UNIONE MATEMATICA ITALIANA
MINISTERO DELL'ISTRUZIONE E DEL MERITO

# Olimpiadi della Matematica

# Gara di Febbraio

11 febbraio 2026

1. Non sfogliare questo fascicoletto finché l'insegnante non ti dice di farlo. NON È AMMESSO L'UTILIZZO DI CALCOLATRICI, LIBRI DI TESTO E TAVOLE NUMERICHE. È proibito comunicare con altri concorrenti o con l'esterno; IN PARTICOLARE, È VIETATO L'USO DI TELEFONI CELLULARI.
2. SE TI È STATO CONSEGNATO UN FOGLIO RISPOSTE A LETTURA OTTICA, DEVI RISPONDERE ESCLUSIVAMENTE SU DI ESSO, SEGUENDO LE ISTRUZIONI IVI INDICATE E LASCIANDO IN BIANCO QUESTO FRONTESPIZIO. In ogni caso, le soluzioni degli esercizi dimostrativi devono essere riportate nello spazio apposito presente appena dopo il testo dei problemi stessi.
3. La prova consiste di 17 problemi divisi in 3 gruppi. All'interno di ogni gruppo, i problemi appaiono in *approssimativo* ordine crescente di difficoltà.
4. Nei problemi dal numero 1 al numero 12 sono proposte 5 risposte possibili, indicate con **A, B, C, D, E**. **Una sola** delle risposte è corretta. La lettera corrispondente alla risposta corretta dovrà essere riportata, per ogni quesito, in questa pagina nella relativa finestrella più in basso. Ogni risposta **giusta vale 5 punti**, ogni risposta **errata vale 0 punti** e ogni problema lasciato **senza risposta vale 1 punto**.
5. I problemi 13 e 14 richiedono una risposta che è data da un numero intero. Questo numero intero va indicato in questa pagina nella relativa finestrella più in basso. Ogni risposta **giusta vale 5 punti**, ogni risposta **errata vale 0 punti** e ogni problema lasciato **senza risposta vale 1 punto**.
6. I problemi 15, 16, 17 richiedono una dimostrazione. Ti invitiamo a formulare le soluzioni in modo chiaro e conciso usufruendo dello spazio riservato nelle seguenti pagine e consegnando soltanto i fogli di questo fascicoletto. Tali problemi verranno valutati con un punteggio **da 0 a 15**.
7. Quando l'insegnante dà il via, comincia a lavorare. Hai **3 ore** di tempo. Buon lavoro!

**Da riempirsi da parte dello studente**

*(se presente il foglio risposte a lettura ottica, non compilare)*

Nome:__________ Cognome:__________ Data di nascita:__________

Genere: [F] [M] [altro/preferisco non specificare] Taglia per eventuale maglietta: [S] [M] [L] [XL]

Scuola:__________ Anno di corso: [1] [2] [3] [4] [5]

Città:__________

**Risposte ai primi 14 quesiti – Non sono ammesse correzioni o cancellature**

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | | | | | | | |

**Da riempirsi a cura dell'insegnante**

Valutazione esercizi dimostrativi

| 15 | 16 | 17 |
|---|---|---|
| | | |

Punteggio totale

| TOT |
|---|
| |

Sito internet delle olimpiadi: `http://olimpiadi.dm.unibo.it`
Forum delle olimpiadi: `http://www.oliforum.it`

## Problemi a risposta multipla – 5 punti

1. Daniele vuole risolvere esattamente 1000 problemi come allenamento per Cesenatico, con alcune regole: non deve risolvere alcun problema di geometria, mentre ne deve risolvere almeno uno di algebra, uno di combinatoria, e uno di teoria dei numeri. Inoltre, i problemi risolti di combinatoria devono essere il doppio di quelli di algebra, e quelli di teoria dei numeri devono essere strettamente più di quelli di combinatoria. In quanti modi può scegliere le quantità di problemi da risolvere per ogni materia?

   **(A)** 199 **(B)** 200 **(C)** 333 **(D)** 400 **(E)** 1000

2. Dieci persone sono sedute a una tavola rotonda. Alcune di esse sono cavalieri, che dicono sempre la verità, mentre le altre sono furfanti, che mentono sempre. Ad un certo punto, tutti insieme esclamano: "I miei vicini **non** sono entrambi cavalieri". Quante sono le possibili disposizioni di cavalieri e furfanti intorno alla tavola, considerando come identiche due disposizioni ottenute l'una dall'altra per rotazione?

   **(A)** 2 **(B)** 3 **(C)** 4 **(D)** 12 **(E)** 13

3. È ben noto che un anno marziano corrisponde a tre anni venusiani. Una venusiana e un marziano, chiacchierando durante un Capodanno marziano, scoprono che l'età della venusiana (in anni venusiani) è la metà dell'età del marziano (in anni marziani). Tempo dopo si incontrano nuovamente in occasione di un altro Capodanno marziano, e questa volta l'età della venusiana (sempre in anni venusiani) è il doppio di quella del marziano (in anni marziani). Quale delle seguenti affermazioni è sicuramente corretta?

   **(A)** L'età iniziale della venusiana era pari **(B)** Il numero di anni marziani trascorsi tra i due incontri è pari **(C)** L'età finale del marziano è dispari **(D)** Il numero di anni marziani trascorsi tra i due incontri è multiplo di 3 **(E)** Nessuna delle precedenti

4. Siano $ABCD$ un quadrato, $P$ un punto sul lato $AB$ e $Q$ un punto sul segmento $CP$. Sapendo che le aree dei poligoni $BCP$, $CDQ$ e $DAPQ$ sono rispettivamente 6, 7 e 3, determinare la lunghezza del segmento $CQ$.

   **(A)** 4 **(B)** $\frac{35}{8}$ **(C)** $2\sqrt{6}$ **(D)** $\sqrt{30}$ **(E)** $\frac{13}{2}$

5. Due dadi a sei facce hanno ciascuna faccia colorata di arancione oppure di verde (il numero di facce di ciascun colore può essere diverso sui due dadi). Lanciandoli contemporaneamente, la probabilità che escano due facce dello stesso colore è del 50%. Quanto vale al massimo il numero totale di facce arancioni presenti sui due dadi?

   **(A)** 6 **(B)** 7 **(C)** 8 **(D)** 9 **(E)** 10

6. Alessandra sceglie un intero positivo $n$ e dice a Paolo che il più grande divisore di $n$ diverso da $n$ è uguale a $k$ volte il più piccolo divisore di $n$ maggiore di 1. Paolo conosce il valore di $k$ e osserva che, con questa informazione, esistono esattamente tre possibili valori di $n$. Quale dei seguenti può essere il valore di $k$?

   **(A)** 11 **(B)** 27 **(C)** 30 **(D)** 49 **(E)** 55

7. Federica traccia all'interno di una circonferenza $\Gamma$ due corde $AB$ e $CD$ in modo che siano perpendicolari tra loro. Detto $P$ il loro punto di intersezione, nota che $AP = 4$, $PB = 12$ e $CP = 6$. Quanto vale l'area del cerchio delimitato da $\Gamma$?

   **(A)** $50\pi$ **(B)** $64\pi$ **(C)** $65\pi$ **(D)** $68\pi$ **(E)** $69\pi$

8. Sia $p(x)$ un polinomio tale che, se $n$ è un numero intero positivo nella cui scrittura decimale compaiano solo cifre 4, allora $p(n)$ è il numero ottenuto concatenando la scrittura decimale di $n$ con se stessa. Quindi, ad esempio, $p(4) = 44$ e $p(44444) = 4444444444$. Quanto vale $p(10)$?

   **(A)** 110 **(B)** 245 **(C)** 325 **(D)** 1010 **(E)** Non esiste un tale polinomio

9. Quante sono le coppie $(x,y)$ di numeri interi positivi palindromi di quattro cifre tali che la differenza $x - y$ sia ancora un numero intero positivo palindromo?

   *Nota.* Un intero positivo è detto *palindromo* se la sua scrittura decimale, letta da destra a sinistra, coincide con la scrittura decimale stessa. Ad esempio, 123454321 è un numero palindromo, mentre 330 non lo è.

   **(A)** 1980 **(B)** 1988 **(C)** 2004 **(D)** 2033 **(E)** Nessuna delle precedenti

10. Quante sono le coppie $(a, b)$ di interi positivi, entrambi minori di 31, per cui esiste un polinomio $p(x,y)$ a coefficienti interi in due variabili tale che $p(5, 1) = a$ e $p(17, 19) = b$?

    **(A)** 120 **(B)** 150 **(C)** 216 **(D)** 323 **(E)** 900

11. Sia $ABCD$ un trapezio di basi $AB$ e $CD$ tale che $AB = AC = BD > CD$. Sia $Q$ il punto di intersezione delle diagonali del trapezio. Supponiamo che esista un punto $P$ tale che $PA = PB = CD$ e $PC = QC$. Sia $\beta$ la somma dei possibili valori, in gradi, dell'angolo $\widehat{CAB}$. Quale delle seguenti disuguaglianze è vera?

    **(A)** $\beta \leq 60°$ **(B)** $60° < \beta \leq 120°$ **(C)** $120° < \beta \leq 180°$ **(D)** $180° < \beta \leq 240°$ **(E)** $\beta > 240°$

12. Determinare il minimo di $x + y$ al variare di $x, y$ fra i numeri reali che soddisfano $x + 1 \geq 0$, $y + 2 \geq 0$ e $x - 3\sqrt{x+1} = 3\sqrt{y+2} - y$.

    **(A)** $-9 + 6\sqrt{3}$ **(B)** $9 - 3\sqrt{15}$ **(C)** $3 + \sqrt{5}$ **(D)** $8 + \sqrt{5}$ **(E)** $\frac{9+3\sqrt{21}}{2}$

## Problemi a risposta numerica – 5 punti

13. La casa di Paola si trova nel punto $P$ di una lunga strada rettilinea. Paola si allena lungo la strada alternando tratti di 5 minuti di corsa a 13km/h a tratti di 3 minuti di cammino a 5km/h. Avendo terminato un tratto di corsa a 100m da $P$, per concludere l'allenamento decide di:

    - camminare verso $P$ per un tratto lungo $x$ metri, con $x < 100$;
    - cambiare direzione e finire i 3 minuti di cammino allontanandosi da $P$;
    - correre per 5 minuti continuando ad allontanarsi da $P$, quindi cambiare direzione e finire l'allenamento con 3 minuti di cammino e 5 di corsa verso $P$.

