Ministero dell'Istruzione e del Merito

Unione Matematica Italiana

I Giochi di Archimede

- Gara Biennio -

211

27 novembre 2025

COGNOME ______________________ NOME ______________________

DATA DI NASCITA ________________ ANNO 1 2 SEZIONE __________

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16

- *La prova è costituita da 16 problemi. Ogni domanda è seguita da 5 risposte indicate con le lettere* **(A)**, **(B)**, **(C)**, **(D)**, **(E)**. *Una sola di queste risposte è corretta, le altre 4 sono sbagliate.*
- *Per ognuno dei problemi, devi trascrivere la lettera corrispondente alla risposta che ritieni corretta nella griglia riportata qui sopra. Non sono ammesse cancellature o correzioni sulla griglia.*
- *Ciascuna risposta corretta vale 5 punti, ciascuna risposta sbagliata vale 0 punti. Ad ogni quesito con risposta lasciata in bianco verrà assegnato 1 punto.*
- *Se per un quesito vengono selezionate più risposte o se la risposta risulta illeggibile o invalida, il quesito sarà considerato errato.*
- *Non è consentito l'uso di alcun tipo di calcolatrice o di strumenti di comunicazione.*

Hai a tua disposizione 100 minuti. Buon lavoro e buon divertimento!

1. Qual è il valore di $\dfrac{10^{2025}+10^{2026}+10^{2027}}{10^{2025}+10^{2025}+10^{2025}}$?

   (A) 100/3 **(B)** 100 **(C)** 111 **(D)** 101 **(E)** 37

2. Sapendo che $2x+1=5x+6$, qual è il valore di $1-6x$?

   (A) 8 **(B)** 11 **(C)** 9 **(D)** 10 **(E)** 7

3. Una scatola contiene 30 biglie rosse. Laura aggiunge altre biglie nella scatola, di colore giallo. Quante biglie gialle deve aggiungere, come minimo, perché le biglie gialle siano più del 20% del totale?

   (A) 10 **(B)** 9 **(C)** 7 **(D)** 8 **(E)** 6

4. Roberta scrive per esteso il numero $n = 10^{2025} + 10^{803} + 3^4 + 2^5$.
   Qual è la somma di tutte le cifre di n?

   (A) 7 **(B)** 2837 **(C)** 2025 **(D)** 9 **(E)** 115

5. Nel triangolo ABC, gli angoli $\widehat{A}$ e $\widehat{B}$ sono uguali, mentre $\widehat{C}$ è il quadruplo di $\widehat{A}$. Sapendo che l'altezza uscente da C è di 24 cm, quanti cm misura il lato BC?

   (A) 36 **(B)** 40 **(C)** 48 **(D)** 45 **(E)** 60

6. Consideriamo i numeri $2025,\ 2025^2,\ 2025^3,\ \dots,\ 2025^{2025}$, ossia tutte le potenze del tipo 2025^n con $1 \leqslant n \leqslant 2025$. Quanti di essi sono quadrati di numeri interi?

   (A) 2025 **(B)** 45 **(C)** nessuno **(D)** 1012 **(E)** 145

7. Marco ha un sacchetto con 16 caramelle alla menta, che vuole condividere con tre amici e con suo cugino. Ciascuno di loro, compreso Marco stesso, dovrà ricevere almeno una caramella; inoltre, per non creare malumori, i tre amici di Marco dovranno ricevere lo stesso numero di caramelle. In quanti modi Marco potrà fare la suddivisione?

   (A) 27 **(B)** 32 **(C)** 26 **(D)** 30 **(E)** 28

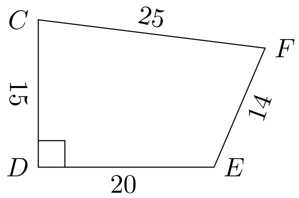
8. Sofia sta facendo l'elenco di tutti i numeri naturali minori di 1000 che si possono scrivere con le sole cifre 1, 3, 4, 5, 7 (anche ripetute). Quanti tra questi saranno numeri dispari?

   (A) 108 **(B)** 104 **(C)** 112 **(D)** 96 **(E)** 124

9. Un uomo e i suoi due figli hanno in tutto 96 anni. Quattro anni fa, il figlio maggiore aveva la metà degli anni del padre e il doppio degli anni del fratello. Che numero si ottiene se si moltiplicano le età attuali dei due figli?

   (A) 384 **(B)** 288 **(C)** 480 **(D)** 432 **(E)** 448

10. Nel quadrilatero $CDEF$, i lati CD e DE sono tra loro perpendicolari. Le lunghezze (in mm) dei lati sono le seguenti: $\overline{CD} = 15$, $\overline{DE} = 20$, $\overline{EF} = 14$, $\overline{FC} = 25$. Quanti mm^2 misura l'area del quadrilatero $CDEF$?



(A) 324 **(B)** 318 **(C)** 306 **(D)** 308 **(E)** 304

11. Scegliendo a caso due diversi vertici di un cubo, qual è la probabilità che il segmento che li unisce passi per il centro del cubo?

(A) 1/8 **(B)** 1/4 **(C)** 1/7 **(D)** 1/56 **(E)** 1/64

12. Nell'isola dei cavalieri e dei furfanti, ciascun abitante o è un cavaliere (che dice sempre la verità) o è un furfante (che mente sempre). La classe di Luigi è formata da 21 alunni in tutto. Il suo compagno di banco Mario dichiara: "nella nostra classe ci sono precisamente 12 cavalieri". Altri 9 compagni affermano poi: "Luigi è un cavaliere", gli altri 10 dicono invece: "Luigi è un furfante". Luigi preferisce non sbilanciarsi e resta in silenzio. Quanti sono i cavalieri presenti nella classe?

(A) non si può stabilire **(B)** 9 **(C)** 12 **(D)** 10 **(E)** 11

13. Il numero reale k soddisfa la relazione $-1 < k < 0$. Si può concludere che ...

(A) $k < k^3 < k^2$
(B) $k < k^2 < k^3$
(C) $k^2 < k < k^3$
(D) $k^3 < k^2 < k$
(E) $k^3 < k < k^2$

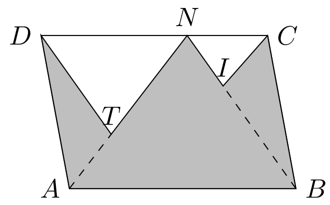
14. Giacomo sta scrivendo, in ordine alfabetico, tutti i possibili anagrammi della parola PUNTO. Quale posizione occupa la parola PUNTO in questo elenco?

