



MINISTERO DELL'ISTRUZIONE E DEL MERITO

UNIONE MATEMATICA ITALIANA

# I Giochi di Archimede

- Gara Biennio -

27 novembre 2025



211

1. Qual è il valore di  $\frac{10^{2025} + 10^{2026} + 10^{2027}}{10^{2025} + 10^{2025} + 10^{2025}}$ ?

(A) 100/3 (B) 100 (C) 111 (D) 101 (E) 37

Risposta corretta: (E).

Si ha  $\frac{10^{2025} + 10^{2026} + 10^{2027}}{10^{2025} + 10^{2025} + 10^{2025}} = \frac{10^{2025} \cdot (1 + 10 + 10^2)}{10^{2025} \cdot (1 + 1 + 1)} = \frac{111}{3} = 37$

□

2. Sapendo che  $2x + 1 = 5x + 6$ , qual è il valore di  $1 - 6x$ ?

(A) 8 (B) 11 (C) 9 (D) 10 (E) 7

Risposta corretta: (B).

Si ricava che  $x = -\frac{5}{3}$ , da cui  $1 - 6 \cdot (-\frac{5}{3}) = 11$ .

□

3. Una scatola contiene 30 biglie rosse. Laura aggiunge altre biglie nella scatola, di colore giallo. Quante biglie gialle deve aggiungere, come minimo, perché le biglie gialle siano più del 20% del totale?

(A) 10 (B) 9 (C) 7 (D) 8 (E) 6

Risposta corretta: (D).

Si vede che non è sufficiente aggiungere 7 biglie gialle, dato che  $\frac{7}{37} < \frac{1}{5}$ . Invece 8 sono sufficienti, dal momento che  $\frac{8}{38} > \frac{1}{5}$ . Aggiungendone un numero maggiore, la percentuale di gialle sarà ancora più elevata.

□

4. Roberta scrive per esteso il numero  $n = 10^{2025} + 10^{803} + 3^4 + 2^5$ .

Qual è la somma di tutte le cifre di  $n$ ?

(A) 7 (B) 2837 (C) 2025 (D) 9 (E) 115

Risposta corretta: (A).

Visto che  $3^4 + 2^5 = 81 + 32 = 113$ , la scrittura di  $n$  ha un aspetto del tipo 100.....00100.....00113 (dove i puntini indicano cifre tutte uguali a 0). La somma delle cifre è dunque 7. □

5. Nel triangolo  $ABC$ , gli angoli  $\hat{A}$  e  $\hat{B}$  sono uguali, mentre  $\hat{C}$  è il quadruplo di  $\hat{A}$ . Sapendo che l'altezza uscente da  $C$  è di 24 cm, quanti cm misura il lato  $BC$ ?

(A) 36 (B) 40 (C) 48 (D) 45 (E) 60

Risposta corretta: (C).

Dalle informazioni si ha che  $ABC$  è un triangolo isoscele. Inoltre  $\hat{A}$  e  $\hat{B}$  saranno pari a  $\frac{1}{6}$  di un angolo piatto, ossia  $\hat{A} = \hat{B} = 30^\circ$  e  $\hat{C} = 120^\circ$ . Indicando con  $C'$  il punto medio di  $AB$ , che è anche il punto in cui cade l'altezza da  $C$ , il triangolo  $BCC'$  ha quindi angoli di  $30^\circ$ ,  $60^\circ$  e  $90^\circ$ . Si conclude che  $BC$  è il doppio di  $CC'$ , vale a dire 48 cm. □

6. Consideriamo i numeri  $2025$ ,  $2025^2$ ,  $2025^3$ , ...,  $2025^{2025}$ , ossia tutte le potenze del tipo  $2025^n$  con  $1 \leq n \leq 2025$ . Quanti di essi sono quadrati di numeri interi?

(A) 2025 (B) 45 (C) nessuno (D) 1012 (E) 145

Risposta corretta: (A).