    Quanto deve valere $x$ affinché l'allenamento finisca esattamente davanti a casa di Paola?

14. Quante sono le terne ordinate di interi positivi $(x, y, z)$ che risolvono l'equazione $x + y + z + \mathrm{MCD}(x, y, z) = 24$?

15. **ESERCIZIO DIMOSTRATIVO**

Sia $ABC$ un triangolo isoscele su base $BC$. Detto $P$ il piede della bisettrice uscente da $B$, supponiamo che si abbia $BC = BP$.

(a) Dimostrare che $AP = BC$.

(b) Calcolare il rapporto $\frac{BC}{AB}$.

(c) Consideriamo la circonferenza con centro $B$ e raggio $BC$ e chiamiamo $Q$ la sua intersezione con il lato $AB$. Sia inoltre $I$ l'incentro di $ABC$. Dimostrare che $CPQI$ è un parallelogramma.

---

**SOLUZIONE:**

Nome: ____________________ Cognome: ____________________

16. **ESERCIZIO DIMOSTRATIVO**

Un agricoltore ha suddiviso il suo terreno quadrato in una griglia $11 \times 11$ e intende piantare in ciascuna delle 121 caselle esattamente un albero, che può essere un *ciliegio* oppure un *pesco*.
Un ciliegio fiorisce se, nella riga in cui si trova, il numero di ciliegi è strettamente maggiore del numero di peschi. Un pesco fiorisce se, nella colonna in cui si trova, il numero di peschi è strettamente maggiore del numero di ciliegi.

(a) Dimostrare che, quali che siano gli alberi che l'agricoltore deciderà di piantare, almeno uno di essi fiorirà.

(b) Sia $c$ un numero intero tale che $6 \leq c \leq 55$ o $66 \leq c \leq 115$. Dimostrare che è possibile piantare $c$ ciliegi e $121 - c$ peschi in modo che tutti gli alberi fioriscano.

(c) Sia $c$ un numero intero tale che $56 \leq c \leq 65$. Dimostrare che, in qualunque modo vengano piantati $c$ ciliegi e $121 - c$ peschi, c'è almeno un albero che non fiorirà.

---

**SOLUZIONE:**

Nome:______________________ Cognome:______________________

17. **ESERCIZIO DIMOSTRATIVO**

Determinare tutte le terne ordinate di numeri interi positivi $(a, b, c)$ tali che valga l'uguaglianza

$$a! = 2^b + 2^c.$$

*Nota.* Il simbolo $a!$ denota il prodotto $1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot a$ degli interi positivi minori o uguali ad $a$. Ad esempio, $5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$.

---

**SOLUZIONE:**

Nome:______________________________Cognome:____________________________________________

Questa gara non sarebbe stata possibile senza la preziosa collaborazione di tutti coloro che hanno proposto, risolto, modificato e testato i problemi:
Dario Ascari, Davide Averoldi, Giovanni Barbarino, Lorenzo Benedini, Luigi Amedeo Bianchi, Alberto Cagnetta, Carlo Càssola, Daniele Depietri, Stefano Di Iulio, Massimiliano Foschi, Leonardo Franchi, Giovanni Interdonato, Alessandro Iraci, Giovanni Italiano, Silvia Kuzmin, Andrea Maggi, Giovanni Marzenta, Giuseppe Mascellani, Andrea Matiacic, Ludovico Pernazza, Matteo Protopapa, Luca Sartori, Eugenio Trovarelli.

Alessandra Caraceni, Davide Lombardo, Federica Bertolotti, Francesca Rizzo

# Soluzione dei Quesiti

1. La risposta è **(A)**. Sia $x$ il numero di problemi di algebra; sappiamo allora che i problemi di combinatoria sono $2x$. Poiché Daniele non deve risolvere alcun problema di geometria, i restanti $1000 - 3x$ sono tutti di teoria dei numeri. La quantità di problemi per ogni materia è quindi univocamente determinata per ogni scelta di $x$. Inoltre, abbiamo che $1000 - 3x > 2x$, ovvero $x < 200$. I modi di scegliere $x$ (e quindi la quantità di problemi per ciascuna materia) sono dunque tanti quanti gli interi strettamente positivi minori di 200, ovvero 199.

2. La risposta è **(B)**. Osserviamo che i vicini di un furfante sono necessariamente cavalieri, mentre un cavaliere può essere compreso fra due furfanti o fra un cavaliere ed un furfante. Indichiamo con `C` un cavaliere e con `F` un furfante e proviamo a costruire tutte le possibili sequenze a meno di rotazione.

   Supponiamo inizialmente che non ci siano mai due cavalieri vicini. Allora cavalieri e furfanti devono alternarsi, in quanto un furfante non può essere vicino a un altro furfante. A meno di rotazione, otteniamo quindi un'unica sequenza data da `CFCFCFCFCF`.

   Supponiamo ora che ci siano due cavalieri vicini (`CC`). Per quanto detto sopra, ai lati di questa coppia ci devono essere due furfanti, uno per lato (`FCCF`). Poiché un furfante è necessariamente di fianco a due cavalieri, otteniamo che la sottosequenza attorno alla coppia di cavalieri è data da `CFCCFC`. Dobbiamo quindi completare la disposizione a tavola con altre quattro persone. Ci sono due casi possibili:

   (a) se dopo la sequenza `CFCCFC` aggiungiamo un cavaliere (`CFCCFCC`), allora con ragionamenti analoghi ai precedenti otteniamo che questo ultimo cavaliere deve essere seguito necessariamente da un furfante (`CFCCFCCF`), quindi poi da un cavaliere (`CFCCFCCFC`). Notiamo ora che l'ultima persona al tavolo deve essere un furfante: se infatti fosse un cavaliere, questo sarebbe preceduto e seguito da un cavaliere, contraddicendo la prima affermazione di questa soluzione. Otteniamo quindi la sequenza ammissibile `CFCCFCCFCF`.

   (b) Se invece dopo la sequenza `CFCCFC` c'è un furfante (`CFCCFCF`), allora si prosegue necessariamente con un cavaliere (`CFCCFCFC`). Ora al tavolo si possono seguire nell'ordine un cavaliere e un furfante (`CFCCFCFCCF`) oppure un furfante e un cavaliere (`CFCCFCFCFC`). Si osservi che la disposizione corrispondente alla sequenza `CFCCFCFCFC` si ottiene ruotando la disposizione corrispondente alla sequenza `CFCCFCCFC`, già vista nel caso precedente.

   Ci sono quindi 3 possibili disposizioni, che sono date da `CFCFCFCFCF`, `CFCCFCCFCF` e `CFCCFCFCCF`.

3. La risposta è **(D)**. Sia $M$ l'età del marziano (in anni marziani) e $V$ l'età della venusiana (in anni venusiani) al momento del loro primo incontro. Sia inoltre $T$ il numero di anni marziani trascorsi tra il primo e il secondo incontro.

   Si ha che l'età del marziano (in anni marziani) al secondo incontro è data da $M + T$. Poiché ogni anno marziano corrisponde a 3 anni venusiani, l'età della venusiana (in anni venusiani) al secondo incontro è data da $V + 3T$.

   Le relazioni tra le età fornite si possono quindi tradurre come

$$\begin{cases} M = 2V, \\ V + 3T = 2 \cdot (M + T), \end{cases} \qquad \iff \qquad \begin{cases} M = 2V, \\ T = 3V. \end{cases}$$

   Ne segue che gli anni trascorsi tra i due incontri è multiplo di 3. Per vedere che le altre condizioni non sono necessariamente soddisfatte, basta considerare i seguenti casi:

   - con $V = 5$ si ha $M = 10$ e $T = 15$, da cui si ha che l'età $V$ iniziale della venusiana e il numero di anni $T$ trascorso tra i due incontri non sono necessariamente pari. Si escludono quindi le risposte **(A)** e **(B)**.
   - se consideriamo $V = 4$ e quindi $M = 8$ e $T = 12$, otteniamo che l'età finale del marziano è $M + T = 20$, che non è dispari, escludendo anche la risposta **(C)**.

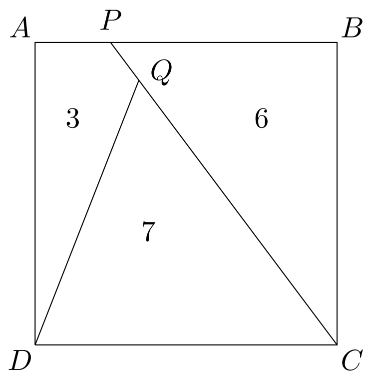
4. La risposta è **(B)**. L'area totale del quadrato è $6+7+3=16$, dunque i suoi lati misurano $\sqrt{16}=4$. In particolare, dato che il triangolo $PBC$ è rettangolo con area 6 e $BC=4$, allora

$$PB = \frac{6 \cdot 2}{4} = 3$$

e quindi

$$PC = \sqrt{4^2+3^2} = 5.$$

Consideriamo ora i triangoli $CDQ$ e $CDP$: l'area del primo è 7, mentre quella del secondo è la metà di quella del quadrato, ovvero 8. Allora, dato che condividono $CD$, il rapporto tre le loro altezze relative è $\frac{7}{8}$, che per Talete è anche il rapporto tra $CQ$ e $CP$. Quindi $CQ$ misura $\frac{7}{8} \cdot 5 = \frac{35}{8}$.




