde correttamente a tutti, tranne a quello della casella 6, *quante sono le possibili sequenze di 4 lanci del dado per le quali Fredmath torna esattamente sulla casella 1?*

12. Evviva la cena!
C'è un tavolo pieno di deliziosi salatini. Il cameriere deve distribuire i salatini ai 6 ospiti: prima a S-Higgs che è il più affamato, poi a Fredmath, a sua madre, a suo padre, a Vennma e infine a Daϕne. Prepara le porzioni con un elaborato cerimoniale: dà un salatino a Scoobe-Zout e la metà dei salatini restanti al primo ospite; poi dà due salatini a Scoobe-Zout e $\frac{2}{3}$ dei rimanenti al secondo ospite e continua così dando k salatini a Scoobe-Zout e $\frac{k}{k+1}$ dei rimanenti al k-esimo ospite. S-Higgs sta per addentare il suo primo salatino, ma il cameriere lo ferma e gli dice: "Sono riuscito a fare tutte le suddivisioni senza resti, senza dividere i salatini e tutti ne hanno ricevuto almeno uno. Indovina un po' quanti salatini ho distribuito?" *Qual era il numero minimo di salatini inizialmente sul tavolo?*

13. Conto alla rovescia
Durante la cena Summy presenta a tutti lo spettacolo di Mr MeeStern-Volmer, era lui il tizio inquietante. Durante lo spettacolo Mr MeeStern-Volmer scandisce con voce ritmata che: "Il rovescio di un intero positivo è l'intero positivo che si ottiene scrivendo le sue cifre al contrario. Ad esempio, il rovescio di 8267 è 7628 e il rovescio di 15620 è 2651." Dicendo questo ipnotizza tutto l'equipaggio e i passeggeri, tranne Scoobe-Zout e S-Higgs che sono concentrati sul cibo. Per poter interrompere lo stato di trance dovranno trovare il più piccolo intero positivo n tale che n meno il rovescio di n sia uguale a 12345678. *Qual è il numero per uscire dalla trance?*

Appena tutti si svegliano dalla trance, la nave da crociera viene assalita da pirati fantasma, guidati dal Capitan BarbaAlberta: essi rapiscono tutti i passeggeri e fanno affondare la nave, lasciando indietro solo S-Higgs, Fredmath, Vennma, Daϕne e il fido Scoobe-Zout.

14. Verso il nascondiglio di BarbaAlberta [$\star\star$]

Per andare dal punto del naufragio al nascondiglio segreto di BarbaAlberta si seguono i lati delle caselle di una griglia di 2024×2024 quadretti. La nave pirata segue un percorso, il gruppo di Scoobe-Zout un altro. Sapendo che entrambe le compagini sono partite insieme da un vertice della griglia e arriveranno al vertice opposto seguendo un percorso minimo, se avessero scelto a caso i due percorsi, quale sarebbe stata la probabilità che i loro percorsi avessero come punti in comune solo quello iniziale e quello finale? *Rispondere con la somma di numeratore e denominatore della frazione ridotta ai minimi termini.*

15. Ciurma, all'arrembaggio!

Arrivati al nascondiglio di BarbaAlberta, nemmeno il tempo di guardarsi attorno, che arriva anche il vascello pirata. Su di esso c'è il capitano BarbaAlberta e altri 2024 pirati, che per comodità sono numerati da 1 a 2024; al pirata m BarbaAlberta assegna un numero razionale positivo a_m in modo tale che, per $m = 31, 32, \dots, 2024$, si abbia

$$a_m = \frac{m^2}{\max_{1 \le l \le 30}\{l + a_{m-l}\}}.$$

I pirati tali che $a_m > m$ vengono spediti dal capitano in missione a catturare gli intrusi. Quanti sono i pirati mandati in missione? *Fornire la somma di tutte le possibili risposte.*