Poiché  $2025 = 3^4 \cdot 5^2 = 45^2$ , si ha  $2025^n = 45^{2n} = (45^n)^2$ . Le potenze di 2025 sono dunque tutti quadrati. □

7. Marco ha un sacchetto con 16 caramelle alla menta, che vuole condividere con tre amici e con suo cugino. Ciascuno di loro, compreso Marco stesso, dovrà ricevere almeno una caramella; inoltre, per non creare malumori, i tre amici di Marco dovranno ricevere lo stesso numero di caramelle. In quanti modi Marco potrà fare la suddivisione?

(A) 27 (B) 32 (C) 26 (D) 30 (E) 28

Risposta corretta: (D).

I tre amici potranno ricevere in tutto o 3 o 6 o 9 o 12 caramelle, per cui Marco e il cugino avranno, rispettivamente, 13 o 10 o 7 o 4 caramelle, che potranno dividersi, rispettivamente, in 12 oppure 9 oppure 6 oppure 3 modi. Le possibilità sono quindi  $12 + 9 + 6 + 3 = 30$ . □

8. Sofia sta facendo l'elenco di tutti i numeri naturali minori di 1000 che si possono scrivere con le sole cifre 1, 3, 4, 5, 7 (anche ripetute). Quanti tra questi saranno numeri dispari?  
 (A) 108 (B) 104 (C) 112 (D) 96 (E) 124

Risposta corretta: (E).

L'ultima cifra deve essere o 1 o 3 o 5 o 7: ci sono quindi 4 possibili scelte. Le altre cifre sono invece libere (5 scelte). Contiamo i numeri elencati:

- quelli di 3 cifre sono  $5 \cdot 5 \cdot 4 = 100$ ;
- quelli di 2 cifre sono  $5 \cdot 4 = 20$ ;
- quelli di 1 cifra sono 4.

In tutto si hanno quindi  $100 + 20 + 4 = 124$  numeri.  $\square$

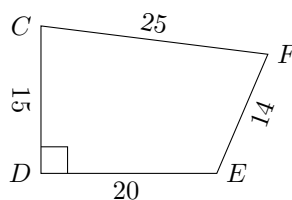
9. Un uomo e i suoi due figli hanno in tutto 96 anni. Quattro anni fa, il figlio maggiore aveva la metà degli anni del padre e il doppio degli anni del fratello. Che numero si ottiene se si moltiplicano le età attuali dei due figli?  
 (A) 384 (B) 288 (C) 480 (D) 432 (E) 448

Risposta corretta: (E).

Osserviamo che 4 anni fa il totale delle tre età era di  $96 - 3 \cdot 4 = 84$  anni, uguale a 7 volte l'età del minore. Pertanto l'età del figlio minore è uguale a  $84/7 = 12$ . Le età dei due fratelli erano dunque 12 e 24, quindi le età attuali sono 16 e 28, il cui prodotto è 448.  $\square$

10. Nel quadrilatero  $CDEF$ , i lati  $CD$  e  $DE$  sono tra loro perpendicolari. Le lunghezze (in mm) dei lati sono le seguenti:  $\overline{CD} = 15$ ,  $\overline{DE} = 20$ ,  $\overline{EF} = 14$ ,  $\overline{FC} = 25$ . Quanti  $\text{mm}^2$  misura l'area del quadrilatero  $CDEF$ ?

- (A) 324 (B) 318 (C) 306 (D) 308 (E) 304



Risposta corretta: (B).

Dal teorema di Pitagora nel triangolo  $CDE$ , si ricava che  $\overline{CE} = 25$  mm. Il triangolo  $CEF$  è quindi isoscele. Per stabilirne l'area, possiamo calcolare l'altezza uscente da  $C$ , che, ancora per il teorema di Pitagora, misura  $\sqrt{25^2 - 7^2} = 24$  mm. Le aree dei triangoli  $CDE$  e  $CEF$  misurano dunque  $15 \cdot 20/2 = 150 \text{ mm}^2$  e  $14 \cdot 24/2 = 168 \text{ mm}^2$ . L'area complessiva è perciò di  $150 + 168 = 318 \text{ mm}^2$ .  $\square$

11. Scegliendo a caso due diversi vertici di un cubo, qual è la probabilità che il segmento che li unisce passi per il centro del cubo?  
 (A)  $1/8$  (B)  $1/4$  (C)  $1/7$  (D)  $1/56$  (E)  $1/64$

Risposta corretta: (C).

