Unione Matematica Italiana
Progetto Olimpiadi della Matematica

XI Gara Nazionale per le Classi Prime

Lunedì 26 gennaio 2026

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**
Test n. 1	B	C	D	A	B	C	C	C	B	E	C	E	B	C	D	B	A	D
Test n. 2	E	B	C	A	A	B	A	D	D	B	B	B	E	E	A	C	A	B
Test n. 3	E	C	A	D	A	D	B	D	B	A	A	A	D	C	C	D	A	E
Test n. 4	E	E	D	D	A	B	D	D	D	C	E	C	B	E	D	A	A	E

Soluzioni (Test n. 1)

1. La maestra Scaldasedia, per non fare lezione, assegna da fare in classe ai suoi alunni un calcolo che ritiene abbastanza lungo da riempire tutta l'ora: trovare il prodotto di tutti i divisori di 1024^3, compresi 1 e 1024^3. Con suo grande stupore, dopo pochi minuti, il suo alunno più bravo le porta la lavagnetta con il risultato corretto scritto sopra. Qual è il risultato?

(A) 2^{91} **(B)** $\boxed{2^{465}}$ **(C)** 2^{990} **(D)** 2^{900} **(E)** 2^{450}

Risulta $1024^3 = (2^{10})^3 = 2^{30}$. Tutti i divisori di 1024^3 sono del tipo $2^0, 2^1, 2^2, \dots, 2^{30}$ e quindi il prodotto è dato da $2^0 \cdot 2^1 \cdot 2^2 \cdot \ldots \cdot 2^3 = 2^{0+1+2+\ldots+30} = 2^{\frac{30\cdot 31}{2}} = 2^{465}$.

2. Il prodotto di cinque numeri interi positivi consecutivi è 6720. Quanto vale la loro somma?

(A) 20 **(B)** 25 **(C)** $\boxed{30}$ **(D)** 35 **(E)** 40

Osserviamo dapprima che, comunque si scelgano 5 numeri interi positivi, uno (e solo uno) di essi è multiplo di 5, e almeno uno (ma al più due) di essi è multiplo di 3. Scomponendo 6720, si ottiene $2^6 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$, il che ci suggerisce che la cinqueina cercata è data dai numeri 4, 5, 6, 7, 8, il cui prodotto è proprio 6720 e la cui somma è $4 + 5 + 6 + 7 + 8 = 30$.

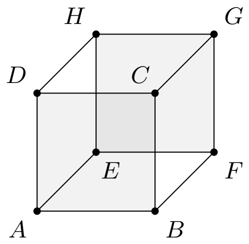
3. In un poligono regolare l'angolo interno è undici volte quello esterno. Quanti lati ha il poligono?

(A) 11 **(B)** 12 **(C)** 22 **(D)** $\boxed{24}$ **(E)** Non esiste alcun poligono con questa proprietà

Detta x l'ampiezza di un angolo esterno del poligono, risulta $x + 11x = 180°$, da cui $x = 15°$. Dunque, poiché la somma di tutti gli angoli esterni di un poligono è $360°$, il poligono ha $360° : 15° = 24$ lati.

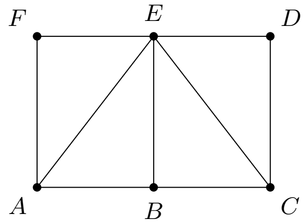
4. Nel disegno, l'intersezione dei quadrati $ABCD$ e $EFGH$, entrambi di area 12, è un quadrato di area 3. Quanto vale l'area dell'esagono $ABFGHD$?

