



MINISTERO DELL'ISTRUZIONE E DEL MERITO

UNIONE MATEMATICA ITALIANA

I Giochi di Archimede

- Gara Triennio -

27 novembre 2025



311

1. Sapendo che $(2h - 1)^2 = h(4h + 1)$, qual è il valore di $3h + 1$?

(A) $4/3$ (B) $3/2$ (C) $8/5$ (D) $4/5$ (E) $5/2$

Risposta corretta: (C).

Svolgendo i calcoli si trova $4h^2 - 4h + 1 = 4h^2 + h$, da cui $h = \frac{1}{5}$ e $3h + 1 = \frac{8}{5}$ □

2. Una scatola contiene 40 biglie rosse. Andrea aggiunge altre biglie nella scatola, di colore blu. Quante biglie blu deve aggiungere, come minimo, perché le biglie blu siano più del 25% del totale?

(A) 10 (B) 14 (C) 13 (D) 12 (E) 11

Risposta corretta: (B).

Si vede che non è sufficiente aggiungere 13 biglie blu, dato che $\frac{13}{53} < \frac{1}{4}$. Invece 14 sono sufficienti, dal momento che $\frac{14}{54} > \frac{1}{4}$. Aggiungendone un numero maggiore, la percentuale di blu sarà ancora più elevata. □

3. Consideriamo i numeri 2025^3 , 2025^9 , 2025^{27} , ..., $2025^{(3^{2025})}$, ossia tutte le potenze del tipo $2025^{(3^n)}$ con $1 \leq n \leq 2025$. Quanti di essi sono quadrati di numeri interi?

(A) 2025 (B) nessuno (C) 150 (D) 1012 (E) 75

Risposta corretta: (A).

Poiché $2025 = 3^4 \cdot 5^2 = 45^2$, si ha $2025^k = 45^{2k} = (45^k)^2$. Le potenze di 2025 sono dunque tutti quadrati. □

4. Giulia ha un sacchetto con 17 caramelle alla menta, che vuole condividere con tre amiche e con sua cugina Claudia. Ciascuna di loro, compresa Giulia stessa, dovrà ricevere almeno una caramella; inoltre, per non creare malumori, le tre amiche di Giulia dovranno ricevere lo stesso numero di caramelle. In quanti modi Giulia potrà fare la suddivisione?

(A) 33 (B) 36 (C) 32 (D) 30 (E) 35

Risposta corretta: (E).

Le tre amiche potranno ricevere in tutto o 3 o 6 o 9 o 12 o 15 caramelle, per cui Giulia e la cugina avranno, rispettivamente, 14 o 11 o 8 o 5 o 2 caramelle, che potranno dividersi, rispettivamente, in 13 oppure 10 oppure 7 oppure 4 oppure 1 modi. Le possibilità sono quindi $13 + 10 + 7 + 4 + 1 = 35$. □

5. Alice ha un orologio piuttosto strano. C'è il classico quadrante a 12 ore, con la lancetta delle ore e quella dei minuti. Tuttavia, mentre la lancetta dei minuti si muove come al solito (ruotando in senso *orario*), quella delle ore procede al contrario (in senso *anti-orario*). Quante volte le due lancette si incroceranno nell'arco di una giornata (ossia da mezzanotte alla mezzanotte successiva, considerando sia l'istante iniziale sia l'istante finale)?

(A) 27 (B) 26 (C) 25 (D) 24 (E) 23

Risposta corretta: (A).

Un modo efficace per descrivere la situazione è di utilizzare come riferimento la lancetta delle ore, che quindi in tale riferimento sarà ferma (ad esempio sul semiasse y positivo). La lancetta dei minuti ruoterà, in tale riferimento, alla velocità angolare di 26 giri al giorno: i 24 della lancetta dei minuti più i 2 al contrario di quella delle ore (come vengono visti nel riferimento abituale), compiuti nell'arco della giornata. Questo vuol dire, appunto, che la lancetta dei minuti, nel nuovo sistema di riferimento, compie in un giorno 26 giri attorno alla lancetta delle ore. Considerato che sia nell'istante iniziale sia in quello finale le due lancette sono sovrapposte, gli incroci sono quindi in tutto 27. □