(A) la 57^a **(B)** la 56^a **(C)** la 65^a **(D)** la 66^a **(E)** la 68^a

15. Elena è impegnata a colorare le facce di un gran numero di cubi. Ha a disposizione 10 colori diversi. In ciascun cubo, vuole colorare 2 facce di un colore e le altre 4 di un altro colore. Quanti cubi, al massimo, potrà colorare in modi tra loro differenti? ((le colorazioni di due cubi vanno considerate uguali se, muovendoli in qualsiasi maniera, essi non appaiono distinguibili dai colori delle facce))

(A) 90 **(B)** 180 **(C)** 200 **(D)** 360 **(E)** 100

16. Nel parallelogramma $ABCD$, la cui area è uguale a $72\,cm^2$, consideriamo il punto N del lato CD per cui risulta $DN = 2\,NC$. Sia poi I il punto del segmento BN per cui si ha $BI = 2\,IN$ e sia T il punto del segmento AN per cui si ha $NT = 2\,TA$. Quanti cm^2 misura l'area del poligono $ABCINTD$ (la superficie ombreggiata nella figura)?



(A) 48 **(B)** 45 **(C)** 52 **(D)** 54 **(E)** 42

Ministero dell'Istruzione e del Merito

Unione Matematica Italiana

I Giochi di Archimede

- Gara Triennio -

311

27 novembre 2025

COGNOME ______________________ NOME ______________________

DATA DI NASCITA ______________ ANNO 3 4 5 SEZIONE ________

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16

- *La prova è costituita da 16 problemi. Ogni domanda è seguita da 5 risposte indicate con le lettere* **(A)**, **(B)**, **(C)**, **(D)**, **(E)**. *Una sola di queste risposte è corretta, le altre 4 sono sbagliate.*
- *Per ognuno dei problemi, devi trascrivere la lettera corrispondente alla risposta che ritieni corretta nella griglia riportata qui sopra. Non sono ammesse cancellature o correzioni sulla griglia.*
- *Ciascuna risposta corretta vale 5 punti, ciascuna risposta sbagliata vale 0 punti. Ad ogni quesito con risposta lasciata in bianco verrà assegnato 1 punto.*
- *Se per un quesito vengono selezionate più risposte o se la risposta risulta illeggibile o invalida, il quesito sarà considerato errato.*
- *Non è consentito l'uso di alcun tipo di calcolatrice o di strumenti di comunicazione.*

Hai a tua disposizione 100 minuti. Buon lavoro e buon divertimento!

1. Sapendo che $(2h-1)^2 = h(4h+1)$, qual è il valore di $3h+1$?

   (A) $4/3$ **(B)** $3/2$ **(C)** $8/5$ **(D)** $4/5$ **(E)** $5/2$

2. Una scatola contiene 40 biglie rosse. Andrea aggiunge altre biglie nella scatola, di colore blu. Quante biglie blu deve aggiungere, come minimo, perché le biglie blu siano più del 25% del totale?

   (A) 10 **(B)** 14 **(C)** 13 **(D)** 12 **(E)** 11

3. Consideriamo i numeri 2025^3, 2025^9, $2025^{27}, \ldots, 2025^{(3^{2025})}$, ossia tutte le potenze del tipo $2025^{(3^n)}$ con $1 \leqslant n \leqslant 2025$. Quanti di essi sono quadrati di numeri interi?

   (A) 2025 **(B)** nessuno **(C)** 150 **(D)** 1012 **(E)** 75

4. Giulia ha un sacchetto con 17 caramelle alla menta, che vuole condividere con tre amiche e con sua cugina Claudia. Ciascuna di loro, compresa Giulia stessa, dovrà ricevere almeno una caramella; inoltre, per non creare malumori, le tre amiche di Giulia dovranno ricevere lo stesso numero di caramelle. In quanti modi Giulia potrà fare la suddivisione?

   (A) 33 **(B)** 36 **(C)** 32 **(D)** 30 **(E)** 35

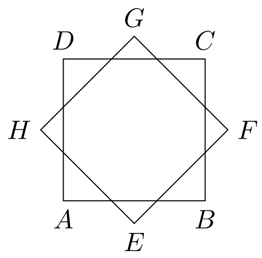
5. Alice ha un orologio piuttosto strano. C'è il classico quadrante a 12 ore, con la lancetta delle ore e quella dei minuti. Tuttavia, mentre la lancetta dei minuti si muove come al solito (ruotando in senso *orario*), quella delle ore procede al contrario (in senso *anti-orario*). Quante volte le due lancette si incroceranno nell'arco di una giornata (ossia da mezzanotte alla mezzanotte successiva, considerando sia l'istante iniziale sia l'istante finale)?

   (A) 27 **(B)** 26 **(C)** 25 **(D)** 24 **(E)** 23

6. Nell'isola dei cavalieri e dei furfanti, ciascun abitante o è un cavaliere (che dice sempre la verità) o è un furfante (che mente sempre). La classe di Dino è formata da 23 alunni in tutto. Il suo compagno di banco Filippo dichiara: "in classe nostra ci sono precisamente 13 furfanti". Altri 10 compagni affermano poi: "Dino è un cavaliere", gli altri 11 dicono invece: "Dino è un furfante". Dino preferisce non sbilanciarsi e resta in silenzio. Quanti sono i cavalieri presenti nella classe?

   (A) 12 **(B)** non si può stabilire **(C)** 13 **(D)** 10 **(E)** 11

7. I lati del quadrato $ABCD$ misurano 3 cm. I lati del quadrato $EFGH$ dividono i lati di $ABCD$ in tre parti uguali. Quanti cm^2 misura l'area di $EFGH$?



   (A) $25/3$ **(B)** 9 **(C)** 8 **(D)** $\frac{16}{3}\sqrt{2}$ **(E)** $6\sqrt{2}$

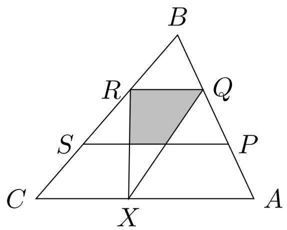
8. Enrico sta scrivendo, in ordine alfabetico, tutti i possibili anagrammi della parola NUMERO. Quale posizione occupa la parola NUMERO in questo elenco?