(A) $\boxed{24}$ **(B)** 36 **(C)** 28 **(D)** 22 **(E)** 26



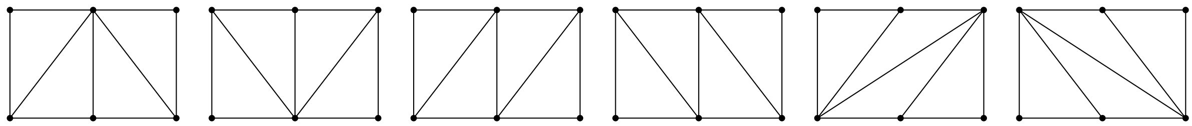
È facile osservare che il quadrato di area 3, occupando 1/4 dell'area di ciascun quadrato di area 12, ha il lato che è la metà di quello dei due quadrati di partenza. L'esagono $ABFGHD$ possiede, pertanto, una superficie data dalla somma delle aree dei due quadrati $ABCD$ e $EFGH$, a cui va tolta l'area della loro intersezione, uguale a 3, e aggiunta l'area di ciascuno dei due triangoli rettangoli di ipotenusa BF e DH, ciascuno di area 3/2. Ne consegue che l'area cercata è pari a $12 + 12 - 3 + 2 \cdot 3/2 = 24$

5. Dato il rettangolo $ACDF$, di area 4, siano B ed E rispettivamente i punti medi dei lati AC e DF. Si vuole suddividere il rettangolo in 4 triangoli di area 1, ciascuno dei quali abbia come vertici 3 dei punti A, B, C, D, E, F (come ad esempio i triangoli AEF, ABE, BCE, CDE mostrati nella figura qui accanto). In quanti modi si può fare?



(A) 5 **(B)** $\boxed{6}$ **(C)** 4 **(D)** 8 **(E)** 2

Facendo un po' di tentativi, ci si convince che le configurazioni possibili sono le seguenti sei:



6. Sia N il prodotto di tutti gli interi positivi, minori o uguali a 100, che hanno esattamente 3 divisori. Qual è il più piccolo valore di M tale che N risulti divisibile per M, ma non per M^2 ?

(A) $M = 2$ **(B)** $M = 8$ **(C)** $\boxed{M = 4}$ **(D)** $M = 10$ **(E)** $M = 6$

Gli unici interi positivi che possiedono esattamente 3 divisori sono tuttie soli i quadrati perfetti di un numero primo. Infatti, detto p un qualunque numero primo, i divisori di p^2 sono esclusivamente 1, p e p^2. Limitandosi a considerare solo gli interi positivi minori o uguali a 100, risulta $N = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2$. Ne consegue che N è divisibile solo per $M = 4 = 2^2$ ma non per $M^2 = 16 = 2^4$. Inoltre, $M = 4$ è anche il più piccolo valore cercato, in quanto N è divisibile sia per 1, 2, 3 ma anche per i rispettivi quadrati 1^2, 2^2, 3^2.

7. Sapendo che $x^x = 2$, allora $x^{(x^{2x+1})}$ è uguale a:

(A) 8 **(B)** 12 **(C)** $\boxed{16}$ **(D)** 20 **(E)** 32

Applicando le proprietà delle potenze, si ha

$$x^{(x^{2x+1})} = x^{(x^{2x}\cdot x)} = x^{(x^x)^2\cdot x} = x^{(2^2)\cdot x} = x^{4x} = (x^x)^4 = 2^4 = 16.$$

8. Cecilia ha scritto alla lavagna l'elenco ordinato di tutti i numeri interi da 1 a 2100, estremi inclusi, che non sono quadrati perfetti (cioè, quadrati di numeri interi, come 1, 4, 9, ecc). I primi numeri scritti, pertanto, sono 2, 3, 5, 6, 7, 8, 10, 11, 12, ... Quale numero si trova nella posizione 2026?