5. La risposta è **(D)**.

**Prima soluzione:** Sia $a$ il numero di facce arancioni del primo dado e $b$ quello del secondo, con $0 \leq a, b \leq 6$. La probabilità che, al lancio simultaneo, escano due facce dello stesso colore è

$$P = \frac{a}{6} \cdot \frac{b}{6} + \frac{6-a}{6} \cdot \frac{6-b}{6} = \frac{ab+(6-a)(6-b)}{36}.$$

Dalla condizione $P = \frac{1}{2}$ si ricava

$$ab + (6-a)(6-b) = 18.$$

Sviluppando, si ottiene

$$ab - 3a - 3b + 9 = 0$$

e fattorizzando

$$(a-3)(b-3) = 0.$$

Otteniamo quindi probabilità del 50% se e solo se $a=3$ oppure $b=3$, cioè se e solo se uno dei due dadi ha 3 facce arancioni. Quindi, per massimizzare $a+b$ basta prendere un dado con 3 facce arancioni e l'altro con 6 facce arancioni: il massimo è quindi dato da

$$a + b = 3 + 6 = 9.$$

**Seconda soluzione:** È possibile che ci siano 9 facce arancioni: infatti, se un dado fosse colorato completamente di arancione e l'altro avesse esattamente 3 facce arancioni, la probabilità di ottenere due facce dello stesso colore lanciando contemporaneamente i dadi sarebbe uguale alla probabilità di ottenere una faccia arancione nel dado bicolore, la quale è del 50%.

D'altro canto, se per assurdo ci fossero almeno 10 facce arancioni in totale, allora un dado avrebbe almeno 4 facce arancioni e l'altro ne avrebbe almeno 5. Quindi la probabilità di ottenere ottenere due facce arancioni lanciando contemporaneamente i dadi sarebbe maggiore o uguale a $\frac{4}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{10}{18}$, che è strettamente maggiore di $\frac{1}{2}$.

6. La risposta è **(E)**. Sia $p$ il più piccolo divisore di $n$ maggiore di 1. Allora $p$ è primo e $\frac{n}{p}$ è il più grande divisore di $n$ più piccolo di $n$. Per ipotesi vale allora $\frac{n}{p} = kp$, da cui segue $n = kp^2$.

   Sia ora $q$ il più piccolo primo che divide $k$ (se $k = 1$, allora $n = p^2$ e, al variare di $p$, si ottengono infiniti $n$, quindi non è il caso richiesto). I primi che dividono $n = kp^2$ sono $p$ e quelli che dividono $k$, quindi $p$ è il più piccolo divisore di $n$ maggiore di 1 se e solo se $p \leq q$. Dunque fissato $q$, il numero dei possibili valori di $n$ coincide con il numero dei primi $p \leq q$.

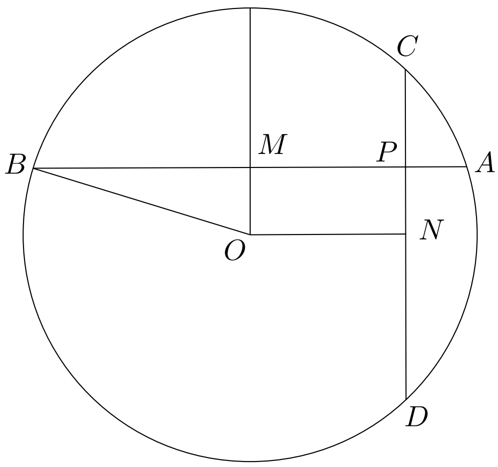
   Riassumendo, dato $k$, il numero di possibili valori di $n$ tali per cui $n = kp$ è dato dal numero di numeri primi minori o uguali a $q$, dove $q$ è il più piccolo divisore diverso da 1 che divide $k$. Dalle ipotesi del problema sappiamo che tale valore è uguale a 3 e, poiché 5 è l'unico numero primo che è maggiore o uguale a esattamente tre numeri primi (che sono 2, 3, 5), si ha che $q = 5$. Abbiamo quindi ottenuto che $k$ deve essere divisibile per 5, ma non per 2 né per 3. Ciò accade solamente nell'opzione **(E)**.

7. La risposta è **(C)**. Dal testo sappiamo che $AP = 4$, $PB = 12$ e $CP = 6$, quindi per il teorema delle corde troviamo
$$PD = \frac{AP \cdot PB}{CP} = 8.$$

   Siano $M$ e $N$ i punti medi di $AB$ e $CD$ rispettivamente, così che
$$AM = MB = \frac{AP + BP}{2} = 8, \quad CN = ND = \frac{CP + DP}{2} = 7,$$
   da cui
$$PN = PD - ND = 8 - 7 = 1.$$

   Sia $O$ il centro della circonferenza $\Gamma$. Poiché l'asse di ogni corda passa per il centro del cerchio, si ha che $OM$ è perpendicolare a $AB$ e $ON$ è perpendicolare a $CD$. Essendo $AB$ perpendicolare a $CD$ per ipotesi, si ha che il quadrilatero $ONPM$ è un rettangolo e quindi $OM = PN = 1$.

   Per il teorema di Pitagora si ha quindi
$$OB^2 = OM^2 + MB^2 = 1 + 64 = 65,$$
   da cui si ottiene che l'area contenuta dentro $\Gamma$ è data da
$$\pi OB^2 = 65\pi.$$




8. La risposta è **(B)**. Sia $a_n = \underbrace{4\ldots4}_{n \text{ volte}}$, con $n \geq 1$ intero e si noti che
$$a_n = \underbrace{4\ldots4}_{n \text{ volte}} = 4 \cdot \underbrace{1\ldots1}_{n \text{ volte}} = \frac{4}{9} \cdot \underbrace{9\ldots9}_{n \text{ volte}} = \frac{4}{9}(10^n - 1).$$

In particolare, $10^n = \frac{9}{4}a_n + 1$. Allora si ha

$$p(a_n) = \underbrace{4\ldots4}_{2n \text{ volte}} = \frac{4}{9}\cdot\underbrace{9\ldots9}_{2n \text{ volte}} = \frac{4}{9}(10^{2n}-1) = \frac{4}{9}\left(\left(\frac{9}{4}a_n+1\right)^2 - 1\right),$$

dove l'ultima espressione scritta è un polinomio di secondo grado in $a_n$. Pertanto, detto

$$q(x) = \frac{4}{9}\left(\left(\frac{9}{4}x+1\right)^2 - 1\right) = x\left(\frac{9}{4}x+2\right),$$

si ha che $q(a_n) = p(a_n) = a_{2n}$ per ogni intero positivo $n$. Poiché $q(x)-p(x)$ si annulla per infiniti valori di $x$ (tutti quelli della forma $a_n$), ne segue che $q(x)-p(x)$ è identicamente nullo e quindi i polinomi $p$ e $q$ coincidono. Possiamo quindi dedurre che

$$p(10) = q(10) = 10\cdot\left(\frac{9}{4}10+2\right) = 245.$$

9. La risposta è **(C)**. Siano $x = \overline{abba}$ e $y = \overline{cddc}$ le scritture in base 10 di $x$ e $y$, dove $a, b, c, d$ sono quattro cifre ($0 \le a, b, c, d \le 9$ e $a, c \ne 0$). Visto che $x-y$ è un intero positivo, necessariamente $a \ge c$. Inoltre, se fosse $a = c$, allora $x-y$ avrebbe la cifra delle unità nulla e ciò è assurdo in quanto $x-y$ è palindromo (un numero non può iniziare a sinistra con uno zero). Quindi $a > c$.

   Ci sono 4 casi possibili a seconda del numero di cifre della differenza $x-y$:

   - 4 cifre: la cifra delle unità di $x-y$ è uguale a $a-c \ge 1$. D'altra parte, svolgendo l'operazione in colonna, si nota che la cifra delle migliaia di $x-y$ può essere:
     - ⋆ $a-c$, nel caso in cui non ci siano riporti, quindi con $b \ge d$,
     - ⋆ $a-c-1$, se invece abbiamo un riporto quando calcoliamo la cifra delle centinaia.

     Visto che $x-y$ è palindromo di quattro cifre, abbiamo che la cifra delle migliaia è $a-c$ e che quindi non ci possono essere riporti, cioè $b \ge d$.

     Inoltre, svolgendo l'operazione in colonna con queste ipotesi ($c < a$ e $d \le b$) si ottiene

$$\begin{array}{ccccc} a & b & b & a & - \\ c & d & d & c & \\ \hline a-c & b-d & b-d & a-c, & \end{array}$$

     dove $0 < a-c \le 9$ e $0 \le b-d \le 9$. Otteniamo quindi che in questo caso $x-y$ è un numero palindromo di quattro cifre.

     Contiamo ora le coppie di questo tipo: il numero di coppie di cifre $(a, c)$ con $1 \le c < a \le 9$ è pari al numero di modi di scegliere 2 numeri distinti dall'insieme $\{1, \ldots, 9\}$, ossia $\binom{9}{2} = 36$ possibilità. Il numero di coppie di cifre $(b, d)$ con $0 \le b \le d \le 9$ si può ottenere per differenza tra il totale delle coppie possibili, dato da $10^2$, e il numero di coppie $(b, d)$ con $b > d$, dato da $\binom{10}{2} = 45$. Questo caso dà un totale di

$$36\cdot(100-45) = 1980$$

     coppie $(x, y)$ possibili.

   - 3 cifre: se $a \ge c+2$, allora $x-y > 1000$ e quindi non potrebbe avere tre cifre. Pertanto $a = c+1$ e la cifra delle unità di $x-y$ è 1. Essendo palindromo e di tre cifre, anche la cifra delle centinaia di $x-y$ è uguale a 1. Inoltre, affinché $x-y$ abbia tre cifre, necessariamente ci devono essere dei riporti e quindi $b < d$. In particolare, ci sarà un riporto nella colonna delle decine e uno in quelle delle centinaia. L'operazione in colonna si scrive come segue:

$$\begin{array}{ccccc} \overset{c}{\cancel{c+1}} & {}^{+10}\overset{b-1}{\cancel{b}} & {}^{+10}b & c+1 & - \\ c & d & d & c & \\ \hline / & 1 & ? & 1 & \end{array}$$

Visto che la cifra delle centinaia deve essere necessariamente 1, dall'operazione in colonna si ottiene l'uguaglianza

$$10 + (b-1) - d = 1 \implies d - b = 8$$

e visto che $b, d$ sono cifre, le uniche possibilità sono $(b, d) \in \{(0, 8), (1, 9)\}$.