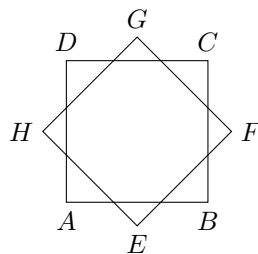
6. Nell'isola dei cavalieri e dei furfanti, ciascun abitante o è un cavaliere (che dice sempre la verità) o è un furfante (che mente sempre). La classe di Dino è formata da 23 alunni in tutto. Il suo compagno di banco Filippo dichiara: "in classe nostra ci sono precisamente 13 furfanti". Altri 10 compagni affermano poi: "Dino è un cavaliere", gli altri 11 dicono invece: "Dino è un furfante". Dino preferisce non sbilanciarsi e resta in silenzio. Quanti sono i cavalieri presenti nella classe?

(A) 12 (B) non si può stabilire (C) 13 (D) 10 (E) 11

Risposta corretta: **(E)**.

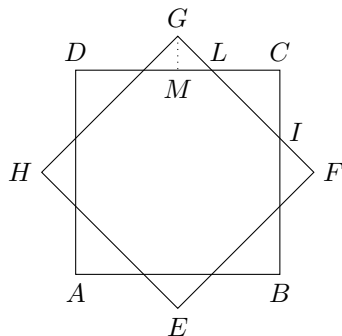
Se Dino è un cavaliere, i 10 compagni dicono il vero dunque sono anch'essi cavalieri, mentre gli altri 11 mentono e sono furfanti. Se invece Dino è un furfante, i 10 sono furfanti e gli altri 11 sono cavalieri. In entrambi i casi, tra quei 22, compreso Dino, ci sono 11 cavalieri e 11 furfanti. Filippo quindi mente senz'altro ed è un furfante, dato che, se egli fosse un cavaliere, vi sarebbero 12 cavalieri e 11 furfanti (diversamente da quanto afferma). In conclusione, la classe è formata da 11 cavalieri e 12 furfanti (e Filippo, da bravo furfante, sta mentendo). \square

7. I lati del quadrato $ABCD$ misurano 3 cm. I lati del quadrato $EFGH$ dividono i lati di $ABCD$ in tre parti uguali. Quanti cm^2 misura l'area di $EFGH$?



- (A) $25/3$ (B) 9 (C) 8 (D) $\frac{16}{3}\sqrt{2}$ (E) $6\sqrt{2}$

Risposta corretta: **(C)**.



Calcoliamo la misura in cm del lato FG . Si ha che $\overline{IL} = \sqrt{2} \cdot \overline{CL} = \sqrt{2}$ ed inoltre $\overline{GL} = \sqrt{2} \cdot \overline{LM} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Dunque risulta $\overline{FG} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$. L'area di $EFGH$ misura quindi $(2\sqrt{2} \text{ cm})^2 = 8 \text{ cm}^2$. \square

8. Enrico sta scrivendo, in ordine alfabetico, tutti i possibili anagrammi della parola NUMERO. Quale posizione occupa la parola NUMERO in questo elenco?

- (A) la 341^a (B) la 344^a (C) la 361^a (D) la 337^a (E) la 336^a

Risposta corretta: **(B)**.

Contiamo quante parole precedono NUMERO. La prima dell'elenco è EMNORU.

Le parole che iniziano per E corrispondono ai possibili anagrammi della parola MNORU, che sono in tutto $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120$. Seguono poi le parole che iniziano per M, che saranno ancora 120 (gli anagrammi di ENORU).

Tra le parole con iniziale N, tutte quelle che iniziano con NE, con NM, con NO o con NR precedono NUMERO. Ciascuno di questi 4 gruppi è costituito da $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ parole, quindi abbiamo altre $4 \cdot 24 = 96$ parole che precedono NUMERO.

Se le prime due lettere sono NU, anche tutte le parole che iniziamo con NUE (che sono $3 \cdot 2 = 6$) precedono NUMERO.

Ancora, se le prime tre lettere sono NUM, al 4° posto deve per forza esserci una E per precedere la parola NUMERO.