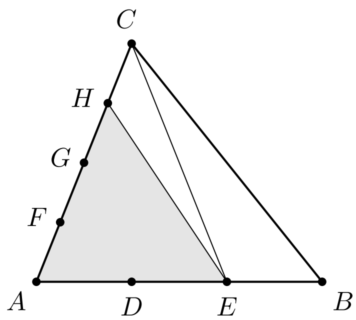
(A) 2068 **(B)** 2070 **(C)** $\boxed{2071}$ **(D)** 2072 **(E)** 2075

I quadrati perfetti minori o uguali di 2100 sono i quadrati di tutti gli interi positivi $1, 2, 3, \ldots, 45$ (infatti, $45^2 = 2025$, mentre $46^2 = 2116$. In particolare, poiché $45^2 < 2026$, allora il numero che si trova nella 2026-sima posizione è $2026 + 45 = 2071$.

9. L'area di un triangolo ABC misura $360\,\text{cm}^2$. Siano D, E due punti interni al lato AB tali che $AD = DE = EB$ e siano F, G, H tre punti interni ad AC tali che $AF = FG = GH = HC$. Qual è l'area del triangolo AEH in cm^2 ?

(A) 120 **(B)** $\boxed{180}$ **(C)** 60 **(D)** 270 **(E)** 240

Dato il triangolo ABC e disegnati i punti D, E, F, G, H come da ipotesi, si tracciano i segmenti CE e EH come mostrato in figura. Il triangolo ACE ha la base lunga i 2/3 di quella del triangolo ABC e la stessa altezza, pertanto la sua area è uguale a $\frac{2}{3} \cdot 360\,\text{cm}^2 = 240\,\text{cm}^2$. Ne consegue che il triangolo AEH, avendo la base lunga i $\frac{3}{4}$ di quella del triangolo ACE e la stessa altezza, ha area $\frac{3}{4} \cdot 240\,\text{cm}^2 = 180\,\text{cm}^2$.



10. Quanti sono i numeri naturali maggiori di 10 e minori di 2026 la cui somma delle cifre è 3?

(A) 13 **(B)** 14 **(C)** 15 **(D)** 16 **(E)** $\boxed{17}$

Tra i numeri a due cifre, solo 12, 21 e 30 godono della proprietà richiesta. Tra i numeri a tre cifre, la proprietà richiesta è verificata dai valori 111, 300 e da tutti i numeri ottenuti usando le cifre 0, 1, 2 senza che la prima di esse sia 0 (abbiamo $2 \cdot 2 \cdot 1 = 4$ modi, corrispondenti ai valori 102, 120, 201, 210). Tra i numeri a quattro cifre, la proprietà richiesta è verificata da tutti quelli ottenuti usando la cifra 1 tre volte e una volta la cifra 0 non in corrispondenza delle migliaia (ci sono 3 modi: 1110, 1101 e 1011), nonché da quelli ottenuti usando la cifra 0 (due volte), 1, 2, senza che lo 0 occupi la posizione delle migliaia (ci sono $2 \cdot \frac{3!}{2!} = 6$ modi) corrispondenti ai valori 1002, 1020, 1200, 2001, 2010, 2100, con quest'ultimo valore che va escluso in quanto maggiore di 2026 (analogamente, non va considerato il valore 3000). In totale si hanno $3 + 6 + 8 = 17$ possibili valori che verificano quanto richiesto.

11. Se la media aritmetica di quattro numeri interi positivi distinti è 2026, qual è il valore massimo possibile del più grande di questi numeri?

(A) 8078 **(B)** 8104 **(C)** $\boxed{8098}$ **(D)** 7592 **(E)** 8101

Poiché la media aritmetica dei quattro numeri è 2026, la somma di essi è $2026 \cdot 4 = 8104$. Per trovare il massimo di essi, bisogna minimizzare i restanti tre, ricordando che si tratta di valori distinti, e dunque dovranno valere 1, 2, 3. Ne consegue che il massimo possibile cercato è $8104 - 1 - 2 - 3 = 8098$.

12. Un triangolo equilatero ha il lato che misura il doppio di quello di un esagono regolare. Qual è il rapporto tra l'area del triangolo e quella dell'esagono?