Riassumendo, si hanno 8 scelte per $(a, c) = (c+1, c)$ e 2 scelte per $(b, d) = (b, b+8)$, quindi 16 coppie $(x, y)$ possibili.

- 2 cifre: per quanto detto nel caso precedente, affinché $x - y$ abbia 2 cifre, si ha $a = c + 1$ e ci devono essere dei riporti nella differenza in colonna di $x - y$, quindi $b < d$. Sempre per il caso precedente, risulta che la cifra delle centinaia di $x - y$ è data da

$$10 + (b-1) - d = 9 + b - d$$

e deve essere nulla. Pertanto $d - b = 9$ e l'unica possibilità è che $b = 0$ e $d = 9$.

Questo porta ai numeri con scrittura decimale $x = \overline{(c+1)00(c+1)}$ e $y = \overline{c99c}$, dove $1 \le c \le 8$. Si noti che in questo caso $x - y = 11$, che è palindromo. Otteniamo quindi altre 8 coppie $(x, y)$ possibili.

- 1 cifra: alla luce del caso precedente, la differenza minima tra due numeri palindromi di 4 cifre è 11, quindi questo caso non ha soluzioni.

Riassumendo, ci sono $1980 + 16 + 8 = 2004$ possibilità totali per la coppia $(x, y)$.

10. La risposta è **(B)**. Si noti che $17 = 5 + 2 \cdot 6$. Quindi otteniamo che per ogni $k$ intero positivo, si ha che $17^k = (5 + 2 \cdot 6)^k$ restituisce lo stesso resto di $5^k$ nella divisione per 6: ciò si può per esempio vedere facilmente usando la formula di Newton per le potenze. Analogamente, poiché $19 = 1 + 3 \cdot 6$ si ha che $19^k$ e $1^k$ danno lo stesso resto nella divisione per 6.

Da ciò si può ottenere facilmente che $p(5, 1) = a$ e $p(17, 19) = b$ restituiscono lo stesso resto nella divisione per 6 e quindi $a - b$ è un multiplo di 6.

Dati ora due interi positivi $a, b$ tali che $a - b$ sia divisibile per 6, costruiamo un polinomio con $p(5, 1) = a$ e $p(17, 19) = b$. Consideriamo

$$p(x, y) = k(x-5) + l(y-1) + a, \qquad k, l \in \mathbb{Z};$$

così che $p(5, 1) = a$ e

$$p(17, 19) = 12k + 18l + a.$$

Dato che $\mathrm{MCD}(12, 18) = 6$ e $a - b$ è multiplo di 6, per il teorema di Bézout esistono interi $k$ e $l$ tali che

$$12k + 18l = b - a,$$

e quindi $p(17, 19) = b$.

Abbiamo quindi ottenuto che le copie $(a, b)$ che soddisfano le condizioni del problema sono esattamente quelle per cui $1 \le a, b \le 30$ e per cui $a - b$ è multiplo di 6. Per ogni valore fissato di $a$, ci sono esattamente 5 possibili valori di $b$ in $\{1, \dots, 30\}$ che rendono $(a, b)$ una coppia accettabile. Poiché $a$ può assumere 30 valori distinti, il numero totale di coppie è

$$30 \cdot 5 = 150.$$

11. La risposta è **(B)**.

**Prima soluzione:** Dato che le diagonali del trapezio $ABCD$ sono congruenti, il trapezio è isoscele.

Sia $r$ l'asse del segmento $AB$. Si ha $Q \in r$; inoltre, dato che $PA = PB$, si ha anche $P \in r$. Dato che $ABCD$ è un trapezio isoscele, $r$ è anche l'asse di $CD$, e quindi si ha che $PD = PC = QC = QD$. In particolare, i triangoli $CDP$ e $CDQ$ sono congruenti per il terzo criterio di congruenza. Dunque ci sono due casi:

(a) $P \equiv Q$, oppure

(b) $P$ è il simmetrico di $Q$ rispetto a $CD$.

Sia $\alpha = \widehat{CAB}$. Dato che il trapezio $ABCD$ è isoscele e dato che i triangoli $CDP$ e $CDQ$ sono isosceli e congruenti, si ha che

$$\alpha = \widehat{CAB} = \widehat{BDC} = \widehat{ABD} = \widehat{ACD} = \widehat{CDP} = \widehat{DCP}.$$

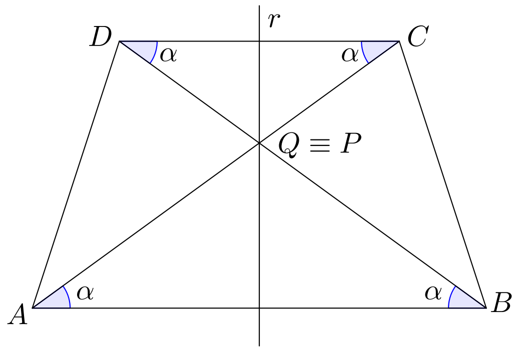
Trattiamo i due casi separatamente:

(a) Supponiamo $P \equiv Q$. I triangoli $ABP$ e $DBC$ risultano congruenti per il primo criterio di congruenza in quanto $AB = BD$, $CD = PA$ e $\widehat{BAP} = \alpha = \widehat{BDC}$. In particolare, si ha che $\widehat{CBD} = \widehat{PBA} = \alpha$ in quanto elementi corrispondenti. Perciò $\widehat{ABC} = \widehat{PBA} + \widehat{CBD} = 2\alpha$.

Dato che il triangolo $ABC$ è isoscele, vale $\widehat{ACB} = \widehat{ABC} = 2\alpha$. Infine, considerando la somma degli angoli interni nel triangolo $ABC$ otteniamo

$$180^\circ = \widehat{CAB} + \widehat{ACB} + \widehat{ABC} = \alpha + 2\alpha + 2\alpha = 5\alpha,$$

da cui $\alpha = 36^\circ$.




(b) Supponiamo $P \not\equiv Q$. Dato che $PD = PC = QC = QD$ e i punti $P$,$Q$ sono distinti, il quadrilatero $CPDQ$ è un rombo.

In particolare $AC \parallel PD$, quindi $ACPD$ è un trapezio e, dato che le sue diagonali $PA$ e $CD$ sono congruenti per ipotesi, è un trapezio isoscele. Similmente anche $BCPD$ è un trapezio isoscele, pertanto $BC = PD = PC = DA$.

Il trapezio $ABCD$ è ciclico in quanto isoscele, perciò il punto $A$ appartiene alla circonferenza circoscritta al triangolo $BCD$. Analogamente, dato che il trapezio $BCPD$ è isoscele, anche $P$ appartiene alla circonferenza circoscritta al triangolo $BCD$. Dunque il pentagono $ABCPD$ è ciclico.

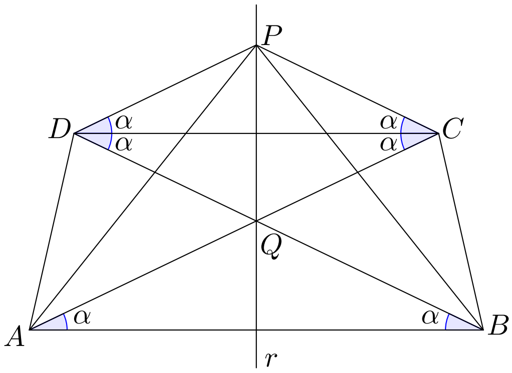
Le corde $BC$,$PD$,$PC$,$DA$ della circonferenza circoscritta a $ABCPD$ sono congruenti, quindi l'arco $\widehat{CA}$ è lungo il triplo dell'arco $\widehat{BC}$ e perciò, considerando agli angoli alla circonferenza, otteniamo

$$\widehat{ABC} = 3 \cdot \widehat{CAB} = 3\alpha.$$

Infine, possiamo concludere come nel caso precedente: il triangolo $ABC$ è isoscele, quindi vale $\widehat{ACB} = \widehat{ABC} = 3\alpha$. Considerando la somma degli angoli interni nel triangolo $ABC$ otteniamo

$$180^\circ = \widehat{CAB} + \widehat{ACB} + \widehat{ABC} = \alpha + 3\alpha + 3\alpha = 7\alpha,$$

da cui $\alpha = \dfrac{180^\circ}{7}$.

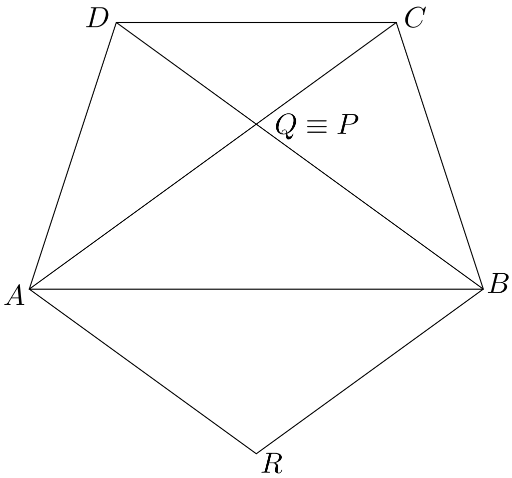



Abbiamo dimostrato che gli unici valori possibili per $\widehat{CAB} = \alpha$ sono $36°$ e $\dfrac{180°}{7}$, pertanto la risposta finale è

$$36° + \frac{180°}{7} = \frac{432°}{7} \approx 61.7°.$$

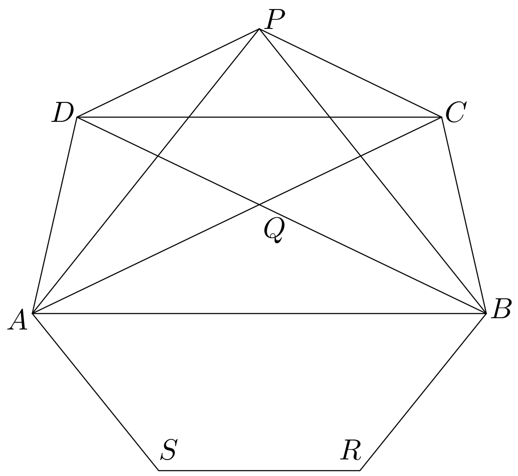
**Seconda soluzione:**

**Step 1:** Dimostriamo che se $ARBCD$ è un pentagono regolare e $Q \equiv P$ è il punto di intersezione delle diagonali $DB$ e $AC$, allora il trapezio $ABCD$ e il punto $P$ soddisfano le ipotesi del problema.