Infine, tra quelle che iniziano con NUME, prima di NUMERO c'è ancora la parola NUMEOR.

Nel complesso, le parole che precedono NUMERO sono $2 \cdot 120 + 4 \cdot 24 + 6 + 1 = 343$. Significa che NUMERO è la 344^a parola dell'elenco. \square

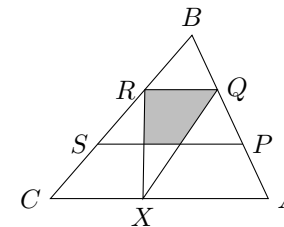
9. Il numero reale k soddisfa la relazione $-1 < k < 0$. Si può concludere che ...

- (A) $\frac{1}{k} < k^2 < k^3 < \frac{1}{k^2}$
 (B) $k < \frac{1}{k} < k^2 < \frac{1}{k^2}$
 (C) $\frac{1}{k} < k^3 < \frac{1}{k^2} < k^2$
 (D) $\frac{1}{k} < k^3 < k^2 < \frac{1}{k^2}$
 (E) $k^3 < \frac{1}{k} < k^2 < \frac{1}{k^2}$

Risposta corretta: **(D)**.

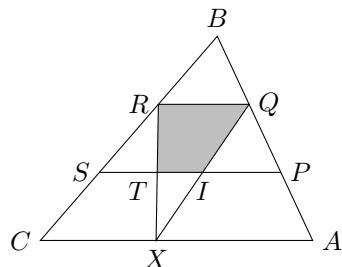
Scegliendo, ad esempio, $k = -\frac{1}{2}$, si ha $\frac{1}{k} = -2$, $\frac{1}{k^2} = 4$, $k^2 = \frac{1}{4}$, $k^3 = -\frac{1}{8}$. Se ne ricava che le risposte diverse dalla (D) sono senz'altro errate. Si può vedere agevolmente che, in effetti, la relazione (D) risulta valida per ogni k con $-1 < k < 0$. \square

10. I lati AB e BC del triangolo ABC sono suddivisi in 3 parti uguali dai punti P , Q e R , S . Si sa che l'area del triangolo ABC è di 120 m^2 . Preso un punto X qualsiasi del lato CA , quanti m^2 misura, come minimo, l'area del quadrilatero ombreggiato?



- (A) $64/3$ (B) 24 (C) 20 (D) 18 (E) $81/4$

Risposta corretta: **(C)**.



Osserviamo che QR è parallelo a CA e che, per il teorema di Talete, $QR = \frac{1}{3}CA$. Inoltre, nel triangolo XQR , l'altezza uscente da X sarà $\frac{2}{3}$ dell'altezza di ABC uscente da B . Ne segue che l'area di XQR è uguale a $\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{9}$ dell'area di ABC , qualunque sia la posizione di X su CA . Per la similitudine dei triangoli XQR e XIT , l'area di XIT è $\frac{1}{4}$ dell'area di XQR , per cui l'area di $IQRT$ è uguale a $\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{9} = \frac{1}{6}$ dell'area di ABC , vale a dire 20 m^2 . \square

11. I numeri naturali a, b, c sono primi e soddisfano la relazione $abc = 3(a+b+c) + 1$. Quale può essere, al massimo, il valore della quantità $5a + 3b + c$?

(A) 79 (B) 73 (C) 75 (D) 71 (E) 77

Risposta corretta: (B).

I numeri a, b, c non possono essere tutti dispari, poiché in tal caso il membro di sinistra sarebbe dispari e quello di destra pari. Essendo numeri primi, uno di essi deve perciò essere 2, per esempio $a = 2$. L'equazione diviene quindi: $2bc = 3(b+c) + 7$. Di nuovo, b e c non possono essere entrambi dispari, dato che, ancora, si avrebbe un numero pari a sinistra e uno dispari a destra. Supponendo, quindi, $b = 2$, si ottiene $4c = 3c + 13$, da cui $c = 13$. Si è pertanto trovata la soluzione $(a, b, c) = (2, 2, 13)$. Essendo simmetrica l'equazione assegnata, anche tutte le permutazioni di tale soluzione soddisfano dell'equazione. Inoltre, per quanto osservato, queste sono le uniche soluzioni. Affinché la quantità $5a + 3b + c$ sia massima, occorre scegliere $(a, b, c) = (13, 2, 2)$, da cui $5a + 3b + c = 73$. \square