Dopo avere scelto un primo vertice  $V$ , il segmento passerà per il centro se e solo se il secondo vertice è quello opposto a  $V$ . Visto che i vertici diversi da  $V$  sono 7, la probabilità richiesta è pertanto  $1/7$ .  $\square$

12. Nell'isola dei cavalieri e dei furfanti, ciascun abitante o è un cavaliere (che dice sempre la verità) o è un furfante (che mente sempre). La classe di Luigi è formata da 21 alunni in tutto. Il suo compagno di banco Mario dichiara: “nella nostra classe ci sono precisamente 12 cavalieri”. Altri 9 compagni affermano poi: “Luigi è un cavaliere”, gli altri 10 dicono invece: “Luigi è un furfante”. Luigi preferisce non sbilanciarsi e resta in silenzio. Quanti sono i cavalieri presenti nella classe?  
 (A) non si può stabilire (B) 9 (C) 12 (D) 10 (E) 11

Risposta corretta: (D).

Se Luigi è un cavaliere, i 9 compagni dicono il vero dunque sono anch'essi cavalieri, mentre gli altri 10 mentono e sono furfanti. Se invece Luigi è un furfante, i 9 sono furfanti e gli altri 10 sono cavalieri. In entrambi i casi, tra quei 20, compreso Luigi, ci sono 10 cavalieri e 10 furfanti. Mario quindi mente senz'altro ed è un furfante, dato che, se egli fosse un cavaliere, vi sarebbero 11 e non 12 cavalieri (diversamente da quanto egli afferma). In conclusione, la classe è formata da 10 cavalieri e 11 furfanti (e Mario, da bravo furfante, sta in effetti mentendo).  $\square$

13. Il numero reale  $k$  soddisfa la relazione  $-1 < k < 0$ . Si può concludere che ...  
 (A)  $k < k^3 < k^2$   
 (B)  $k < k^2 < k^3$   
 (C)  $k^2 < k < k^3$   
 (D)  $k^3 < k^2 < k$   
 (E)  $k^3 < k < k^2$

Risposta corretta: (A).

Scegliendo, ad esempio,  $k = -\frac{1}{2}$ , si ha  $k^2 = \frac{1}{4}$  e  $k^3 = -\frac{1}{8}$ . Perciò, in questo caso, risulta  $k < k^3 < k^2$ . Questo prova che le risposte diverse da (A) sono sbagliate. Non è difficile vedere che la relazione  $k < k^3 < k^2$  è invece vera per qualsiasi scelta di  $k$  con  $-1 < k < 0$ . Infatti,  $k^2$  è positivo mentre  $k$  e  $k^3$  sono negativi, dunque  $k^2$  è senz'altro maggiore di entrambi. Inoltre, essendo  $k^2 < 1$ , si ha  $k \cdot k^2 > k \cdot 1$ , ossia  $k^3 > k$ .  $\square$

14. Giacomo sta scrivendo, in ordine alfabetico, tutti i possibili anagrammi della parola PUNTO. Quale posizione occupa la parola PUNTO in questo elenco?

(A) la 57<sup>a</sup> (B) la 56<sup>a</sup> (C) la 65<sup>a</sup> (D) la 66<sup>a</sup> (E) la 68<sup>a</sup>

Risposta corretta: (E).

Contiamo quante parole precedono PUNTO. La prima dell'elenco è NOPTU.