   (A) la 341^a **(B)** la 344^a **(C)** la 361^a **(D)** la 337^a **(E)** la 336^a

9. Il numero reale k soddisfa la relazione $-1 < k < 0$. Si può concludere che ...

(A) $\frac{1}{k} < k^2 < k^3 < \frac{1}{k^2}$
(B) $k < \frac{1}{k} < k^2 < \frac{1}{k^2}$
(C) $\frac{1}{k} < k^3 < \frac{1}{k^2} < k^2$
(D) $\frac{1}{k} < k^3 < k^2 < \frac{1}{k^2}$
(E) $k^3 < \frac{1}{k} < k^2 < \frac{1}{k^2}$

10. I lati AB e BC del triangolo ABC sono suddivisi in 3 parti uguali dai punti P, Q e R, S. Si sa che l'area del triangolo ABC è di $120\,\mathrm{m}^2$. Preso un punto X qualsiasi del lato CA, quanti m^2 misura, come minimo, l'area del quadrilatero ombreggiato?



(A) 64/3 **(B)** 24 **(C)** 20 **(D)** 18 **(E)** 81/4

11. I numeri naturali a, b, c sono primi e soddisfano la relazione $abc = 3\,(a+b+c)+1$. Quale può essere, al massimo, il valore della quantità $5a + 3b + c$?

(A) 79 **(B)** 73 **(C)** 75 **(D)** 71 **(E)** 77

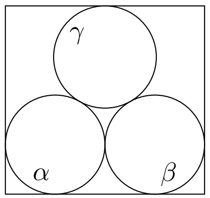
12. Michela mette in fila, su un ripiano della sua libreria, 5 libri di narrativa, 3 di poesia e 2 libri fotografici, in maniera del tutto casuale. Qual è la probabilità che i libri di poesia vengano a trovarsi tutti e 3 vicini (senza altri libri in mezzo a loro)?

(A) 1/24 **(B)** 1/72 **(C)** 1/120 **(D)** 3/10 **(E)** 1/15

13. Giorgio ha una tabella quadrata formata da 4×4 caselle. Vuole disporre delle monete su alcune caselle (non più di una per casella), in modo che ciascuna riga e ciascuna colonna contengano un numero dispari di monete.
Quante sono le possibili configurazioni?

(A) 450 **(B)** 441 **(C)** 576 **(D)** 480 **(E)** 512

14. Un quadrato di lato $4\,\mathrm{cm}$ contiene tre cerchi, tangenti tra loro e tangenti ai lati del quadrato, come nella figura qui a fianco. I cerchi α e β hanno lo stesso raggio.
Quanti cm misura il raggio di γ?



(A) 7/6 **(B)** 1 **(C)** 5/4 **(D)** 9/8 **(E)** 10/9

15. Emma è impegnata a colorare le facce di un gran numero di cubi. Ha a disposizione 7 colori diversi. In ciascun cubo, vuole colorare 1 faccia di un colore, altre 2 facce di un altro colore e le altre 3 di un altro colore ancora. Quanti cubi, al massimo, potrà colorare in modi tra loro differenti? ((le colorazioni di due cubi vanno considerate uguali se, muovendoli in qualsiasi maniera, essi non appaiono distinguibili dai colori delle facce))

(A) 630 **(B)** 840 **(C)** 420 **(D)** 1050 **(E)** 210

16. Il quadrilatero $ABCD$ è inscritto in una circonferenza. Indicato con E il punto d'intersezione tra le diagonali AC e BD, si sa che $AC = 10\,AE$ e $BD = 5\,BE$. Qual è il rapporto tra la diagonale maggiore e quella minore?

(A) 2 **(B)** 4/3 **(C)** 3/2 **(D)** 5/4 **(E)** 8/5

MINISTERO DELL'ISTRUZIONE E DEL MERITO

UNIONE MATEMATICA ITALIANA

I Giochi di Archimede

- Gara Biennio -

211

27 novembre 2025

1. Qual è il valore di $\dfrac{10^{2025}+10^{2026}+10^{2027}}{10^{2025}+10^{2025}+10^{2025}}$?
   (A) 100/3 **(B)** 100 **(C)** 111 **(D)** 101 **(E)** 37

   Risposta corretta: **(E)**.
   Si ha $\dfrac{10^{2025}+10^{2026}+10^{2027}}{10^{2025}+10^{2025}+10^{2025}} = \dfrac{10^{2025}\cdot(1+10+10^2)}{10^{2025}\cdot(1+1+1)} = \dfrac{111}{3} = 37$ □

2. Sapendo che $2x+1 = 5x+6$, qual è il valore di $1-6x$?
   (A) 8 **(B)** 11 **(C)** 9 **(D)** 10 **(E)** 7

   Risposta corretta: **(B)**.
   Si ricava che $x = -\frac{5}{3}$, da cui $1 - 6\cdot(-\frac{5}{3}) = 11$. □

3. Una scatola contiene 30 biglie rosse. Laura aggiunge altre biglie nella scatola, di colore giallo. Quante biglie gialle deve aggiungere, come minimo, perché le biglie gialle siano più del 20% del totale?
   (A) 10 **(B)** 9 **(C)** 7 **(D)** 8 **(E)** 6

   Risposta corretta: **(D)**.
   Si vede che non è sufficiente aggiungere 7 biglie gialle, dato che $\frac{7}{37} < \frac{1}{5}$. Invece 8 sono sufficienti, dal momento che $\frac{8}{38} > \frac{1}{5}$. Aggiungendone un numero maggiore, la percentuale di gialle sarà ancora più elevata. □

4. Roberta scrive per esteso il numero $n = 10^{2025} + 10^{803} + 3^4 + 2^5$.
   Qual è la somma di tutte le cifre di n?
   (A) 7 **(B)** 2837 **(C)** 2025 **(D)** 9 **(E)** 115

   Risposta corretta: **(A)**.
   Visto che $3^4 + 2^5 = 81 + 32 = 113$, la scrittura di n ha un aspetto del tipo $100\ldots\ldots00100\ldots\ldots00113$ (dove i puntini indicano cifre tutte uguali a 0). La somma delle cifre è dunque 7. □

5. Nel triangolo ABC, gli angoli $\widehat{A}$ e $\widehat{B}$ sono uguali, mentre $\widehat{C}$ è il quadruplo di $\widehat{A}$. Sapendo che l'altezza uscente da C è di 24 cm, quanti cm misura il lato BC?
   (A) 36 **(B)** 40 **(C)** 48 **(D)** 45 **(E)** 60

   Risposta corretta: **(C)**.
   Dalle informazioni si ha che ABC è un triangolo isoscele. Inoltre $\widehat{A}$ e $\widehat{B}$ saranno pari a $\frac{1}{6}$ di un angolo piatto, ossia $\widehat{A} = \widehat{B} = 30°$ e $\widehat{C} = 120°$. Indicando con C' il punto medio di AB, che è anche il punto in cui cade l'altezza da C, il triangolo BCC' ha quindi angoli di 30°, 60° e 90°. Si conclude che BC è il doppio di CC', vale a dire 48 cm. □