16. La cabina di BarbaAlberta [$\star\star$]

Vennma pensa: "BarbaAlberta sta nascondendo qualcosa: non posso aver visto degli aerei della Prima guerra mondiale volare sopra di noi". Indaga allora con Daϕne sottocoperta fino a trovare il lucchetto a combinazione della cabina di BarbaAlberta, recante la scritta "lo spettro di $(x-2)(x+2)(x^2+x+1)(x^2-x+1)$". "Calzante, lo spettro di un polinomio a coefficienti interi per un pirata fantasma!" esclama Daϕne. Vennma riflette: "Sono certa che lo spettro è un numero intero e, sommando gli spettri di tutti i polinomi *figli* di un polinomio p, si ottiene esattamente il valore del polinomio p calcolato nel suo grado!" Allora Daϕne puntualizza: "Certo! E i polinomi *figli* di $p(x)$ sono quelli monici[1] a coefficienti interi che dividono il polinomio e il cui grado divide il grado di $p(x)$. Sorprendentemente ogni polinomio monico è *figlio* di se stesso." *Qual è la combinazione del lucchetto della cabina di BarbaAlberta?*

17. Interrogando le stelle

Per trovare il centro del pentagono delle Permuda devono ritrovare nel cielo le stelle rappresentate in un antico dipinto. Le stelle A, B, C e D formano un quadrilatero in cui $AB = 6$, $BC = 12$, la diagonale $AC = 16$, tale che la diagonale BD bisechi l'angolo $\widehat{ABC}$, e detta E l'intersezione delle diagonali, si abbia $BE \cdot ED = 21$. Si traccino le circonferenze $C1$ e $C2$, circoscritte rispettivamente ai triangoli ABD e BCD. Esse intersecano AC rispettivamente in G e F. Le rette DF e DG intersecano infine i lati AB e BC rispettivamente in X e Y. *Determinare la lunghezza di XY moltiplicata per 100.*

18. Pentagono delle Permuda [$\star$]

Con l'abbassarsi della marea, riaffiorano dalle acque cinque spuntoni di roccia posti ai vertici di un pentagono $ABCDE$ inscritto in una circonferenza di raggio $43\sqrt{3}$. $AB = BC, DE = EA$ e tutti i suoi lati hanno lunghezze espresse da numeri interi. Inoltre $\widehat{BAE} = 120°$. *Quanto vale il perimetro di $ABCDE$?*

19. Ponte temporale [$\star$]

Capitan BarbaAlberta spiega alla sua ciurma che per dominare i sette mari incontrastati devono aprire un portale con il passato. Il passaggio dal presente al passato è un cono con raggio di base $10m$ che scende verso gli abissi; il passaggio dal passato al presente è un cono identico ma ribaltato tale che il suo asse sia parallelo a quello del primo, il cui vertice sta sulla base del primo cono a distanza $6m$ dal centro della base. Considerata l'intersezione dei due coni e la sua proiezione sul piano che contiene la base del primo, il portale si attiva solo trovando l'area della regione di piano contenuta nella curva ottenuta tramite la proiezione. *Quale numero attiverà il portale?*

20. Lo scontro finale

Gli scheletri pirati sono ancora alle prese con la geometria solida quando ecco nel cielo apparire una nave aliena: sono Daϕne e Fredmath mascherati. Daϕne e BarbaAlberta iniziano il duello finale che consiste in questo gioco: si parte con una coppia di interi positivi (x, y). La mossa da effettuare ad ogni turno consiste nel cambiare la coppia presente (x, y) con una coppia $(z, y-z)$, dove $1 \le z \le x$; il secondo numero, però, non può mai diventare negativo. Vince chi per primo riesce a cambiare la coppia in modo che il secondo numero sia 0. *Per quante coppie iniziali con $1 \le x, y \le 100$ Daϕne ha una strategia vincente, sapendo che inizia per prima?*

[1] un polinomio si dice monico se il coefficiente del termine di grado massimo è uguale ad 1.

21. L'ultimo enigma

Scoobe-Zout e i suoi amici hanno smascherato Mr MeeStern-Volmer e la sua messa in scena: attraverso l'ipnosi aveva arruolato i passeggeri come spettri pirata per impadronirsi dell'oro nascosto nel pentagono. Finita l'avventura, per festeggiare, Summy Suy Deevysori propone un ultimo enigma: calcolare la somma dei *pesi* dei divisori positivi di 2310, dove il *peso* di un numero naturale n è il quoziente tra il quadrato del numero dei divisori positivi di n e il numero n stesso. Qual è la soluzione dell'ultimo enigma di Summy? *Rispondere con la somma di numeratore e denominatore della frazione ridotta ai minimi termini.*