Infatti, i segmenti $AB, AC, BD$ sono congruenti in quanto diagonali del pentagono, $BD > CD$ perché $CD$ è un lato del pentagono, e $PA = PB$ e $PC = QC$ perché $P$ coincide con $Q$. Dato che $\widehat{PBA} = \widehat{CAB} = 36°$, per il teorema dell'angolo esterno si ha che $\widehat{CPB} = 72°$. Inoltre, $\widehat{ACB} = 72°$, e quindi $PB = CB = CD$.

**Step 2:** Dimostriamo che se $ASRBCPD$ è un ettagono regolare, allora il trapezio $ABCD$ e il punto $P$ soddisfano le ipotesi del problema.




Infatti i segmenti $AB, AC, BD$ sono congruenti in quanto diagonali maggiori dell'ettagono, $BD > CD$, perché $CD$ è un lato dell'ettagono, e $PA = PB = CD$ perché tali segmenti sono diagonali minori dell'ettagono.

Inoltre,

$$\widehat{CAB} = \widehat{CDQ} = \widehat{DCQ} = \widehat{CDP} = \widehat{DCP} = \frac{180^\circ}{7},$$

quindi $QC \parallel PD$ e $QD \parallel PC$. Pertanto il quadrilatero $CQDP$ è un parallelogramma (più precisamente, un rombo) e in particolare si ha $PC = QD = QC$.

**Step 3:** Non esistono altre configurazioni possibili.

Proponiamo una dimostrazione di questo fatto utilizzando una tecnica distinta dal "convincersi che è vero mediante autosuggestione", ossia le coordinate cartesiane.

Senza perdita di generalità, possiamo supporre che $A = (-1, 0)$, $B = (1, 0)$, e che $C$ giaccia nel primo quadrante. Sia $C = (x_C, y_C)$, con $x_C > 0$ e $y_C > 0$. Dato che $AC = BD$, il trapezio $ABCD$ è isoscele e dunque $D = (-x_C, y_C)$. Notiamo anche che $AB = 2$ e $CD = 2x_C$, da cui $x_C < 1$.

La condizione $AB = AC$ implica che $(x_C + 1)^2 + y_C^2 = 4$, da cui, dato che $y_C > 0$, si ricava

$$y_C = \sqrt{3 - x_C^2 - 2x_C}.$$

I punti $P = (x_P, y_P)$ e $Q = (x_Q, y_Q)$ appartengono all'asse del trapezio, quindi le loro ascisse sono entrambe 0. Per quanto riguarda l'ordinata di $Q$, essa si può ricavare come intercetta della retta passante per $A$ e $C$, ottenendo

$$y_Q = \frac{y_C}{x_C + 1} = \frac{\sqrt{3 - x_C^2 - 2x_C}}{x_C + 1}.$$

L'ordinata di $P$ si può invece ricavare osservando che la condizione $PA = PB = CD$ implica $1 + y_P^2 = (2x_C)^2$, da cui

$$y_P = \pm\sqrt{4x_C^2 - 1}. \tag{1}$$

Infine, la condizione $PC = QC$ implica $x_C^2 + (y_P - y_C)^2 = x_C^2 + (y_Q - y_C)^2$, da cui

$$(y_P - y_C)^2 = (y_Q - y_C)^2. \tag{2}$$

Se per assurdo fosse $y_P < 0$ allora

$$|y_P - y_C| = |y_P| + y_C > y_C > y_C - y_Q = |y_Q - y_C|,$$

che contraddirebbe la (2). Dunque nella (1) va scelto il segno +. Abbiamo quindi ottenuto

$$P = \left(0, \pm\sqrt{4x_C^2 - 1}\right), \quad Q = \left(0, \frac{\sqrt{3 - x_C^2 - 2x_C}}{x_C + 1}\right).$$

Sostituendo le espressioni per $y_P, y_C$ e $y_Q$ ricavate precedentemente nella (2) si ottiene

$$\left(\sqrt{4x_C^2 - 1} - \sqrt{3 - x_C^2 - 2x_C}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{3 - x_C^2 - 2x_C}}{x_C + 1} - \sqrt{3 - x_C^2 - 2x_C}\right)^2.$$

Per comodità di notazione, sostituiamo la nostra variabile $x_C$ con $x$. Svolgendo i quadrati, moltiplicando per i denominatori, isolando l'unica radice quadrata rimanente e fattorizzando il membro di destra si arriva a

$$2(x+1)^2\sqrt{(4x^2-1)(3-x^2-2x)} = 2(2x+1)(x^3+x^2-x+1).$$

Elevando al quadrato entrambi i membri e successivamente dividendoli per $4(2x+1)$ (cosa lecita poiché $x = x_C > 0$) ricaviamo

$$(x+1)^4(2x-1)(3-x^2-2x) = (2x+1)(x^3+x^2-x+1)^2,$$

da cui

$$4(x^7 + 4x^6 + 4x^5 - x^4 - 4x^3 - 3x^2 + x + 1) = 0.$$

Il polinomio $x^7+4x^6+4x^5-x^4-4x^3-3x^2+x+1$ ha due variazioni di segno tra i suoi coefficienti, quindi per la regola di Cartesio esso ammette al massimo 2 radici reali positive. Ciò implica che $x = x_C$ può assumere al massimo due valori distinti. Dato che $y_C$ è funzione di $x_C$, il punto $C$ può assumere al massimo due posizioni distinte nel piano. Quindi l'angolo $\widehat{CAB}$ può assumere al massimo due valori distinti, che sono (necessariamente) quelli trovati negli Step 1 e 2. Dunque la risposta finale è

$$36^\circ + \frac{180^\circ}{7} = \frac{432^\circ}{7}.$$

12. La risposta è **(E)**. Grazie alle condizioni $x+1 \geq 0$ e $y+2 \geq 0$, si possono effettuare le sostituzioni $u = \sqrt{x+1}$ e $v = \sqrt{y+2}$, dalle quali si ottiene:

$$u^2 + v^2 - 3u - 3v - 3 = 0, \tag{3}$$

che è l'equazione di una circonferenza.

Siccome

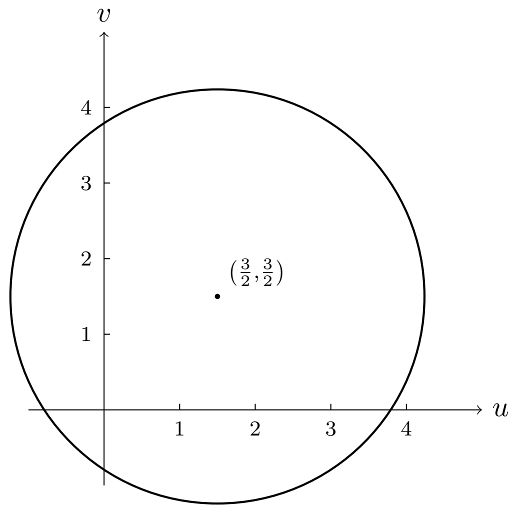
$$x + y = (u^2 - 1) + (v^2 - 2) = u^2 + v^2 - 3 = 3(u + v),$$

per trovare il minimo di $x + y$ bisogna trovare il minimo di $u^2 + v^2$, ovvero bisogna trovare i punti più vicini all'origine lungo la circonferenza descritta dall'equazione (3) nel primo quadrante ($u \geq 0$, $v \geq 0$).

L'equazione si riscrive come

$$\left(u - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(v - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{15}{2},$$

che corrisponde a una circonferenza nel piano $(u,v)$ centrata in $\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$ e con raggio $R = \sqrt{\frac{15}{2}}$.




Pertanto, dovendo essere $u, v \geq 0$, i punti più vicini all'origine sono proprio quelli di intersezione tra la circonferenza e gli assi cartesiani dati da $u = 0$ e $v = 0$: imponendo tale condizione nell'equazione, si ottiene l'equazione di secondo grado

$$u^2 - 3u - 3 = 0,$$

da cui

$$u = \frac{1}{2}(3 + \sqrt{21}).$$

Si noti che la soluzione negativa si può escludere per ipotesi. Pertanto

$$x + y = 3(u + v) = \frac{3}{2}(3 + \sqrt{21}).$$

13. La risposta è 50. Indichiamo con $a$ la distanza in metri percorsa nei 5 minuti di corsa e con $b$ quella nei 3 minuti di cammino.

    Con questa notazione, Paola dopo aver percorso gli $x$ metri in direzione di $P$ si trova a distanza $100 - x$ da $P$. Quindi, nei restanti minuti di cammino percorrerà $b - x$ metri allontanandosi da $P$ e si ritroverà a distanza

    $$(100 - x) + (b - x) = 100 + b - 2x$$

    metri da $P$.

    Nel tratto successivo Paola corre allontanandosi da $P$ di $a$ metri, al termine dei quali sarà a distanza

    $$(100 + b - 2x) + a$$

    metri da $P$.

    Infine, Paola prima cammina e poi corre in direzione $P$, percorrendo $a+b$ metri, da cui si ottiene che la distanza da $P$ finale è data da

    $$(100 + b - 2x + a) - (a + b) = 100 - 2x.$$

    Poiché per ipotesi Paola termina l'allenamento in $P$, si ottiene l'equazione

    $$100 - 2x = 0,$$

    da cui $x = 50$.