6. Consideriamo i numeri $2025, 2025^2, 2025^3, \ldots, 2025^{2025}$, ossia tutte le potenze del tipo 2025^n con $1 \leqslant n \leqslant 2025$. Quanti di essi sono quadrati di numeri interi?
   (A) 2025 **(B)** 45 **(C)** nessuno **(D)** 1012 **(E)** 145

   Risposta corretta: **(A)**.
   Poiché $2025 = 3^4 \cdot 5^2 = 45^2$, si ha $2025^n = 45^{2n} = \left(45^n\right)^2$. Le potenze di 2025 sono dunque tutti quadrati. □

7. Marco ha un sacchetto con 16 caramelle alla menta, che vuole condividere con tre amici e con suo cugino. Ciascuno di loro, compreso Marco stesso, dovrà ricevere almeno una caramella; inoltre, per non creare malumori, i tre amici di Marco dovranno ricevere lo stesso numero di caramelle. In quanti modi Marco potrà fare la suddivisione?
   (A) 27 **(B)** 32 **(C)** 26 **(D)** 30 **(E)** 28

   Risposta corretta: **(D)**.
   I tre amici potranno ricevere in tutto o 3 o 6 o 9 o 12 caramelle, per cui Marco e il cugino avranno, rispettivamente, 13 o 10 o 7 o 4 caramelle, che potranno dividersi, rispettivamente, in 12 oppure 9 oppure 6 oppure 3 modi. Le possibilità sono quindi $12 + 9 + 6 + 3 = 30$. □

8. Sofia sta facendo l'elenco di tutti i numeri naturali minori di 1000 che si possono scrivere con le sole cifre 1, 3, 4, 5, 7 (anche ripetute). Quanti tra questi saranno numeri dispari?

(A) 108 **(B)** 104 **(C)** 112 **(D)** 96 **(E)** 124

Risposta corretta: **(E)**.

L'ultima cifra deve essere o 1 o 3 o 5 o 7: ci sono quindi 4 possibili scelte. Le altre cifre sono invece libere (5 scelte). Contiamo i numeri elencati:
- quelli di 3 cifre sono $5 \cdot 5 \cdot 4 = 100$;
- quelli di 2 cifre sono $5 \cdot 4 = 20$;
- quelli di 1 cifra sono 4.

In tutto si hanno quindi $100 + 20 + 4 = 124$ numeri. □

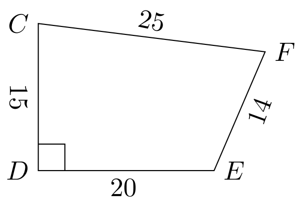
9. Un uomo e i suoi due figli hanno in tutto 96 anni. Quattro anni fa, il figlio maggiore aveva la metà degli anni del padre e il doppio degli anni del fratello. Che numero si ottiene se si moltiplicano le età attuali dei due figli?

(A) 384 **(B)** 288 **(C)** 480 **(D)** 432 **(E)** 448

Risposta corretta: **(E)**.

Osserviamo che 4 anni fa il totale delle tre età era di $96 - 3 \cdot 4 = 84$ anni, uguale a 7 volte l'età del minore. Pertanto l'età del figlio minore è uguale a $84/7 = 12$. Le età dei due fratelli erano dunque 12 e 24, quindi le età attuali sono 16 e 28, il cui prodotto è 448. □

10. Nel quadrilatero $CDEF$, i lati CD e DE sono tra loro perpendicolari. Le lunghezze (in mm) dei lati sono le seguenti: $\overline{CD} = 15$, $\overline{DE} = 20$, $\overline{EF} = 14$, $\overline{FC} = 25$. Quanti mm^2 misura l'area del quadrilatero $CDEF$?



(A) 324 **(B)** 318 **(C)** 306 **(D)** 308 **(E)** 304

Risposta corretta: **(B)**.

Dal teorema di Pitagora nel triangolo CDE, si ricava che $\overline{CE} = 25\,\text{mm}$. Il triangolo CEF è quindi isoscele. Per stabilirne l'area, possiamo calcolare l'altezza uscente da C, che, ancora per il teorema di Pitagora, misura $\sqrt{25^2 - 7^2} = 24\,\text{mm}$. Le aree dei triangoli CDE e CEF misurano dunque $15 \cdot 20/2 = 150\,\text{mm}^2$ e $14 \cdot 24/2 = 168\,\text{mm}^2$. L'area complessiva è perciò di $150 + 168 = 318\,\text{mm}^2$. □

11. Scegliendo a caso due diversi vertici di un cubo, qual è la probabilità che il segmento che li unisce passi per il centro del cubo?

(A) 1/8 **(B)** 1/4 **(C)** 1/7 **(D)** 1/56 **(E)** 1/64

Risposta corretta: **(C)**.

Dopo avere scelto un primo vertice V, il segmento passerà per il centro se e solo se il secondo vertice è quello opposto a V. Visto che i vertici diversi da V sono 7, la probabilità richiesta è pertanto 1/7. □

12. Nell'isola dei cavalieri e dei furfanti, ciascun abitante o è un cavaliere (che dice sempre la verità) o è un furfante (che mente sempre). La classe di Luigi è formata da 21 alunni in tutto. Il suo compagno di banco Mario dichiara: "nella nostra classe ci sono precisamente 12 cavalieri". Altri 9 compagni affermano poi: "Luigi è un cavaliere", gli altri 10 dicono invece: "Luigi è un furfante". Luigi preferisce non sbilanciarsi e resta in silenzio. Quanti sono i cavalieri presenti nella classe?

(A) non si può stabilire **(B)** 9 **(C)** 12 **(D)** 10 **(E)** 11

Risposta corretta: **(D)**.

Se Luigi è un cavaliere, i 9 compagni dicono il vero dunque sono anch'essi cavalieri, mentre gli altri 10 mentono e sono furfanti. Se invece Luigi è un furfante, i 9 sono furfanti e gli altri 10 sono cavalieri. In entrambi i casi, tra quei 20, compreso Luigi, ci sono 10 cavalieri e 10 furfanti. Mario quindi mente senz'altro ed è un furfante, dato che, se egli fosse un cavaliere, vi sarebbero 11 e non 12 cavalieri (diversamente da quanto egli afferma). In conclusione, la classe è formata da 10 cavalieri e 11 furfanti (e Mario, da bravo furfante, sta in effetti mentendo). □

13. Il numero reale k soddisfa la relazione $-1 < k < 0$. Si può concludere che ...

(A) $k < k^3 < k^2$
(B) $k < k^2 < k^3$
(C) $k^2 < k < k^3$
(D) $k^3 < k^2 < k$
(E) $k^3 < k < k^2$

Risposta corretta: **(A)**.