XXV Gara Nazionale a Squadre

Finale Nazionale – Sabato 4 Maggio 2024

Ministero dell'Istruzione e del Merito

Soluzioni

Nr.	Problema	Soluzione
1	Una crociera di relax	8925
2	Cocktail di Benvenuto	0106
3	Visita alla nave	0030
4	Biglietto da visita	6577
5	Il quesito del capitano	1287
6	Incontri inquietanti	0370
7	Per un tuffo in piscina!	3435
8	Sbirciando problemi	2236
9	Partitina a carte	6666
10	Mandala extra-large	4046
11	L'anello degli indovinelli	0028
12	Evviva la cena!	0079
13	Conto alla rovescia	6080
14	Verso il nascondiglio di BarbaAlberta [⋆⋆]	8095
15	Ciurma, all'arrembaggio!	2820
16	La cabina di BarbaAlberta [⋆⋆]	2530
17	Interrogando le stelle	0802
18	Pentagono delle Permuda [⋆]	0417
19	Ponte temporale [⋆]	0062
20	Lo scontro finale	9724
21	L'ultimo enigma	0028

Unione Matematica Italiana

XXV Gara Nazionale a Squadre

Finale Nazionale – Sabato 4 Maggio 2024

Ministero dell'Istruzione e del Merito

- Per ogni problema, indicare sul cartellino delle risposte un intero compreso tra 0000 e 9999.
- Se la quantità richiesta non è un numero intero, dove non indicato diversamente, si indichi la sua parte intera.
- Se la quantità richiesta è un numero negativo, oppure se il problema non ha soluzione, si indichi 0000.
- Se la quantità richiesta è maggiore di 9999, si indichino le ultime quattro cifre della sua parte intera.
- I problemi più impegnativi (a nostro giudizio) sono contrassegnati da una o più stelle [$\star$].
- Nello svolgimento dei calcoli può essere utile tener conto dei seguenti valori approssimati:

$$\sqrt{2} = 1.4142 \qquad \sqrt{3} = 1.7321 \qquad \sqrt{5} = 2.2361 \qquad \sqrt{7} = 2.6458 \qquad \pi = 3.1416.$$

Scadenze importanti

- **10 minuti dall'inizio**: termine per la scelta del problema Jolly (dopo verrà dato d'ufficio il primo problema).
- **30 minuti dall'inizio**: termine per rivolgere domande sul testo.
- **120 minuti dall'inizio**: termine della gara.

1. Non si smette mai di imparare

Vennma, Daϕne, Fredmath, S-Higgs con il loro fidato amico Scoobe-Zout sono in viaggio per raggiungere i genitori di Fredmath e partire per una rilassante crociera per festeggiare il suo compleanno. Durante il viaggio, tra una chiacchiera e l'altra, Vennma disegna sul suo quadernino un rettangolo $ABCD$ con $AB = 20\,mm$ e $BC = 40\,mm$. Sulla diagonale AC costruisce un rettangolo in modo tale che AC sia un lato ed il lato ad esso opposto passi per B. Allo stesso modo su BD costruisce un rettangolo passante per A. Daϕne prende il rossetto e colora tutta la figura e infine esclama: "Ora è molto meglio!". *Calcolare l'area colorata ovvero l'area dell'unione dei tre rettangoli.*

2. Viva il mare

Summy li saluta dando loro il biglietto da visita del Capitano Kronecker. Sul biglietto è scritta un'espressione letterale. Fredmath osserva che l'espressione è un polinomio e la somma dei coefficienti è 2. Vennma fa notare a tutti che il polinomio calcolato nel doppio NON è uguale al doppio del polinomio. La differenza è il doppio del quadrato della variabile diminuito di 1. Allora Daϕne annota $p(2❀) = 2p(❀) + 2❀^2 - 1$.

Summy ricorda che per poter incontrare il Capitano Kronecker dovranno trovare il valore del polinomio calcolato in 12. *Quale numero permetterà loro di incontrare il capitano?*

3. Domande scomode

Vennma è appassionata di coincidenze numeriche e nota che 2024 è divisibile per 23. Si chiede allora quali siano gli interi tra 2001 e 2099, diciamo $20ab$, che sono divisibili per $ab-1$ (nel senso di $10a+b-1$). Daϕne risponde prontamente con la somma di tali numeri: qual è?