14. La risposta è 298. Sia $d = \mathrm{MCD}(x, y, z)$. Allora esistono $a$,$b$,$c$ interi positivi tali che

$$x = da, \quad y = db, \quad z = dc, \quad \mathrm{MCD}(a, b, c) = 1.$$

Sostituendo, si ottiene

$$da + db + dc + d = 24 \implies d(a + b + c + 1) = 24.$$

Necessariamente $d \mid 24$ e, visto che $a+b+c+1 \geq 4$, si ha $d \leq 6$. Quindi gli unici valori possibili di $d$ sono $1, 2, 3, 4, 6$. Si ottiene allora l'equazione

$$a + b + c = \frac{24}{d} - 1, \tag{4}$$

dove $d \in \{1, 2, 3, 4, 6\}$. Notiamo che per tali valori di $d$, il numero $\frac{24}{d} - 1$ è uguale rispettivamente a $23, 11, 7, 5, 3$, ed è quindi sempre primo. Ne segue che ogni terna di interi positivi $(a, b, c)$ che soddisfa l'equazione (4) soddisfa anche la condizione $\mathrm{MCD}(a, b, c) = 1$: infatti, poiché

$$\mathrm{MCD}(a, b, c) \mid a + b + c = \frac{24}{d} - 1,$$

e $\frac{24}{d} - 1$ è primo, si ha $\mathrm{MCD}(a, b, c) = 1$ oppure $\mathrm{MCD}(a, b, c) = a + b + c$; essendo

$$\mathrm{MCD}(a, b, c) \leq a < a + b + c,$$

otteniamo $\mathrm{MCD}(a, b, c) = 1$.

Quindi, per $d \in \{1, 2, 3, 4, 6\}$, sono accettabili tutte le terne $(a, b, c)$ di interi positivi che soddisfano l'equazione (4).

Per risolvere il problema è quindi sufficiente contare tali terne. Per far ciò possiamo usare il metodo delle *palline e sbarre* come segue: immaginiamo una successione di $\frac{24}{d} - 1$ palline e inseriamo tra di esse 2 sbarre in posizioni diverse tra loro; facendo ciò, abbiamo suddiviso le $\frac{24}{d} - 1$ palline in tre sottogruppi; $a$ sarà il numero di palline che precedono la prima sbarra inserita, $b$ sarà il numero di palline tra la prima e la seconda sbarra, mentre $c$ il numero di palline dopo la seconda sbarra; per costruzione avremo $a + b + c = \frac{24}{d} - 1$. Abbiamo quindi ridotto il nostro problema a contare il numero di modi in cui si possono inserire due sbarre tra le $\frac{24}{d} - 1$ palline. Visto che ogni sbarra può essere posizionata in

$$\left(\frac{24}{d} - 1\right) - 1 = \frac{24}{d} - 2$$

posizioni possibili e che l'ordine delle sbarre non ha importanza, otteniamo

$$\binom{24/d - 2}{2}$$

configurazioni possibili, ciascuna corrispondente a una terna che soddisfa l'equazione (4).

Le soluzioni cercate sono quindi

$$\binom{22}{2} + \binom{10}{2} + \binom{6}{2} + \binom{4}{2} + \binom{2}{2} = 298.$$

15. (a) **Prima Soluzione:** Dato che i triangoli $ABC$ e $BCP$ sono isosceli, si ha che $\widehat{ABC} = \widehat{ACB} = \widehat{BPC}$. Inoltre, per ipotesi vale $2 \cdot \widehat{ABP} = \widehat{ABC}$. Applicando il teorema dell'angolo esterno, otteniamo $\widehat{BPC} = \widehat{ABP} + \widehat{BAC}$. Abbiamo quindi

$$2 \cdot \widehat{ABP} = \widehat{ABC} = \widehat{BPC} = \widehat{ABP} + \widehat{BAC},$$

da cui $\widehat{ABP} = \widehat{BAC}$ e perciò $AP = BP = BC$.

**Seconda soluzione:** Si osservi che i triangoli $ABC$ e $BPC$ sono simili, in quanto isosceli con $\widehat{BCA}$ angolo in comune. Pertanto,

$$\widehat{ABP} = \widehat{CBP} = \widehat{ABP}.$$

Deduciamo che il triangolo $ABP$ è isoscele e, quindi, $BP = AP$.

(b) La risposta è $\frac{\sqrt{5}-1}{2} = \frac{2}{\sqrt{5}+1}$.

**Prima soluzione:** Dato che $\widehat{ABC} = \widehat{ACB} = \widehat{BPC}$, i triangoli $ABC$ e $BCP$ sono simili per il primo criterio di similitudine. In particolare, vale

$$\frac{AB}{BC} = \frac{BC}{CP}. \tag{5}$$

Siano $x = BC$ e $\ell = AB$. Per il punto a) si ha che $CP = AC - AP = \ell - x$, e quindi l'equazione (5) diventa

$$\frac{\ell}{x} = \frac{x}{\ell - x}.$$

Moltiplicando per i denominatori si ottiene $\ell(\ell - x) = x^2$, da cui

$$x^2 + \ell x - \ell^2 = 0.$$

Questa è un'equazione di secondo grado in $x$, la cui unica soluzione positiva è

$$x = \frac{-\ell + \sqrt{\ell^2 + 4\ell^2}}{2} = \ell \cdot \frac{\sqrt{5}-1}{2},$$

da cui

$$\frac{BC}{AB} = \frac{x}{\ell} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

**Seconda soluzione:** Sia $\alpha = \widehat{BAC}$. Dal punto a) segue che $\widehat{ABP} = \widehat{BAC} = \alpha$, e quindi $\widehat{ABC} = \widehat{ACB} = 2\alpha$. Considerando la somma degli angoli interni nel triangolo $ABC$ otteniamo

$$180° = \widehat{CAB} + \widehat{ACB} + \widehat{ABC} = \alpha + 2\alpha + 2\alpha = 5\alpha,$$

da cui $\alpha = 36°$.

Per il teorema dei seni vale $\frac{BC}{\sin \widehat{BAC}} = \frac{AB}{\sin \widehat{ACB}}$, da cui

$$\frac{BC}{AB} = \frac{\sin \widehat{BAC}}{\sin \widehat{ACB}} = \frac{\sin 36°}{\sin 72°} = \frac{\sin 36°}{2 \sin 36° \cos 36°} = \frac{1}{2 \cos 36°} = \frac{1}{2 \cdot \frac{\sqrt{5}+1}{4}} = \frac{2}{\sqrt{5}+1} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

(c) **Prima soluzione:** Si ha che $BQ = BC = BP$, dove la prima uguaglianza segue dal fatto che per ipotesi $BQ$ e $BC$ sono raggi della stessa circonferenza, mentre la seconda uguaglianza è stata dimostrata nel punto a). Abbiamo quindi che il triangolo $BQP$ è isoscele. Sempre dal punto a) sappiamo che $\widehat{ABP} = \widehat{BAC}$, da cui

$$\widehat{QPB} = \frac{180° - \widehat{ABP}}{2} = \frac{180° - \widehat{BAC}}{2} = \widehat{ABC}.$$

Inoltre, essendo l'incentro del triangolo isoscele $ABC$, il punto $I$ giace sull'asse del segmento $BC$; ne segue che il triangolo $BIC$ è isoscele, da cui

$$\widehat{CIP} = 180° - \widehat{BIC} = 2 \cdot \widehat{PBC} = \widehat{ABC}.$$

In particolare, $\widehat{QPB} = \widehat{ABC} = \widehat{CIP}$ e quindi $CI \parallel PQ$ poiché le rette $CI$ e $PQ$ formano con la trasversale $PI$ angoli alterni interni congruenti.

I triangoli $BIC$ e $BIQ$ sono congruenti per il primo criterio di congruenza in quanto $BI$ è in comune, $\widehat{PBC} = \widehat{ABP}$ e $BC = BQ$. Di conseguenza

$$\widehat{BQI} = \widehat{BCI} = \widehat{CBP} = \widehat{PBA} = \widehat{BAC},$$

dove la terza disuguaglianza è dovuta al fatto che $BP$ è bisettrice, mentre l'ultima segue dal punto a). Perciò le rette $AC$ e $QI$ sono parallele in quanto formano con la trasversale $AQ$ angoli corrispondenti congruenti.

Dato che il quadrilatero $CPQI$ ha i lati opposti paralleli, è un parallelogramma.

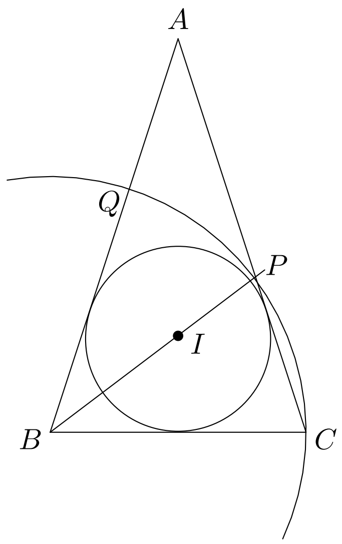
**Seconda soluzione:** Dal punto a) segue che

$$\widehat{BAC} = \widehat{ABP} = \frac{\widehat{ABC}}{2} = \frac{\widehat{ACB}}{2} = \widehat{PCI}.$$

La similitudine dei triangoli $ABC$ e $BCP$, dimostrata nel punto b), implica che $\widehat{BPC} = \widehat{ACB}$.

Grazie alle due uguaglianze di angoli appena dimostrate, i triangoli $ABC$ e $CPI$ sono simili per il primo criterio di congruenza, quindi in particolare il triangolo $CPI$ è isoscele.

Consideriamo ora la simmetria rispetto alla retta $BP$. Dato che $BP$ è la bisettrice di $\widehat{ABC}$ e $BC = BQ$, tale simmetria scambia i punti $Q$ e $C$. Ciò implica che i triangoli $QPI$ e $CPI$ sono congruenti, e quindi $CI = CP = QP = QI$. Pertanto il quadrilatero $CPQI$ è un rombo e, in particolare, un parallelogramma.