Scegliendo, ad esempio, $k = -\frac{1}{2}$, si ha $k^2 = \frac{1}{4}$ e $k^3 = -\frac{1}{8}$. Perciò, in questo caso, risulta $k < k^3 < k^2$. Questo prova che le risposte diverse da **(A)** sono sbagliate. Non è difficile vedere che la relazione $k < k^3 < k^2$ è invece vera per qualsiasi scelta di k con $-1 < k < 0$. Infatti, k^2 è positivo mentre k e k^3 sono negativi, dunque k^2 è senz'altro maggiore di entrambi. Inoltre, essendo $k^2 < 1$, si ha $k \cdot k^2 > k \cdot 1$, ossia $k^3 > k$. □

14. Giacomo sta scrivendo, in ordine alfabetico, tutti i possibili anagrammi della parola PUNTO. Quale posizione occupa la parola PUNTO in questo elenco?

(A) la 57^a **(B)** la 56^a **(C)** la 65^a **(D)** la 66^a **(E)** la 68^a

Risposta corretta: **(E)**.

Contiamo quante parole precedono PUNTO. La prima dell'elenco è NOPTU.

Le parole che iniziano per N corrispondono ai possibili anagrammi della parola OPTU, che sono in tutto $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$. Seguono poi le parole che iniziano per O, che saranno ancora 24 (gli anagrammi di NPTU).

Tra le parole con iniziale P, tutte quelle che iniziano con PN, con PO o con PT precedono PUNTO. Ciascuno di questi 3 gruppi è costituito da $3 \cdot 2 = 6$ parole, quindi abbiamo altre $3 \cdot 6 = 18$ parole che precedono PUNTO.

Supponendo che le prime due lettere siano PU, per precedere la parola PUNTO la terza deve poi essere per forza N.

Infine, tra quelle che iniziano con PUN, prima di PUNTO c'è ancora la parola PUNOT.

Nel complesso, le parole che precedono PUNTO sono quindi $48 + 18 + 1 = 67$. Significa che PUNTO è la 68^a parola dell'elenco. □

15. Elena è impegnata a colorare le facce di un gran numero di cubi. Ha a disposizione 10 colori diversi. In ciascun cubo, vuole colorare 2 facce di un colore e le altre 4 di un altro colore. Quanti cubi, al massimo, potrà colorare in modi tra loro differenti? ((le colorazioni di due cubi vanno considerate uguali se, muovendoli in qualsiasi maniera, essi non appaiono distinguibili dai colori delle facce))

(A) 90 **(B)** 180 **(C)** 200 **(D)** 360 **(E)** 100

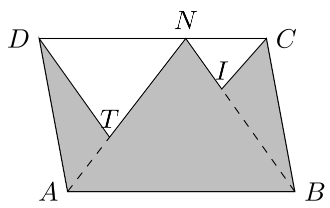
Risposta corretta: **(B)**.

Possiamo distinguere 2 casi:

- le 2 facce dello stesso colore sono opposte;
- le 2 facce dello stesso colore sono confinanti.

In entrambi i casi possiamo scegliere in 10 modi il colore delle 2 facce uguali e in 9 modi quello delle altre 4. Le colorazioni sono pertanto $2 \cdot 10 \cdot 9 = 180$, tutte tra loro differenti. □

16. Nel parallelogramma $ABCD$, la cui area è uguale a $72\,\text{cm}^2$, consideriamo il punto N del lato CD per cui risulta $DN = 2\,NC$. Sia poi I il punto del segmento BN per cui si ha $BI = 2\,IN$ e sia T il punto del segmento AN per cui si ha $NT = 2\,TA$. Quanti cm^2 misura l'area del poligono $ABCINTD$ (la superficie ombreggiata nella figura)?



(A) 48 **(B)** 45 **(C)** 52 **(D)** 54 **(E)** 42

Risposta corretta: **(C)**.

Indicata con $\mathcal{S}$ l'area $\mathcal{A}_{ABCD}$ del quadrilatero $ABCD$, si ha che $\mathcal{A}_{ABN} = \frac{\mathcal{S}}{2}$. Dato che $CN = \frac{1}{3}CD$, si ha $\mathcal{A}_{BCN} = \frac{1}{3}\mathcal{A}_{BCD} = \frac{1}{3}\frac{\mathcal{S}}{2} = \frac{\mathcal{S}}{6}$. Dal momento che $BI = \frac{2}{3}BN$, si ha quindi $\mathcal{A}_{BCI} = \frac{2}{3}\mathcal{A}_{BCN} = \frac{2}{3}\frac{\mathcal{S}}{6} = \frac{\mathcal{S}}{9}$. Allo stesso modo, si trova anche che $\mathcal{A}_{ATD} = \frac{\mathcal{S}}{9}$. Si conclude che l'area richiesta è uguale a $(\frac{1}{2} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9})\mathcal{S} = \frac{13}{18}\mathcal{S}$, ossia $\frac{13}{18} \cdot 72 = 52\,\text{cm}^2$. □

Ministero dell'Istruzione e del Merito

Unione Matematica Italiana

I Giochi di Archimede

- Gara Triennio -

27 novembre 2025

311

1. Sapendo che $(2h-1)^2 = h(4h+1)$, qual è il valore di $3h+1$?

   (A) 4/3 **(B)** 3/2 **(C)** 8/5 **(D)** 4/5 **(E)** 5/2

   Risposta corretta: **(C)**.

   Svolgendo i calcoli si trova $4h^2 - 4h + 1 = 4h^2 + h$, da cui $h = \frac{1}{5}$ e $3h+1 = \frac{8}{5}$ □

2. Una scatola contiene 40 biglie rosse. Andrea aggiunge altre biglie nella scatola, di colore blu. Quante biglie blu deve aggiungere, come minimo, perché le biglie blu siano più del 25% del totale?

   (A) 10 **(B)** 14 **(C)** 13 **(D)** 12 **(E)** 11

   Risposta corretta: **(B)**.