4. Osso sepolto

Un giorno Scoobe-Zout, mentre scava per recuperare un osso seppellito da tempo, trova un foglietto con un polinomio a coefficienti interi $p(x)$. Non si legge quasi niente, tranne che $p(1) = 7$ e $p(2) = 15$. S-Higgs si chiede: "Quale può essere il più grande intero che divide sicuramente $p(2024)$?"

5. Il palombaro

Il cattivo palombaro cercando di scappare da Fredmath, sul fondo del mare trova delle incisioni di una civiltà azteca. Tale lingua ha un alfabeto di 7 caratteri. Il palombaro calcola quante siano le scritture di 7 caratteri, eventualmente ripetuti, che abbiano esattamente 210 anagrammi. Che risultato ha ottenuto?

6. Una funzione mistica

Fredmath non capisce come calcolare il termine a_n della successione su cui sta indagando Vennma. Lei gli risponde che basta prendere l'opposto della somma dei termini a_d con d divisore positivo di n e più piccolo strettamente di n. "Sì, ma da dove si parte?" chiede Fredmath. "Da $a_1 = 1$, ovviamente!" risponde Vennma e conclude con il quesito: "Noi dobbiamo calcolare la somma dei prodotti $n \cdot a_n^{2024}$ per n da 1 a 100." Quanto vale?

7. Labirinto misterioso

Il labirinto dove si sono intrufolati Scoobe-Zout e S-Higgs mentre scappavano dalla mummia ha la forma di una tabella 2024×2024. Presi dal panico, scelgono a caso un percorso più breve possibile, muovendosi nelle caselle della tabella, dall'angolo $(1,1)$ all'angolo $(2024, 2024)$. Se toccano una casella di coordinate $(k, k+2)$ per qualche k rimangono intrappolati e la mummia li cattura. Qual è la probabilità che riescano a scappare?

Rispondere con la somma di numeratore e denominatore della frazione ridotta ai minimi termini.

8. Vela in lontananza

Fredmath avvista una barca alla deriva. Essa ha una vela con forma di un quadrilatero $ABCD$ inscrivibile in una circonferenza ha le diagonali che si incontrano in E. Fredmath osserva che $A\hat{E}B = 60$ gradi, $AB = 80$, $BC = 85$ e $CD = 19$. Qual è la lunghezza di DA?

9. Mistero triplo

I nostri eroi incappano in tre misteri collegati tra loro. Daϕne si imbatte nel primo: una successione definita per ricorrenza tale che $a_1 = 1$ e $3a_n = 3a_{n-1} + 10n^4 - 20n^3 + 23n^2 - 13n + 3$. Vennma trova il mistero numero due: una successione definita da $b_n = a_1 + \cdots + a_n$. Infine Fredmath fronteggia il terzo: un'altra successione data da $c_n = \sqrt{b_n}$. Per risolvere il triplo mistero devono dichiarare quanto valgono le ultime 4 cifre di c_{2024}. Cosa rispondono?

10. Al luna park

Mentre vaga per il luna park, Scoobe-Zout vede una ruota panoramica che è formata da 10 punti su una circonferenza, in modo che per ogni coppia di questi punti ci sia una trave a forma di segmento. Scoobe-Zout nota che non ci sono 3 travi passanti per uno stesso punto (interno alla trave). S-Higgs allora si mette a contare il numero di triangoli tracciati da una terna di travi. Quanti ne vede in tutto?

11. I fantasmi

Camminando per le strade di Mathville, S-Higgs incontra una successione di n fantasmi ciascuno recante un numero (sovran)naturale $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Il numero x_i, per $i = 2, \ldots, n$, ha i cifre ed è ottenuto da x_{i-1} aggiungendo una cifra a sinistra (come ad esempio $3, 23, 723, 6723$, se $n = 4$).

Preso dalla disperazione, S-Higgs calcola il prodotto degli n interi. Sapendo che ha ottenuto un numero di 4, 5 o 6 cifre, quanti sono i possibili risultati trovati?

12. Giocando col destino

Dentro la tana del mostro misterioso Fredmath trova delle figure alquanto strane. Esse sono dei poliedri convessi, senza facce complanari, che hanno come facce solo triangoli equilateri di lato 1. Ne trova una per tipo, quante sono?