16. (a) Osserviamo che un ciliegio fiorisce se e solo se è contenuto in una riga dove ci sono almeno 6 ciliegi. Infatti, se ci sono almeno 6 ciliegi in una riga, allora ci sono al più 5 peschi, che sono quindi in inferiorità rispetto ai ciliegi. D'altra parte, se su una riga ci sono meno di 6 ciliegi, allora su tale riga ci sono almeno 6 peschi, in superiorità numerica rispetto ai ciliegi.

**Prima Soluzione:** Supponiamo per assurdo che nessun albero fiorisca. Dato che nessun ciliegio fiorisce, in ogni riga possono esserci al più 5 ciliegi, per un totale di al più $5 \cdot 11 = 55$ ciliegi. Analogamente, poiché nessun pesco fiorisce, in ogni colonna possono esserci al più 5 peschi, per un totale di al più $5 \cdot 11 = 55$ peschi. Ne segue che il numero complessivo di alberi è al più $55 + 55 = 110 < 121$, in contraddizione con l'ipotesi. Concludiamo dunque che almeno un albero fiorisce.

**Seconda Soluzione.** Poiché $121/2 > 60$, ci sono almeno 61 ciliegi o almeno 61 peschi. Senza perdita di generalità, possiamo supporre che ci siano almeno 61 ciliegi. Poiché $61/11 > 5$ e ci sono 11 righe, per il principio dei cassetti (anche noto come *pigeonhole principle*) esiste una riga in cui compaiono almeno 6 ciliegi. Per ipotesi, questi 6 ciliegi fioriscono.

**Terza Soluzione** Poiché 121 è dispari, c'è un tipo di pianta che compare più volte; senza perdita di generalità possiamo quindi assumere che ci siano più ciliegi che peschi. Esiste quindi una riga in cui ci sono più ciliegi che peschi e, quindi, in tale riga i ciliegi fioriscono.

(b) Ci sono diverse configurazioni possibili che fanno sì che tutti gli alberi fioriscano. Nel seguito ne proponiamo due. In entrambe le costruzioni assumiamo $6 \leq c \leq 55$. D'altra parte, se fosse $66 \leq c \leq 115$, allora $6 \leq 121 - c \leq 55$, e quindi potremmo fare una costruzione del tutto simmetrica scambiando tra loro ciliegi e peschi, nonché righe e colonne (per esempio, si veda la figura sotto).

**Prima Soluzione:** Scriviamo $c = 11k + r$, dove $k$ è la parte intera del numero ottenuto svolgendo la divisione $c/11$, mentre $r$ ne è il resto; si ha $0 \leq r < 11$, per definizione di resto, e $0 \leq k \leq 5$ essendo $c \leq 55$. Inoltre, l'unico caso in cui si ha $k = 5$ è per $c = 55$ e $r = 0$.

Abbiamo tre casi:

i. se $k = 0$, allora $6 \leq c = r < 11$. In tal caso posizioniamo tutti i ciliegi nella prima riga; essi fioriscono tutti, essendo in almeno 6. In tutte le altre caselle posizioniamo dei peschi. Poiché in ogni colonna c'è al più un ciliegio (eventualmente contenuto nella prima riga), anche ogni pesco fiorisce;

ii. se $r = 0$, allora $c = 11k$. In tal caso posizioniamo tutti i ciliegi nelle prime $k$ righe. Posizioniamo i peschi nelle restanti caselle.
In tal modo ogni ciliegio fiorisce, essendo in una riga in cui ce sono altri 10. Inoltre, i ciliegi sono tutti contenuti nelle prime 5 righe (essendo $k \leq 5$), quindi ogni colonna contiene almeno 6 peschi, che quindi fioriscono;

iii. se $r, k \geq 1$, allora $1 \leq k \leq 4$ e $1 \leq r \leq 10$. Occupiamo interamente le prime $(k-1)$ righe con dei ciliegi (in particolare, non ne occupiamo nessuna se $k - 1 = 0$). Notiamo poi che $12 \leq 11+r < 22$, quindi esistono due interi $6 \leq a, b \leq 11$ tali che $a+b = 11+r$; posizioniamo allora $a$ ciliegi nella riga $k$ e $b$ ciliegi nella riga $(k + 1)$. Le altre caselle sono invece occupate con dei peschi.
Essendo $a, b \geq 6$, le prime $(k + 1)$ righe contengono almeno 6 ciliegi e quindi tutti i ciliegi fioriscono. Poiché $k + 1 < 6$, le ultime 6 righe sono interamente coperte da peschi; in particolare, ogni colonna contiene almeno 6 peschi e quindi anche queste piante fioriscono. Inoltre, il numero totale di ciliegi piantati è

$$11(k - 1) + a + b = 11(k - 1) + (11 + r) = 11k + r = c.$$

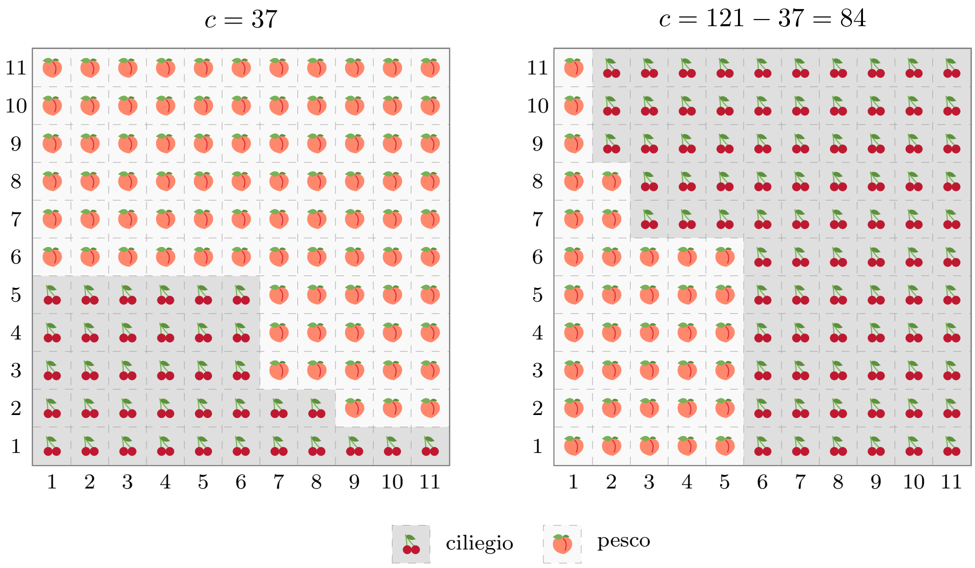
Quindi, per ogni $6 \leq c \leq 55$, abbiamo trovato una configurazione con $c$ ciliegi e $121 - c$ peschi in cui tutte le piante fioriscono.

**Seconda Soluzione:** Come nella prima soluzione, sia $c$ con $6 \leq c \leq 55$. Scegliamo un intero $n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ tale che $6n \leq c \leq 11n$. Tale scelta è sempre possibile, dal momento che

$$[6, 55] = \bigcup_{i=1}^{5} [6i, 11i] = [6, 11] \cup [12, 22] \cup [18, 33] \cup [24, 44] \cup [30, 55].$$

Disponiamo i ciliegi soltanto nelle prime $n$ righe: in ciascuna di esse poniamo 6 ciliegi nelle prime 6 colonne (per un totale di $6n$ ciliegi). Le caselle rimanenti nelle prime $n$ righe sono $11n - 6n = 5n$; per ipotesi su $n$, si ha $0 \leq c - 6n \leq 5n$, quindi possiamo distribuire i rimanenti $c - 6n$ ciliegi nelle stesse $n$ righe, nelle caselle non ancora occupate. Un esempio di tale costruzione per $c = 37$ è riportato nella figura (pannello di sinistra).

Con questa disposizione, ogni riga che contiene ciliegi ne contiene almeno 6; dunque, in ciascuna di tali righe i ciliegi sono più numerosi dei peschi e quindi tutti i ciliegi fioriscono. Inoltre, in ogni colonna compaiono ciliegi soltanto nelle prime $n \leq 5$ righe; di conseguenza, in ciascuna colonna vi sono al più $n$ ciliegi e dunque almeno $11 - n \geq 6$ peschi, che risultano anch'essi tutti fioriti.




(c) Indichiamo con $p = 121 - c$ il numero di peschi. Notiamo innanzitutto che se $56 \leq c \leq 65$, allora $121 - 65 \leq 121 - c \leq 121 - 56$, ossia $56 \leq p \leq 65$.

Supponiamo ora per assurdo che tutti gli alberi fioriscano. Osserviamo che, affinché tutti i ciliegi fioriscano, è necessario che ogni riga contenente almeno un ciliegio ne contenga almeno 6, poiché il numero dei ciliegi deve essere strettamente maggiore di quello dei peschi. Ne segue che ogni riga contiene o 0 ciliegi oppure almeno 6 ciliegi.

Poiché $c \leq 65$, non è possibile che tutte le 11 righe contengano almeno 6 ciliegi, in quanto ne servirebbero almeno $6 \cdot 11 = 66$. Esiste quindi almeno una riga priva di ciliegi, ossia una riga contenente 11 peschi.

Affinché tali peschi fioriscano, in ciascuna colonna devono esserci almeno 6 peschi, da cui segue $p \geq 11 \cdot 6 = 66$, in contraddizione con $p \leq 65$. Concludiamo dunque che per $56 \leq c \leq 65$ non esiste alcuna disposizione in cui tutti gli alberi fioriscano.

17. Supponiamo $a \geq 5$ e dimostriamo che non esistono interi positivi $b$,$c$ che soddisfano l'equazione proposta: dato che $a \geq 5$, $a!$ è multiplo sia di 3 sia di 5. Senza perdita di generalità possiamo supporre $b \geq c$. Allora

$$15 \mid 2^b + 2^c = 2^c(2^{b-c} + 1).$$

Ma $2^c$ non può essere multiplo né di 3 né di 5, perciò deve esserlo $2^{b-c} + 1$.