   Si vede che non è sufficiente aggiungere 13 biglie blu, dato che $\frac{13}{53} < \frac{1}{4}$. Invece 14 sono sufficienti, dal momento che $\frac{14}{54} > \frac{1}{4}$. Aggiungendone un numero maggiore, la percentuale di blu sarà ancora più elevata. □

3. Consideriamo i numeri 2025^3, 2025^9, 2025^{27}, $\ldots$, $2025^{(3^{2025})}$, ossia tutte le potenze del tipo $2025^{(3^n)}$ con $1 \leqslant n \leqslant 2025$. Quanti di essi sono quadrati di numeri interi?

   (A) 2025 **(B)** nessuno **(C)** 150 **(D)** 1012 **(E)** 75

   Risposta corretta: **(A)**.

   Poiché $2025 = 3^4 \cdot 5^2 = 45^2$, si ha $2025^k = 45^{2k} = \left(45^k\right)^2$. Le potenze di 2025 sono dunque tutti quadrati. □

4. Giulia ha un sacchetto con 17 caramelle alla menta, che vuole condividere con tre amiche e con sua cugina Claudia. Ciascuna di loro, compresa Giulia stessa, dovrà ricevere almeno una caramella; inoltre, per non creare malumori, le tre amiche di Giulia dovranno ricevere lo stesso numero di caramelle. In quanti modi Giulia potrà fare la suddivisione?

   (A) 33 **(B)** 36 **(C)** 32 **(D)** 30 **(E)** 35

   Risposta corretta: **(E)**.

   Le tre amiche potranno ricevere in tutto o 3 o 6 o 9 o 12 o 15 caramelle, per cui Giulia e la cugina avranno, rispettivamente, 14 o 11 o 8 o 5 o 2 caramelle, che potranno dividersi, rispettivamente, in 13 oppure 10 oppure 7 oppure 4 oppure 1 modi. Le possibilità sono quindi $13 + 10 + 7 + 4 + 1 = 35$. □

5. Alice ha un orologio piuttosto strano. C'è il classico quadrante a 12 ore, con la lancetta delle ore e quella dei minuti. Tuttavia, mentre la lancetta dei minuti si muove come al solito (ruotando in senso *orario*), quella delle ore procede al contrario (in senso *anti-orario*). Quante volte le due lancette si incroceranno nell'arco di una giornata (ossia da mezzanotte alla mezzanotte successiva, considerando sia l'istante iniziale sia l'istante finale)?

   (A) 27 **(B)** 26 **(C)** 25 **(D)** 24 **(E)** 23

   Risposta corretta: **(A)**.

   Un modo efficace per descrivere la situazione è di utilizzare come riferimento la lancetta delle ore, che quindi in tale riferimento sarà ferma (ad esempio sul semiasse y positivo). La lancetta dei minuti ruoterà, in tale riferimento, alla velocità angolare di 26 giri al giorno: i 24 della lancetta dei minuti più i 2 al contrario di quella delle ore (come vengono visti nel riferimento abituale), compiuti nell'arco della giornata. Questo vuol dire, appunto, che la lancetta dei minuti, nel nuovo sistema di riferimento, compie in un giorno 26 giri attorno alla lancetta delle ore. Considerato che sia nell'istante iniziale sia in quello finale le due lancette sono sovrapposte, gli incroci sono quindi in tutto 27. □

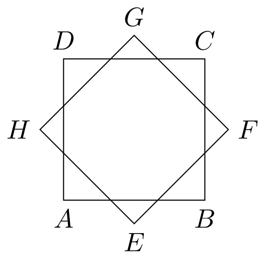
6. Nell'isola dei cavalieri e dei furfanti, ciascun abitante o è un cavaliere (che dice sempre la verità) o è un furfante (che mente sempre). La classe di Dino è formata da 23 alunni in tutto. Il suo compagno di banco Filippo dichiara: "in classe nostra ci sono precisamente 13 furfanti". Altri 10 compagni affermano poi: "Dino è un cavaliere", gli altri 11 dicono invece: "Dino è un furfante". Dino preferisce non sbilanciarsi e resta in silenzio. Quanti sono i cavalieri presenti nella classe?

   (A) 12 **(B)** non si può stabilire **(C)** 13 **(D)** 10 **(E)** 11

Risposta corretta: **(E)**.

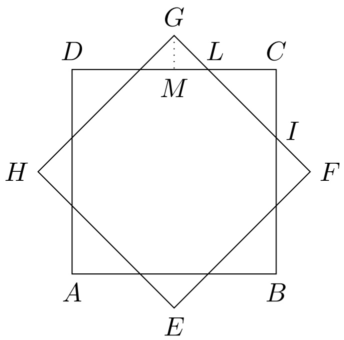
Se Dino è un cavaliere, i 10 compagni dicono il vero dunque sono anch'essi cavalieri, mentre gli altri 11 mentono e sono furfanti. Se invece Dino è un furfante, i 10 sono furfanti e gli altri 11 sono cavalieri. In entrambi i casi, tra quei 22, compreso Dino, ci sono 11 cavalieri e 11 furfanti. Filippo quindi mente senz'altro ed è un furfante, dato che, se egli fosse un cavaliere, vi sarebbero 12 cavalieri e 11 furfanti (diversamente da quanto afferma). In conclusione, la classe è formata da 11 cavalieri e 12 furfanti (e Filippo, da bravo furfante, sta mentendo). □

7. I lati del quadrato $ABCD$ misurano 3 cm. I lati del quadrato $EFGH$ dividono i lati di $ABCD$ in tre parti uguali. Quanti cm^2 misura l'area di $EFGH$?



(A) 25/3 **(B)** 9 **(C)** 8 **(D)** $\frac{16}{3}\sqrt{2}$ **(E)** $6\sqrt{2}$

Risposta corretta: **(C)**.



Calcoliamo la misura in cm del lato FG. Si ha che $\overline{IL} = \sqrt{2} \cdot \overline{CL} = \sqrt{2}$ ed inoltre $\overline{GL} = \sqrt{2} \cdot \overline{LM} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Dunque risulta $\overline{FG} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$. L'area di $EFGH$ misura quindi $(2\sqrt{2}\,\mathrm{cm})^2 = 8\,\mathrm{cm}^2$. □

8. Enrico sta scrivendo, in ordine alfabetico, tutti i possibili anagrammi della parola NUMERO. Quale posizione occupa la parola NUMERO in questo elenco?

(A) la 341^a **(B)** la 344^a **(C)** la 361^a **(D)** la 337^a **(E)** la 336^a

Risposta corretta: **(B)**.