(A) 2 **(B)** 1 **(C)** 3/2 **(D)** 1/2 **(E)** $\boxed{2/3}$

Indichiamo con l la lunghezza del lato dell'esagono regolare e con $2l$ la lunghezza del lato del triangolo equilatero. Quest'ultimo ha un'area di $\frac{2l \cdot \sqrt{3}l}{2} = \sqrt{3}l^2$, mentre l'area dell'esagono è $\frac{6l \cdot l\sqrt{3}/2}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}l^2$, da cui ne consegue che il rapporto fra l'area del triangolo e quella dell'esagono è $\frac{2}{3}$.

Soluzione alternativa: senza far uso dei radicali, basta osservare che un esagono regolare di lato l si può suddividere, tracciando i 6 raggi, in 6 triangoli equilateri di lato l, mentre un triangolo equilatero di lato $2l$ si può suddividere in 4 triangoli equilateri di lato l. Il rapporto delle due aree è quindi $\frac{4}{6}$, cioè $\frac{2}{3}$.

13. Indichiamo con $S(n)$ la somma delle cifre di un intero positivo n (ad esempio $S(574) = 16$). Se $S(n) = 2026$, quale può essere il più piccolo valore di $S(n+1)$?

(A) 1 **(B)** $\boxed{2}$ **(C)** 3 **(D)** 4 **(E)** 2027

Osserviamo che, fissato un determinato valore di $S(n)$, esistono infiniti interi positivi n la cui somma della cifre da il valore assegnato. Inoltre, se si vuole minimizzare il valore di $S(n+1)$, è preferibile prendere la cifra delle unità di n uguale a 9 (ad esempio, $S(29) = 11$, ma $S(30) = 3$), così come quella delle decine ($S(299) = 20$, ma $S(30) = 3$), e così via. Si intuisce quindi che, posto

$$n = 10^{225} + 9 \cdot \sum_{i=0}^{224} 10^i = 1\underbrace{99\ldots9}_{225 \text{ volte}},$$

allora $S(n) = 2026$ e $S(n+1) = 2$ in quanto

$$n + 1 = 2 \cdot 10^{225} = 2\underbrace{00\ldots0}_{225 \text{ volte}}.$$

Osservazione: Posto $S(n) = 2026$, non può mai accadere che $S(n+1) = 1$. Infatti, se $S(n+1) = 1$, allora $n + 1 = 1000\ldots000$, cioè $n = 999\ldots999$ e quindi $S(n)$ dovrebbe essere divisibile per 9, escludendo così la possibilità che $S(n) = 2026$.

14. Marco scrive problemi a ritmo costante di 8 problemi all'ora, e Anna risolve problemi a ritmo costante di 12 problemi all'ora. Marco comincia a scrivere 3 ore prima che Anna inizi a risolverli. Quanti problemi avrà scritto Marco quando Anna avrà finito di risolvere tutti i problemi che lui ha scritto fino a quel momento?

(A) 36 **(B)** 48 **(C)** $\boxed{72}$ **(D)** 80 **(E)** 84

Durante le prime 3 ore, Marco scrive 24 problemi. Successivamente, Anna riesce a risolvere 4 problemi in più rispetto a quanti ne scrive Marco. Dunque Anna avrà bisogno di $24 : 4 = 6$ ore per finire di risolvere tutti i problemi scritti da Marco fino a quel momento e, pertanto, Marco avrà scritto $8 \cdot 9 = 72$ problemi.

15. Un lago è popolato da 800 anatre con piume rosse o blu e teste rosse o blu. Se 430 anatre hanno piume rosse, 290 anatre hanno teste blu e 160 anatre hanno sia testa blu sia piume blu, quante anatre hanno sia testa rossa sia piume rosse?

(A) 370 **(B)** 350 **(C)** 240 **(D)** $\boxed{300}$ **(E)** Le informazioni sono insufficienti

Le anatre con la testa blu sono 290; di queste 160 hanno anche le piume blu, pertanto le restanti 130 hanno testa blu e piume rosse. Sapendo che il totale delle anatre con le piume rosse è pari a 430, ne consegue che ad avere testa rossa e piume rosse sono $430 - 130 = 300$.