12. Michela mette in fila, su un ripiano della sua libreria, 5 libri di narrativa, 3 di poesia e 2 libri fotografici, in maniera del tutto casuale. Qual è la probabilità che i libri di poesia vengano a trovarsi tutti e 3 vicini (senza altri libri in mezzo a loro)?

(A) $1/24$ (B) $1/72$ (C) $1/120$ (D) $3/10$ (E) $1/15$

Risposta corretta: (E).

Associando ad ogni libro di narrativa il simbolo N, ad ogni libro di poesia il simbolo P e ad ogni libro fotografico il simbolo F, a ciascuna disposizione dei 10 libri può essere associata una permutazione della parola NNNNNPPPPF.

Il numero complessivo di tali permutazioni è uguale a $\frac{10!}{5! \cdot 3! \cdot 2!}$. Si tratta di contare in quante di tali permutazioni le 3 P sono consecutive. Questo equivale a considerare la sequenza PPP, come un unico simbolo, per esempio \bar{P} , ossia di contare le permutazioni della parola NNNNN \bar{P} FF, che sono in tutto $\frac{8!}{5! \cdot 1! \cdot 2!}$.

La probabilità richiesta è data quindi dal rapporto $\frac{8!}{5! \cdot 1! \cdot 2!} \bigg/ \frac{10!}{5! \cdot 3! \cdot 2!} = \frac{1}{15}$. \square

13. Giorgio ha una tabella quadrata formata da 4×4 caselle. Vuole disporre delle monete su alcune caselle (non più di una per casella), in modo che ciascuna riga e ciascuna colonna contengano un numero dispari di monete.

Quante sono le possibili configurazioni?

(A) 450 (B) 441 (C) 576 (D) 480 (E) 512

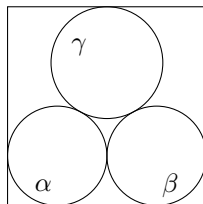
Risposta corretta: (E).

Consideriamo innanzi tutto la prima colonna verticale, nella quale vanno collocate 1 oppure 3 monete. Ci sono 4 modi per collocare 1 moneta e 4 modi per collocarne 3, dunque 8 possibilità in tutto. Vi sono dunque 8^3 modi per sistemare le prime 3 colonne, senza tener conto della quarta. Per sistemare l'ultima colonna (sempre con 1 o 3 monete) occorre tenere conto che anche su ciascuna riga orizzontale deve esserci un numero dispari di monete. Notiamo che, dopo aver sistemato le prime 3 colonne, sulla tabella sarà presente un numero dispari di monete. Perciò, tra le 4 righe orizzontali, un numero dispari di esse deve contenere una quantità dispari di monete e, di conseguenza, un numero dispari di righe deve contenere una quantità pari di monete (0 oppure 2). Per avere su ciascuna riga un numero dispari di monete, occorre collocare una moneta sulle caselle della quarta colonna che appartengono alle righe dove è (al momento) presente un numero pari di monete. Tali caselle, per quanto sopra, sono una quantità dispari (dunque anche la quarta colonna avrà un numero dispari di monete). Così facendo, anche nelle righe corrispondenti ci sarà quindi un numero dispari di monete dopo l'aggiunta delle monete nella quarta colonna. Dal momento che, come visto, il completamento della tabella può essere effettuato in un solo modo dopo aver sistemato in modo arbitrario le prime 3 colonne, si conclude che le configurazioni ammissibili sono tante quante le possibili sistemazioni delle prime 3 colonne, vale a dire 8^3 . \square

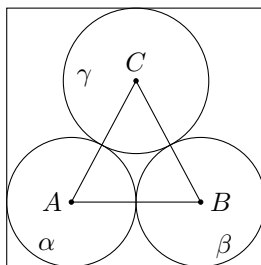
14. Un quadrato di lato 4 cm contiene tre cerchi, tangenti tra loro e tangenti ai lati del quadrato, come nella figura qui a fianco. I cerchi α e β hanno lo stesso raggio.