Contiamo quante parole precedono NUMERO. La prima dell'elenco è EMNORU.
Le parole che iniziano per E corrispondono ai possibili anagrammi della parola MNORU, che sono in tutto $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120$. Seguono poi le parole che iniziano per M, che saranno ancora 120 (gli anagrammi di ENORU).
Tra le parole con iniziale N, tutte quelle che iniziano con NE, con NM, con NO o con NR precedono NUMERO. Ciascuno di questi 4 gruppi è costituito da $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ parole, quindi abbiamo altre $4 \cdot 24 = 96$ parole che precedono NUMERO.
Se le prime due lettere sono NU, anche tutte le parole che iniziamo con NUE (che sono $3 \cdot 2 = 6$) precedono NUMERO.
Ancora, se le prime tre lettere sono NUM, al 4° posto deve per forza esserci una E per precedere la parola NUMERO.
Infine, tra quelle che iniziano con NUME, prima di NUMERO c'è ancora la parola NUMEOR.
Nel complesso, le parole che precedono NUMERO sono $2 \cdot 120 + 4 \cdot 24 + 6 + 1 = 343$. Significa che NUMERO è la 344^a parola dell'elenco. □

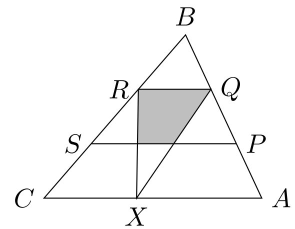
9. Il numero reale k soddisfa la relazione $-1 < k < 0$. Si può concludere che ...

(A) $\frac{1}{k} < k^2 < k^3 < \frac{1}{k^2}$
(B) $k < \frac{1}{k} < k^2 < \frac{1}{k^2}$
(C) $\frac{1}{k} < k^3 < \frac{1}{k^2} < k^2$
(D) $\frac{1}{k} < k^3 < k^2 < \frac{1}{k^2}$
(E) $k^3 < \frac{1}{k} < k^2 < \frac{1}{k^2}$

Risposta corretta: **(D)**.

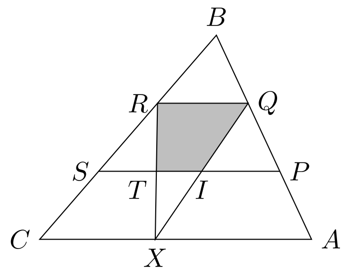
Scegliendo, ad esempio, $k = -\frac{1}{2}$, si ha $\frac{1}{k} = -2$, $\frac{1}{k^2} = 4$, $k^2 = \frac{1}{4}$, $k^3 = -\frac{1}{8}$. Se ne ricava che le risposte diverse dalla **(D)** sono senz'altro errate. Si può vedere agevolmente che, in effetti, la relazione **(D)** risulta valida per ogni k con $-1 < k < 0$. □

10. I lati AB e BC del triangolo ABC sono suddivisi in 3 parti uguali dai punti P, Q e R, S. Si sa che l'area del triangolo ABC è di $120\,\mathrm{m}^2$. Preso un punto X qualsiasi del lato CA, quanti m^2 misura, come minimo, l'area del quadrilatero ombreggiato?



(A) 64/3 **(B)** 24 **(C)** 20 **(D)** 18 **(E)** 81/4

Risposta corretta: **(C)**.



Osserviamo che QR è parallelo a CA e che, per il teorema di Talete, $QR = \frac{1}{3}CA$. Inoltre, nel triangolo XQR, l'altezza uscente da X sarà i $\frac{2}{3}$ dell'altezza di ABC uscente da B. Ne segue che l'area di XQR è uguale a $\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{9}$ dell'area di ABC, qualunque sia la posizione di X su CA. Per la similitudine dei triangoli XQR e XIT, l'area di XIT è $\frac{1}{4}$ dell'area di XQR, per cui l'area di $IQRT$ è uguale a $\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{9} = \frac{1}{6}$ dell'area di ABC, vale a dire $20\,\mathrm{m}^2$. □

11. I numeri naturali a, b, c sono primi e soddisfano la relazione $abc = 3\,(a+b+c)+1$. Quale può essere, al massimo, il valore della quantità $5a + 3b + c$?

(A) 79 **(B)** 73 **(C)** 75 **(D)** 71 **(E)** 77

Risposta corretta: **(B)**.

I numeri a, b, c non possono essere tutti dispari, poiché in tal caso il membro di sinistra sarebbe dispari e quello di destra pari. Essendo numeri primi, uno di essi deve perciò essere 2, per esempio $a = 2$. L'equazione diviene quindi: $2bc = 3\,(b+c) + 7$. Di nuovo, b e c non possono essere entrambi dispari, dato che, ancora, si avrebbe un numero pari a sinistra e uno dispari a destra. Supponendo, quindi, $b = 2$, si ottiene $4c = 3c + 13$, da cui $c = 13$. Si è pertanto trovata la soluzione $(a, b, c) = (2, 2, 13)$. Essendo simmetrica l'equazione assegnata, anche tutte le permutazioni di tale soluzione soddisfano dell'equazione. Inoltre, per quanto osservato, queste sono le uniche soluzioni. Affinché la quantità $5a + 3b + c$ sia massima, occorre scegliere $(a, b, c) = (13, 2, 2)$, da cui $5a + 3b + c = 73$. □

12. Michela mette in fila, su un ripiano della sua libreria, 5 libri di narrativa, 3 di poesia e 2 libri fotografici, in maniera del tutto casuale. Qual è la probabilità che i libri di poesia vengano a trovarsi tutti e 3 vicini (senza altri libri in mezzo a loro)?

(A) 1/24 **(B)** 1/72 **(C)** 1/120 **(D)** 3/10 **(E)** 1/15

Risposta corretta: **(E)**.

Associando ad ogni libro di narrativa il simbolo N, ad ogni libro di poesia il simbolo P e ad ogni libro fotografico il simbolo N, a ciascuna disposizione dei 10 libri può essere associata una permutazione della parola $\mathsf{NNNNNPPPFF}$. Il numero complessivo di tali permutazioni è uguale a $\dfrac{10!}{5! \cdot 3! \cdot 2!}$. Si tratta di contare in quante di tali permutazioni le 3 P sono consecutive. Questo equivale a considerare la sequenza PPP, come un unico simbolo, per esempio $\overline{\mathsf{P}}$, ossia di contare le permutazioni della parola $\mathsf{NNNNN\overline{P}FF}$, che sono in tutto $\dfrac{8!}{5! \cdot 1! \cdot 2!}$.