Le parole che iniziano per N corrispondono ai possibili anagrammi della parola OPTU, che sono in tutto  $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ . Seguono poi le parole che iniziano per O, che saranno ancora 24 (gli anagrammi di NPTU).

Tra le parole con iniziale P, tutte quelle che iniziano con PN, con PO o con PT precedono PUNTO. Ciascuno di questi 3 gruppi è costituito da  $3 \cdot 2 = 6$  parole, quindi abbiamo altre  $3 \cdot 6 = 18$  parole che precedono PUNTO.

Supponendo che le prime due lettere siano PU, per precedere la parola PUNTO la terza deve poi essere per forza N.

Infine, tra quelle che iniziano con PUN, prima di PUNTO c'è ancora la parola PUNOT.

Nel complesso, le parole che precedono PUNTO sono quindi  $48 + 18 + 1 = 67$ . Significa che PUNTO è la 68<sup>a</sup> parola dell'elenco.  $\square$

15. Elena è impegnata a colorare le facce di un gran numero di cubi. Ha a disposizione 10 colori diversi. In ciascun cubo, vuole colorare 2 facce di un colore e le altre 4 di un altro colore. Quanti cubi, al massimo, potrà colorare in modi tra loro differenti? ((le colorazioni di due cubi vanno considerate uguali se, muovendoli in qualsiasi maniera, essi non appaiono distinguibili dai colori delle facce))

(A) 90 (B) 180 (C) 200 (D) 360 (E) 100

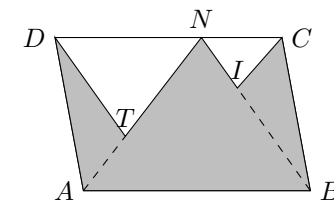
Risposta corretta: (B).

Possiamo distinguere 2 casi:

- le 2 facce dello stesso colore sono opposte;
- le 2 facce dello stesso colore sono confinanti.

In entrambi i casi possiamo scegliere in 10 modi il colore delle 2 facce uguali e in 9 modi quello delle altre 4. Le colorazioni sono pertanto  $2 \cdot 10 \cdot 9 = 180$ , tutte tra loro differenti.  $\square$

16. Nel parallelogramma  $ABCD$ , la cui area è uguale a  $72 \text{ cm}^2$ , consideriamo il punto  $N$  del lato  $CD$  per cui risulta  $DN = 2NC$ . Sia poi  $I$  il punto del segmento  $BN$  per cui si ha  $BI = 2IN$  e sia  $T$  il punto del segmento  $AN$  per cui si ha  $NT = 2TA$ . Quanti  $\text{cm}^2$  misura l'area del poligono  $ABCINTD$  (la superficie ombreggiata nella figura)?



(A) 48 (B) 45 (C) 52 (D) 54 (E) 42

Risposta corretta: (C).

Indicata con  $\mathcal{S}$  l'area  $\mathcal{A}_{ABCD}$  del quadrilatero  $ABCD$ , si ha che  $\mathcal{A}_{ABN} = \frac{\mathcal{S}}{2}$ . Dato che  $CN = \frac{1}{3}CD$ , si ha  $\mathcal{A}_{BCN} = \frac{1}{3}\mathcal{A}_{BCD} = \frac{1}{3}\frac{\mathcal{S}}{2} = \frac{\mathcal{S}}{6}$ . Dal momento che  $BI = \frac{2}{3}BN$ , si ha quindi  $\mathcal{A}_{BCI} = \frac{2}{3}\mathcal{A}_{BCN} = \frac{2}{3}\frac{\mathcal{S}}{6} = \frac{\mathcal{S}}{9}$ . Allo stesso modo, si trova anche che  $\mathcal{A}_{ATD} = \frac{\mathcal{S}}{9}$ . Si conclude che l'area richiesta è uguale a  $(\frac{1}{2} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9})\mathcal{S} = \frac{13}{18}\mathcal{S}$ , ossia  $\frac{13}{18} \cdot 72 = 52 \text{ cm}^2$ .  $\square$