Quanti cm misura il raggio di γ ?

(A) $7/6$ (B) 1 (C) $5/4$ (D) $9/8$ (E) $10/9$



Risposta corretta: (D).



Le circonferenze congruenti α e β hanno raggio di 1 cm. Tenendo conto che la retta per i centri di due circonferenze tangenti passa per il loro punto di tangenza, si conclude che ABC è un triangolo isoscele (dove A , B , C sono i centri delle tre circonferenze). Si può quindi applicare il teorema di Pitagora al triangolo rettangolo AMC (dove M è il punto medio di AB , vale a dire il punto di tangenza tra α e β). Si avrà dunque $AM^2 + MC^2 = CA^2$, ossia, detto r il raggio di γ (in cm), $1^2 + (3-r)^2 = (r+1)^2$, da cui $8r = 9$ perciò $r = 9/8$. \square

15. Emma è impegnata a colorare le facce di un gran numero di cubi. Ha a disposizione 7 colori diversi. In ciascun cubo, vuole colorare 1 faccia di un colore, altre 2 facce di un altro colore e le altre 3 di un altro colore ancora. Quanti cubi, al massimo, potrà colorare in modi tra loro differenti? ((le colorazioni di due cubi vanno considerate uguali se, muovendoli in qualsiasi maniera, essi non appaiono distinguibili dai colori delle facce))

(A) 630 (B) 840 (C) 420 (D) 1050 (E) 210

Risposta corretta: (A).

Chiameremo 3-gruppo l'insieme delle 3 facce da colorare con lo stesso colore, 2-gruppo quello delle 2 facce da colorare uguali e 1-gruppo la faccia rimanente. In primo luogo, stabiliremo quante sono le configurazioni distinguibili della scelta di 3-gruppo, 2-gruppo e 1-gruppo. Consideriamo prima di tutto le possibili configurazioni del 2-gruppo, che sono 2: o sono 2 facce opposte oppure sono

adiacenti. Nel primo caso (il 2-gruppo formato da 2 facce opposte), c'è una sola possibilità per il 3-gruppo e l'1-gruppo (l'1-gruppo è una delle 4 facce laterali e il 3-gruppo le altre 3; le 4 possibili opzioni sono indistinguibili). Nel secondo caso (il 2-gruppo formato da 2 facce adiacenti), ci sono invece 2 possibilità per la scelta del 3-gruppo e l'1-gruppo: infatti la faccia dell'1-gruppo può essere adiacente ad entrambe le facce del 2-gruppo oppure opposta a una di esse (queste due opzioni danno luogo a diverse configurazioni). Nel complesso, ci sono quindi 3 possibili configurazioni per la scelta di 3-gruppo, 2-gruppo, 1-gruppo, per ciascuna delle quali i 3 colori potranno poi essere scelti in $7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$ modi. Le possibili colorazioni sono quindi $3 \cdot 210 = 630$. \square

16. Il quadrilatero $ABCD$ è inscritto in una circonferenza. Indicato con E il punto d'intersezione tra le diagonali AC e BD , si sa che $AC = 10 AE$ e $BD = 5 BE$. Qual è il rapporto tra la diagonale maggiore e quella minore?

(A) 2 (B) $4/3$ (C) $3/2$ (D) $5/4$ (E) $8/5$

Risposta corretta: (B).

Per comodità, indichiamo con x la misura di AE e con y la misura di BE . In base ai dati forniti, la misura di CE è uguale a $9x$ e quella di DE è $4y$. Per il teorema delle due corde, si ha dunque $x \cdot 9x = y \cdot 4y$, ossia $9x^2 = 4y^2$, da cui $\frac{x}{y} = \frac{2}{3}$. Si conclude pertanto che $\frac{AC}{BD} = \frac{10x}{5y} = 2 \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$. Essendo maggiore di 1, tale valore è il rapporto cercato. \square