La probabilità richiesta è data quindi dal rapporto $\dfrac{8!}{5! \cdot 1! \cdot 2!} \bigg/ \dfrac{10!}{5! \cdot 3! \cdot 2!} = \dfrac{1}{15}$. □

13. Giorgio ha una tabella quadrata formata da 4×4 caselle. Vuole disporre delle monete su alcune caselle (non più di una per casella), in modo che ciascuna riga e ciascuna colonna contengano un numero dispari di monete.

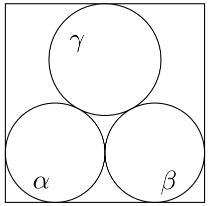
Quante sono le possibili configurazioni?

(A) 450 **(B)** 441 **(C)** 576 **(D)** 480 **(E)** 512

Risposta corretta: **(E)**.

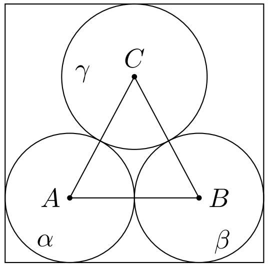
Consideriamo innanzi tutto la prima colonna verticale, nella quale vanno collocate 1 oppure 3 monete. Ci sono 4 modi per collocare 1 moneta e 4 modi per collocarne 3, dunque 8 possibilità in tutto. Vi sono dunque 8^3 modi per sistemare le prime 3 colonne, senza tener conto della quarta. Per sistemare l'ultima colonna (sempre con 1 o 3 monete) occorre tenere conto che anche su ciascuna riga orizzontale deve esserci un numero dispari di monete. Notiamo che, dopo aver sistemato le prime 3 colonne, sulla tabella sarà presente un numero dispari di monete. Perciò, tra le 4 righe orizzontali, un numero dispari di esse deve contenere una quantità dispari di monete e, di conseguenza, un numero dispari di righe deve contenere una quantità pari di monete (0 oppure 2). Per avere su ciascuna riga un numero dispari di monete, occorre collocare una moneta sulle caselle della quarta colonna che appartengono alle righe dove è (al momento) presente un numero pari di monete. Tali caselle, per quanto sopra, sono una quantità dispari (dunque anche la quarta colonna avrà un numero dispari di monete). Così facendo, anche nelle righe corrispondenti ci sarà quindi un numero dispari di monete dopo l'aggiunta delle monete nella quarta colonna. Dal momento che, come visto, il completamento della tabella può essere effettuato in un solo modo dopo aver sistemato in modo arbitrario le prime 3 colonne, si conclude che le configurazioni ammissibili sono tante quante le possibili sistemazioni delle prime 3 colonne, vale a dire 8^3. □

14. Un quadrato di lato 4 cm contiene tre cerchi, tangenti tra loro e tangenti ai lati del quadrato, come nella figura qui a fianco. I cerchi α e β hanno lo stesso raggio.
Quanti cm misura il raggio di γ?



(A) 7/6 **(B)** 1 **(C)** 5/4 **(D)** 9/8 **(E)** 10/9

Risposta corretta: **(D)**.



Le circonferenze congruenti α e β hanno raggio di 1 cm. Tenendo conto che la retta per i centri di due circonferenze tangenti passa per il loro punto di tangenza, si conclude che ABC è un triangolo isoscele (dove A, B, C sono i centri delle tre circonferenze). Si può quindi applicare il teorema di Pitagora al triangolo rettangolo AMC (dove M è il punto medio di AB, vale a dire il punto di tangenza tra α e β). Si avrà dunque $AM^2 + MC^2 = CA^2$, ossia, detto r il raggio di γ (in cm), $1^2+(3-r)^2 = (r+1)^2$, da cui $8r = 9$ perciò $r = 9/8$. □

15. Emma è impegnata a colorare le facce di un gran numero di cubi. Ha a disposizione 7 colori diversi. In ciascun cubo, vuole colorare 1 faccia di un colore, altre 2 facce di un altro colore e le altre 3 di un altro colore ancora. Quanti cubi, al massimo, potrà colorare in modi tra loro differenti? ((le colorazioni di due cubi vanno considerate uguali se, muovendoli in qualsiasi maniera, essi non appaiono distinguibili dai colori delle facce))

(A) 630 **(B)** 840 **(C)** 420 **(D)** 1050 **(E)** 210

Risposta corretta: **(A)**.

Chiameremo 3-gruppo l'insieme delle 3 facce da colorare con lo stesso colore, 2-gruppo quello delle 2 facce da colorare uguali e 1-gruppo la faccia rimanente. In primo luogo, stabiliremo quante sono le configurazioni distinguibili della scelta di 3-gruppo, 2-gruppo e 1-gruppo. Consideriamo prima di tutto le possibili configurazioni del 2-gruppo, che sono 2: o sono 2 facce opposte oppure sono adiacenti. Nel primo caso (il 2-gruppo formato da 2 facce opposte), c'è una sola possibilità per il 3-gruppo e l'1-gruppo (l'1-gruppo è una delle 4 facce laterali e il 3-gruppo le altre 3; le 4 possibili opzioni sono indistinguibili). Nel secondo caso (il 2-gruppo formato da 2 facce adiacenti), ci sono invece 2 possibilità per la scelta del 3-gruppo e l'1-gruppo: infatti la faccia dell'1-gruppo può essere adiacente ad entrambe le facce del 2-gruppo oppure opposta a una di esse (queste due opzioni danno luogo a diverse configurazioni). Nel complesso, ci sono quindi 3 possibili configurazioni per la scelta di 3-gruppo, 2-gruppo, 1-gruppo, per ciascuna delle quali i 3 colori potranno poi essere scelti in $7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$ modi. Le possibili colorazioni sono quindi $3 \cdot 210 = 630$. □

16. Il quadrilatero $ABCD$ è inscritto in una circonferenza. Indicato con E il punto d'intersezione tra le diagonali AC e BD, si sa che $AC = 10\,AE$ e $BD = 5\,BE$. Qual è il rapporto tra la diagonale maggiore e quella minore?

(A) 2 **(B)** 4/3 **(C)** 3/2 **(D)** 5/4 **(E)** 8/5

Risposta corretta: **(B)**.

Per comodità, indichiamo con x la misura di AE e con y la misura di BE. In base ai dati forniti, la misura di CE è uguale a $9x$ e quella di DE è $4y$. Per il teorema delle due corde, si ha dunque $x \cdot 9x = y \cdot 4y$, ossia $9x^2 = 4y^2$, da cui $\frac{x}{y} = \frac{2}{3}$. Si conclude pertanto che $\frac{AC}{BD} = \frac{10x}{5y} = 2 \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$. Essendo maggiore di 1, tale valore è il rapporto cercato. □