Si osservi che $2^0$ diviso per 3 dà resto 1, $2^1$ dà resto 2, $2^2$ dà resto 1, $2^3$ dà resto 2 e così via; il resto è 1 se l'esponente è pari e 2 se è dispari. Quindi l'espressione $2^{b-c} + 1$ è divisibile per 3 se e solo se $2^{b-c}$ diviso per 3 ha resto 2, cioè se e solo se $b - c$ è dispari.

Passiamo ora alla divisibilità per 5, limitandoci al caso in cui $b - c$ è dispari: $2^1$ diviso per 5 dà resto 2, $2^3$ dà resto 3, $2^5$ dà resto 2, $2^7$ dà resto 3 e così via. Di conseguenza, l'espressione $2^{b-c} + 1$ divisa per 5 può avere resto 3 o 4 e quindi non è mai divisibile per 5.

In particolare, $2^c(2^{b-c} + 1)$ non può essere contemporaneamente divisibile per 3 e per 5 e quindi non può essere del tipo $a!$ per $a \geq 5$.

Inoltre, l'equazione non ammette soluzioni nemmeno per $a \leq 2$: infatti in questo caso si ha $a! \leq 2$, ma per $b, c$ interi positivi si ha $2^b + 2^c \geq 4$.

Analizziamo quindi i casi rimanenti, che sono $a = 3$ oppure $a = 4$.

- Con $a = 3$ abbiamo l'equazione $2^b + 2^c = 6$ che è soddisfatta se e solo se $b = 1$ e $c = 2$ oppure $c = 1$ e $b = 2$. Abbiamo quindi le due terne $(3, 1, 2)$ e $(3, 2, 1)$.
- Quando $a = 4$ l'equazione diventa $2^b + 2^c = 24$. Il 24 può essere ottenuto come somma di potenze di 2 se e solo se gli esponenti sono 3 e 4: $2^3 + 2^4 = 2^4 + 2^3 = 24$. Pertanto otteniamo altre due terne: $(4, 3, 4)$ e $(4, 4, 3)$.

In conclusione, le soluzioni sono le quattro terne $(4, 3, 4), (4, 4, 3), (3, 1, 2)$ e $(3, 2, 1)$.

# Scale di valutazione degli esercizi dimostrativi

## Esercizio 15

Si assegnino **15 punti** a una soluzione interamente corretta, anche diversa da quella proposta. Per soluzioni incomplete che seguano all'incirca la traccia della soluzione ufficiale, si assegnino punti parziali secondo il seguente schema:

a) Il punto a) vale **5 punti**. Di questi, la dimostrazione del fatto che $\widehat{ABP} = \widehat{BAC}$ vale **4 punti**. Se lo studente non ottiene tale uguaglianza, ma riesce comunque a ottenere un'uguaglianza di angoli che riguardi i punti $A$,$B$,$C$,$P$ (che non sia una delle uguaglianze ovvie riportate nel testo, cioè $\widehat{ABC} = \widehat{ACB}$ o $\widehat{ABP} = \widehat{CBP}$), allora si assegnino comunque **2 punti**.

b) Il punto b) vale **5 punti**. Punti parziali possono essere assegnati secondo il seguente schema:

- Per chi procede similmente a quanto proposto nella prima soluzione, si assegni **1 punto** a chi osserva la similitudine dei triangoli $ABC$ e $BCP$ e **1 punto** a chi scrive la giusta proporzione tra i lati $AB$,$BC$ e $CP$. Si assegni poi **1 punto** a chi riesce a esprimere la lunghezza di uno di questi due lati in termini delle lunghezze degli altri due. La conclusione vale i **2 punti** restanti.
- A chi segue una soluzione simile alla seconda soluzione proposta, si assegnino **2 punti** a chi riesce a ottenere il valore esatto (in gradi o in radianti) di uno degli angoli interni del triangolo $ABC$ e altri **2 punti** se si riesce a impostare un espressione che permetta di calcolare il rapporto $\frac{BC}{AB}$. La conclusione vale **1 punto**.

c) Il punto c) vale **5 punti**. Ci sono diversi modi di procede oltre a quelli proposti. In generale, si assegnino **3 punti** a chiunque dimostri uno solo tra i parallelismi $QI \parallel PC$ e $CI \parallel PQ$. Se ciò non è presente nelle soluzioni, allora si assegni comunque **1 punto** alla dimostrazione che il triangolo $QPB$ è isoscele e **1 punto** a un'uguaglianza che coinvolga un qualunque angolo con vertice $Q$ o con vertice $I$.

## Esercizio 16

Si assegnino **15 punti** a una soluzione interamente corretta, anche diversa da quella proposta. Per soluzioni incomplete si assegnino punti parziali secondo il seguente schema:

a) Il punto a) vale **4 punti**, distribuiti come segue:

Osservare che affinché un ciliegio fiorisca è necessario e sufficiente che ci siano almeno 6 ciliegi nella stessa riga (o analogamente per peschi e colonne) vale **1 punto**.

- A chi procede con un argomento per assurdo come quello della prima dimostrazione proposta, si assegni **1 punto** per chi osserva che in ogni riga ci possono essere al più 5 ciliegi (o peschi) e **1** ulteriore **punto** a chi conclude che ci possono essere al più 55 ciliegi (o peschi). La conclusione vale **1 punto**.
- Per chi segue uno schema di dimostrazione basato sul principio dei cassetti come proposto nella seconda soluzione, si assegni **1 punto** a chi nota che uno tra il numero di ciliegi e quello dei peschi deve essere strettamente maggiore di 55 (nella soluzione ufficiale, abbiamo dimostrato che uno dei due è maggiore di 60). Nominare il principio dei cassetti applicato al numero di righe (o colonne) e ai peschi (o ciliegi) al loro interno vale **1 punto**. La conclusione vale **1 punto**.
- Per chi segue la terza dimostrazione proposta, si assegni **1 punto** a chi si accorge che uno dei due tipi di pianta sarà in maggioranza rispetto all'altro e si assegnino i **2 punti** rimanenti a chi conclude che quindi c'è una riga in cui tale tipo di pianta prevale.

A chi unisce più elementi delle tre possibili dimostrazioni proposte senza concludere, si assegni il massimo numero di punti ottenuti seguendo un unico schema di dimostrazione.

b) Una qualunque soluzione corretta di b) vale **5 punti**. Di questi, si attribuisca **1 punto** a chi osserva che i casi $6 \leq c \leq 55$ e $66 \leq c \leq 115$ sono tra loro simmetrici, **3 punti** a chiunque descriva per ogni $6 \leq c \leq 55$ una configurazione in cui tutte le piante fioriscono e **1** ulteriore **punto** a chi effettivamente dimostra che la configurazione descritta fa fiorire tutte le piante.

   Se non viene mostrata alcuna configurazione generale, allora si assegni **1 punto** a chi comunque espone una configurazione in cui tutte le piante fioriscono per uno specifico $c$.

c) Una qualunque soluzione corretta di c) vale **6 punti**. Si distribuiscano punti parziali per chi segue la dimostrazione proposta secondo lo schema seguente: osservare che il numero di peschi è compreso tra 56 e 65 (estremi inclusi) vale **1 punto**. Supporre per contraddizione che tutti gli alberi fioriscano vale **1 punto**. Dimostrare che esiste almeno una riga che non contiene ciliegi (o una colonna che non contiene peschi) vale **2 punti**. Concludere da ciò che il numero dei ciliegi (o peschi) è almeno 66 vale **2 punti**.

## Esercizio 17

Si assegnino **15 punti** a una soluzione interamente corretta, anche diversa da quella proposta. Per soluzioni incomplete che seguano all'incirca la traccia della soluzione ufficiale, si assegnino punti parziali secondo il seguente schema:

- Osservare che l'equazione non ammette soluzioni per $a = 1$ e $a = 2$ vale **1 punto**;

- Mostrare che esistono esattamente 4 terne con $a \in \{3,4\}$ vale **5 punti**. Di questi, ogni terna che soddisfa l'equazione vale **1 punto**. In particolare, si assegnino **4 punti** a chi individua tutte le soluzioni; si assegni ulteriormente **1 punto** se viene osservato che non ci sono altre soluzioni per $a = 3$ e $a = 4$.

- Dimostrare che non ci sono soluzioni per $a \geq 5$ vale **9 punti**. Di questi si assegnino **2 punti** a chi supponga $b \geq c$ o $c \geq b$ e fattorizzi l'espressione $2^b + 2^c$. Considerare i resti o della divisione per 3 o della divisione per 5 vale **3 punti**, mentre considerarli entrambi (o considerare la divisione per 15) vale **5 punti**. Si assegnino ulteriormente **2 punti** a chi conclude.

  A chi non ottiene nessuno di questi 9 punti, ma riesce comunque a dimostrare che non esistono soluzioni per $b = c$, si assegni **1 punto**.

**Nota di Nomenclatura:** Nella soluzione di qualche concorrente potrebbe comparire la scritta LTE, sigla usata per indicare il *Lifting the exponent lemma*: sia $v_p(m)$ l'esponente di $p$ nella fattorizzazione di $m$, cioè l'intero $k \geq 0$ tale per cui $p^k$ divide $m$ ma $p^{k+1}$ non divide $m$.

**Lemma** (Lifting The Exponent Lemma - LTE)**.** *Sia $p$ un primo e siano $a, b \in \mathbb{Z}$ tali che $p \nmid ab$ e $p \mid (a - b)$. Per ogni intero $n \geq 1$ vale:*

- *Se $p$ è dispari, allora*
$$v_p(a^n - b^n) = v_p(a - b) + v_p(n).$$

- *Se $2 \mid (a - b)$ e $n$ è dispari, allora*
$$v_2(a^n - b^n) = v_2(a - b).$$

- *Se $2 \mid (a - b)$ e $n$ è pari, allora*
$$v_2(a^n - b^n) = v_2(a - b) + v_2(a + b) + v_2(n) - 1.$$