16. Se un triangolo rettangolo viene ruotato intorno ad un suo cateto, compiendo una rotazione completa, si ottiene un volume di $1500\pi\,\mathrm{cm}^3$. Se invece viene ruotato intorno all'altro cateto si ottiene un volume di $2000\pi\,\mathrm{cm}^3$. Quanto è lunga l'ipotenusa?

(A) 15 cm **(B)** $\boxed{25\,\mathrm{cm}}$ **(C)** 20 cm **(D)** 16 cm **(E)** 36 cm

Indichiamo con a, b la lunghezza dei cateti del triangolo rettangolo. Quando viene fatto ruotare attorno al cateto a, risulta $V = \frac{1}{3}\pi b^2 a = 1500\pi\,\mathrm{cm}^3$, da cui $ab^2 = 4500\,\mathrm{cm}^3$. Analogamente, quando viene fatto ruotare attorno al cateto b, risulta $V = \frac{1}{3}\pi a^2 b = 2000\pi\,\mathrm{cm}^3$, da cui $a^2 b = 6000\,\mathrm{cm}^3$. Ne consegue che

$$\frac{a^2 b}{ab^2} = \frac{a}{b} = \frac{4}{3},$$

cioè $a = \frac{4}{3}b$. Sostituendo quest'ultima relazione in una delle due uguaglianze precedentemente trovate (ad esempio, $ab^2 = 4500\,\mathrm{cm}^3$), si ottiene $ab^2 = \frac{4}{3}b^3 = 4500\,\mathrm{cm}^3$, da cui $b^3 = 3375\,\mathrm{cm}^3 = 3^3 5^3\,\mathrm{cm}^3$, ossia $b = 15\,\mathrm{cm}$ e $a = \frac{4}{3} \cdot 15\,\mathrm{cm} = 20\,\mathrm{cm}$. L'ipotenusa del triangolo rettangolo, pertanto, è lunga

$$\sqrt{(15\,\mathrm{cm})^2 + (20\,\mathrm{cm})^2} = 25\,\mathrm{cm}.$$

17. Nicolò si diverte a calcolare la somma delle cifre del numero $10^{2026} - 2026$. Che numero ottiene?

(A) $\boxed{18225}$ **(B)** 18205 **(C)** 18234 **(D)** 18243 **(E)** 18218

Se al numero 10^{2026} togliamo 2026, otteniamo

$$\underbrace{99\ldots9}_{\text{2022 cifre}}7974$$

La somma delle cifre di questo numero è $9 \cdot 2022 + 7 + 9 + 7 + 4 = 18225$.

18. Quanti numeri di 4 cifre possono essere scritti usando le cifre 2, 0 e 6 (le cifre possono ripetersi)? Ad esempio, 2026 è uno dei numeri che può essere scritto (mentre 0006 no perché inizia con 0).

(A) 16 **(B)** 81 **(C)** 36 **(D)** $\boxed{54}$ **(E)** 2025

La cifra delle migliaia può essere scelta in 2 modi diversi (o il 2 o il 6); dopodiché la cifra delle centinaia, quella delle decine e quella delle unità possono essere scelte ciascuna in 3 modi diversi. Ne consegue che esistono $2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 54$ modi diversi di scrivere i numeri di 4 cifre usando solo le cifre 0, 2 e 6.

Ringraziamenti

Questa gara non sarebbe stata possibile senza la preziosa collaborazione di tutti coloro che hanno proposto, risolto, modificato e testato i problemi: Simone Bertone, Emanuele Callegari, Sandro Campigotto, Carlo Cassola, Santina De Monte, Claudia Manotti, Simona Pieri, Michelangelo Sabatini.

Un sentito ringraziamento anche a Federico Incitti ed Emanuele Paolini per il supporto informatico.

Lorenzo Mazza